

报价操纵与 LIBOR 计算方法研究^①

刘若宙, 冯 芸*

(上海交通大学安泰经济管理学院, 上海 200030)

摘要: 作为全球重要的货币市场基准利率, 伦敦银行间同业拆借利率 (LIBOR) 的可靠性至关重要。然而 2012 年爆发的 LIBOR 操纵案暴露出 LIBOR 形成机制的重大缺陷。因此着重研究 LIBOR 形成机制中计算方法的问题, 通过包含价格操纵行为的 LIBOR 形成模型, 比较不同计算方法对操纵行为的影响, 以期对 IBOR 类利率, 尤其是我国的 Shibor 的形成机制提供理论参考。主要结论为: 从降低操纵程度的角度, 剔除最大与最小报价后取平均值的截尾均值法并不总优于直接取平均值的均值法, 计算方法的优劣由市场环境所决定; 对于截尾均值法, 增加报价行的家数并不总能降低操纵行为。

关键词: 市场操纵; LIBOR 形成机制; 基准利率; LIBOR 操纵案; 截尾均值法

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2018)05-0065-16

0 引 言

伦敦银行间同业拆借利率 (LIBOR) 是由英国银行家协会于 1986 年推出的利率。目前包含 5 种不同货币, 期限长度从隔夜到 1 年期共 7 种, 总计 35 种利率^②。根据英国银行家协会的估计, 共有 222 万亿英镑的金融互换及 6.4 万亿英镑的贷款与 LIBOR 直接挂钩^[1]。作为全球重要的货币市场基准利率, LIBOR 的可靠性至关重要。2012 年, 包括苏格兰皇家银行在内的多家机构被曝出在次贷危机期间通过要求 LIBOR 与 Euribor 报价员修改报价进行操纵的丑闻。此后不久, 新加坡等地的同业拆借报价也被曝出存在操纵。LIBOR 采用的是由数家大机构先行集中报价, 然后取所有报价截尾均值的计算方法。报价行的报价无需基于实际交易, 但最终形成的利率却能影响报价行持有的资产价格, 这就给了报价行操纵的动机与空间。再

加上监管的缺失最终导致 LIBOR 操纵案爆发。因此, 人们呼吁对基准利率的形成机制进行改革^[2]。

目前关于 LIBOR 操纵的研究可分为 3 个方向。第一个方向是实证检验次贷危机期间 LIBOR 操纵行为, 相关文献^[1, 3-12]的检验思路可归纳为 3 种: 1) 将 LIBOR 与其他未受操纵的基准利率作比较; 2) 将银行的 LIBOR 报价与银行的 CDS 价差作比较^③; 3) 研究 LIBOR 与 LIBOR 报价是否在次贷危机期间存在异常特征。第二个方向是估计 LIBOR 的操纵程度。文献^[13, 14]估计了 LIBOR 的整体操纵程度。Gandhi 等^[15]进一步细化, 根据不同操纵动机分别估计。第三个方向是对现有 LIBOR 形成机制进行改革, 缓解操纵行为, 这是目前最为热门的方向。Abrantes-Metz^[16]认为应当增加 LIBOR 报价行的家数, 报价应与实际交易挂钩并隐藏各报价行的报价。Duffie 等^[17]给出了基于实际交易数据, 采取多个交易日取样

① 收稿日期: 2016-01-09; 修订日期: 2017-02-27。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271136); 上海市 IV 类高峰学科建设单位经费资助项目。

通讯作者: 冯 芸(1973—), 女, 海南安定人, 教授, 博士生导师。Email: fengyun@sjtu.edu.cn

② 截止至 2015 年 12 月底。

③ LIBOR 是拆借利率, 银行的 LIBOR 报价是其愿意接受的无抵押借贷成本, 包含了银行对自身违约成本的估计。它与 CDS 价差 (CDS spread) 都反映了银行的违约风险, 而 CDS 价差是实际交易的结果, 相比 LIBOR 报价, 受到操纵的可能性较低。

的基准利率算法. Chen^[18]证明监管者可以通过要求所有报价行在报价之前支付一笔费用的方式迫使报价行诚实报价. Coulter 和 Shapiro^[19]提出了包含告密者的多阶段报价机制以消除操纵行为. Duffie 和 Stein^[20]建议构建双利率机制.

国内的相关研究则主要集中在基准利率选择^[21], 货币政策的利率传导^[22], 货币市场与资本市场联动^[23], Shibor 的利率期限结构特征^[24]以及波动率特征^[25]这几个方面, 缺少针对操纵的研究.

本文着重研究如何通过选择 LIBOR 计算方法消除操纵的影响. 常见的计算方法有如下 4 种:

截尾均值法 (trimmed mean). 先将所有银行报价从小到大排序, 去掉最小与最大的 m 家报价, 以剩下 $N - 2m$ 家报价的平均值作为 LIBOR. 目前所有 IBOR 类利率均采用该方法;

截尾随机法 (trimmed random). 与截尾均值法类似, 区别在于截尾随机法是从 $N - 2m$ 家报价中随机取 1 个作为 LIBOR;

均值法 (average mean). 取所有银行报价的平均值作为 LIBOR.

中值法 (medium) 将所有银行报价从小到大排序, 取中值作为 LIBOR. 当 N 为奇数时, 取第 $\frac{N+1}{2}$ 家报价, 当 N 为偶数时, 取第 $\frac{N}{2}$ 与 $\frac{N}{2} + 1$ 家报价的均值.

相对其他手段, 通过选择计算方法来消除操纵具备极强的灵活性与可操纵性. 英国银行家协会发布的 LIBOR 操纵案官方调查报告^[26]就利用模拟数据比较不同的计算方法下的 LIBOR. 目前该领域文献较少, 相关结论可以归纳为 3 点.

命题 1 中值法操纵程度最小, 截尾均值法次之, 均值法最大.

Youle^[13]建立了个非合作不完全信息模型, 通过非参数估计, 利用实际 LIBOR 报价数据估计不同计算方法下的操纵程度. Eisl 等^[14]引入了操纵潜力的概念来衡量操纵程度, 同时使用模拟数据和真实的 LIBOR 报价比较不同计算方法下的操纵程度. 两篇文献的实证结果均支持命题 1. 从直观的角度, 在均值法下, 银行的报价不受限制, 每家银行都会依照最优化策略去操纵报价, 故均

值法的操纵程度最大. 在截尾均值法下, 只有中间报价有效, 报价不能超出中间区间, 这对操纵行为进行了一定的限制. 此时, 银行必须考虑其他银行的报价行为, 操纵难度上升, 操纵程度得到了一定的缓解. 中值法作为截尾均值法的极端情况, 具有最小的操纵程度.

命题 2 中值法操纵程度最大, 截尾均值法次之, 均值法最小.

Diehl^[27]构建了简化的报价模型, 结论与文献 [13, 14] 相反. 其观点认为, 在均值法下, 虽然每家银行的都会操纵, 但由于银行数量多, 整体操纵程度被平均化, 因此操纵程度反而最小.

命题 3 在截尾均值法下, 增加报价银行家数会降低操纵程度

从直觉的角度, 增加报价行家数可以降低单家银行的影响力, 从整体上降低操纵程度. 文献 [14, 18] 的实证结果都发现类似现象, 这与文献 [16] 提出的政策意见相一致.

本文发现, 命题 1 与命题 2 之所以相互矛盾, 是因为它们都只考虑计算方法对操纵行为影响的一个方面. 命题 1 讨论的是某个计算方法对操纵行为的限制程度, 命题 2 讨论的是某个计算方法下的最大可操纵程度. 前者定义为阻断效应, 后者定义为扭曲效应, 总操纵程度等于扭曲效应减阻断效应. 计算方法对操纵行为的影响是两方面共同作用的结果, 这是相关文献所忽视的. 本文认为, 文献 [13, 14] 的实证结果之所以显示中值法的总操纵程度最小, 并非因为中值法的阻断效应最大, 而是在实证数据对应的市场环境之下, 阻断效应的作用大于扭曲效应, 阻断效应最大的中值法最优. 倘若市场环境变化, 扭曲效应的作用大于阻断效应, 此时结论就会发生改变.

以文献 [18] 的模型为基础, 研究计算方法对操纵行为的影响. 由于各银行都处于相同的利率环境之下, 且相互之间存在交易行为, 银行可以较为精确地估计其他银行的资金成本^④, 相比文献 [18] 的不完全信息模型, 假设各家银行的资金成本在银行业内部是公开信息. 这样模型复杂度大幅降低, 但与文献 [18] 的模型特征并无显著的偏

④ 对其他银行的资金成本与报价行为有较精准的判断, 是非合作模型下银行能够顺利操纵报价的必要条件.

差. 通过本文的模型, 可以将计算方法对操纵程度的影响划分为扭曲效应与阻断效应, 进而全面的比较不同的计算方法.

另一方面, 相对于文献[9, 13, 27]中难以求解的异质银行模型, 本文与文献[18]都采用同质银行模型, 在不影响模型特征刻画的前提下, 可以求解银行的均衡报价行为, 计算不同市场环境下的计算方法对操纵行为的影响, 进而得到本文核心观点: 不同计算方法之间并没有简单的优劣排序, 市场环境才是决定计算方法优劣的关键.

此外, 在截尾均值法下, 增加报价行的家数不一定总是降低操纵程度(命题3). 只有当报价行家数足够大, 或者保持报价行家数与被剔除的报价行家数比例不变的情况下才有效. 该结论在不同的市场环境下都是稳健的. 本文结论对 LIBOR 及其他 IBOR 类利率(如 Shiber)的监管有着重要的理论与实践意义.

1 基本模型

1.1 模型的基本设定

考虑单期非合作模型. 有 N 家银行和 1 家监管者. 银行都是风险中性的, 资金成本为 $\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, 每个 c_i 都独立同分布, 银行之间不存在共谋行为. 银行持有的 LIBOR 类资产头寸为 $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, 所有银行具有相同的 LIBOR 风险敞口 θ , θ 是公开信息. $\theta > 0$ ($\theta < 0$) 表示当 LIBOR 上升时, 银行 LIBOR 类资产头寸增值(下降). $\theta = 0$

表示银行 LIBOR 类资产头寸市值不受 LIBOR 变化的影响. 各家银行的 A_i 与 c_i 的分布是公开信息, 但它们的实际值只在银行业内部是公开信息, 监管者在期初并不知悉.

期初, 监管者公布 LIBOR 计算方法 $L(\cdot): R^N \rightarrow R$. 银行给出各自报价 $\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$, 监管者计算并公布 LIBOR 与 LIBOR 报价. 本文研究上文提及的 4 种计算方法.

为了方便讨论, 将计入 LIBOR 的报价称为有效报价. 截尾均值法与截尾随机法的有效报价家数为 $N - 2m$, 均值法为 N , 中值法为 1 或 2. 在期末, 监管者通过审计等手段获得 $\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ 的实际值, 对操纵行为进行处罚: $-0.5\delta A_i (b_i - c_i)^2$, δ 为惩罚因子, $\delta > 0$.

1.2 银行的效用函数与报价均衡

LIBOR 有两种操纵动机, 一种是声誉动机(stigma motivation 或 reputation motivation), 它是指在次贷危机期间, 银行有意压低 LIBOR 报价, 向市场释放其经营良好的虚假信号的行为. 另一种是现金流动机(cash flow motivation), 它是指银行通过操纵 LIBOR 报价, 使 LIBOR 向对其持有的 LIBOR 类资产头寸有利的方向变动的行为. 声誉动机只在次贷危机期间出现, 并且是 LIBOR 独有的^⑤. 文献[15]的实证结果显示现金流动机是最主要的操纵动机. 此外, 监管者可以通过只公布 LIBOR 而不公布银行报价的方式消除声誉动机, 因此本文仅讨论现金流动机. 对于任意银行 i , 已知其他银行的报价 b_{-i} , 银行的操纵收益为

$$\Delta L A_i \theta - 0.5\delta A_i (b_i - c_i)^2 = [L(b_i, b_{-i}(b_i)) - L(c_i, b_{-i}(c_i))] A_i \theta - \frac{A_i \delta (b_i - c_i)^2}{2} \quad (1)$$

由于 b_i 也会影响其他银行的报价, 因此 $b_{-i} = b_{-i}(b_i)$. ΔL 表示银行 i 的操纵行为引起 LIBOR 的变动幅度, $\Delta L = L(b_i, b_{-i}(b_i)) - L(c_i,$

$b_{-i}(c_i))$. $\Delta L A_i \theta$ 表示操纵报价的收益. 由于 A_i 不影响银行的报价行为, 效用函数进一步简化为

$$\pi_i(b_i, b_{-i}(b_i)) = [L(b_i, b_{-i}(b_i)) - L(c_i, b_{-i}(c_i))] \theta - \frac{\delta (b_i - c_i)^2}{2} \quad (2)$$

^⑤ LIBOR 是拆借利率, 包含了银行对自身违约成本的估计. Shiber 与 Euribor 是拆放利率, 其报价是银行愿意接受的无抵押放贷成本, 它们只是银行对市场贷款成本的估计, 不存在声誉动机.

求银行的均衡报价行为就相当于求解模型 $\max_{b_i} \pi_i(b_i, b_{-i}(b_i)) \forall i = 1, 2, \dots, N$ (3)

本文用 θ/δ 衡量市场整体操纵倾向的高低. θ/δ 越大意味着操纵动机大或惩罚力度低, 此时市场操纵倾向高. 下文用利率波动幅度 (定义见第 3 节) 和市场整体操纵倾向两个变量描述市场环境.

2 银行的均衡报价行为

2.1 均值法下银行的均衡报价行为

均值法下, 所有银行的报价都记入 LIBOR, 银行的报价不会相互影响. 对于任意银行 i , 只要解效用最大化问题即可

$$\max_{b_i} \pi_i(b_i) = \left(\frac{b_i - c_i}{N} \right) \theta - \frac{\delta (b_i - c_i)^2}{2} \quad (4)$$

$$\text{F. O. C. } \frac{\partial \pi_i(b_i)}{\partial b_i} = \frac{\theta}{N} - \delta(b_i - c_i) = 0 \quad (5)$$

$$\text{解得 } b_i^* = c_i + \frac{\theta}{N\delta}, \text{ 且 } \pi_i(b_i^*) = \frac{\theta^2}{2N^2\delta} \geq 0.$$

每家银行的均衡报价为 $b_i^* = c_i + \frac{\theta}{N\delta}$, LIBOR 的偏离程度为 $\left| \frac{\theta}{N\delta} \right|$. 由于 $\delta > 0$, 银行的操纵方向

与 θ 相关, 当 $\theta > 0$ 时, 银行会拉高报价, 当 $\theta < 0$ 时, 银行会压低报价, 而当 $\theta = 0$ 时, 银行不会操纵报价. LIBOR 的扭曲程度 $\left| \frac{\theta}{N\delta} \right|$ 与 N 成反比.

根据二次函数的性质, $c_i + \frac{\theta}{N\delta}$ 是每一家银行会选择偏离程度最大的报价^⑥. 当所有银行均给出偏离程度最大的报价时, 导致 LIBOR 的偏离称为扭曲效应. 扭曲效应衡量的是 LIBOR 的最大可操纵程度.

2.2 截尾均值法下单家银行的均衡报价行为

在给定其他银行报价 b_{-i} 的情况下, 给出银行 i 的效用函数 $\pi_i(b_i, b_{-i})$, 讨论单家银行的报价行为.

截尾均值法下, 只有中间的 $N - 2m$ 家报价有效. $\Delta L = L(b_i, b_{-i}(b_i)) - L(c_i, b_{-i}(c_i))$, 操纵行为对 LIBOR 的影响取决于 b_i 在 $\{b_i, b_{-i}\}$ 下及 c_i 在 $\{c_i, b_{-i}\}$ 下是否有效. 将 c_i 与 b_{-i} 从小到大排序, 排第 k 位的记为 $g_{(k)}$. 下面讨论不同情况下 i 的效用函数与银行报价行为. 式(6)和式(7)是不同情况下 i 的效用函数.

1) 当 $c_i < g_{(m+1)}$ 时 (见图 1, 白色表示报价有效, 黑色表示报价无效), c_i 在 $\{c_i, b_{-i}\}$ 下无效 (图 1 中的诚实报价), 效用函数为

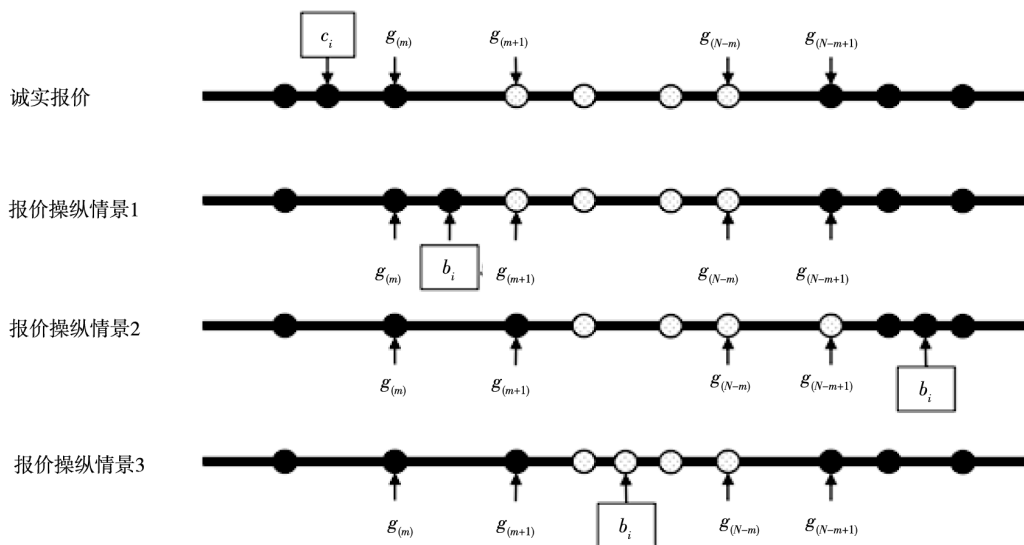


图 1 $c_i < g_{(m+1)}$ 时银行 i 的报价行为 (给定其他银行报价 b_{-i})
Fig. 1 Quoting behavior of bank i when $c_i < g_{(m+1)}$ (given the quotes of other banks b_{-i})

⑥ 超过 $c_i + \theta/(N\delta)$ 后效用函数单调递减, 故不超过 $c_i + \theta/(N\delta)$.

$$\pi_i(b_i, b_{-i}) = \begin{cases} -\frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} & b_i < g_{(m+1)} \\ \left(\frac{b_i - g_{(m+1)}}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} & g_{(m+1)} \leq b_i \leq g_{(N-m+1)} \\ \left(\frac{g_{(N-m+1)} - g_{(m+1)}}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} & g_{(N-m+1)} < b_i \end{cases} \quad (6)$$

下面讨论银行的报价行为. 当 $\theta \leq 0$ 时, 总有 $\pi_i(b_i, b_{-i}) \leq 0 = \pi_i(c_i, b_{-i})$, 因此银行总是诚实报价 ($b_i = c_i$). 只有 $\theta > 0$, 且 $b_i > c_i$ 时, $\pi_i(b_i, b_{-i})$ 有可能大于 0. 下面只考虑银行 LIBOR 风险敞口 $\theta > 0$ 时, 银行会提高报价 ($b_i > c_i$) 的情况. 此时有 3 种报价操纵情景 (图 1).

操纵情景 1 $b_i < g_{(m+1)}$, b_i 在 $\{b_i, b_{-i}\}$ 下无效. 由于 $\pi_i(b_i, b_{-i}) = -\frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} \leq 0 = \pi_i(c_i, b_{-i})$, 诚实报价优于操纵报价. 因此若银行操纵报价, 总是有 $b_i^* \geq g_{(m+1)}$.

操纵情景 2 $g_{(N-m+1)} < b_i$, b_i 在 $\{b_i, b_{-i}\}$ 下无

$$\pi_i(b_i, b_{-i}) = \begin{cases} \left(\frac{g_{(m)} - c_i}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} & b_i < g_{(m)} \\ \left(\frac{b_i - c_i}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} & g_{(m)} \leq b_i \leq g_{(N-m+1)} \\ \left(\frac{g_{(N-m+1)} - c_i}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} & g_{(N-m+1)} < b_i \end{cases} \quad (7)$$

操纵情景 1 $b_i < g_{(m)}$, b_i 在 $\{b_i, b_{-i}\}$ 下无效. $\pi_i(b_i, b_{-i}) = \left(\frac{g_{(m)} - c_i}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} < \left(\frac{g_{(m)} - c_i}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(g_{(m)} - c_i)^2}{2} = \pi_i(b_i, g_{(m)})$. 因此若银行操纵报价, b_i 不会低于 $g_{(m)}$, 即 $b_i^* \geq g_{(m)}$.

操纵情景 2 $g_{(N-m+1)} < b_i$, b_i 在 $\{b_i, b_{-i}\}$ 下无效. $\pi_i(b_i, b_{-i}) = \left(\frac{g_{(N-m+1)} - c_i}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} < \left(\frac{g_{(N-m+1)} - g_{(m+1)}}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(g_{(N-m+1)} - c_i)^2}{2} = \pi_i(g_{(N-m+1)}, b_{-i})$. 因此若银行操纵报价, b_i 不会高于 $g_{(N-m+1)}$, $b_i^* \leq g_{(N-m+1)}$.

效. 此时总有 $\pi_i(b_i, b_{-i}) = \left(\frac{g_{(N-m+1)} - g_{(m+1)}}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2} < \left(\frac{g_{(N-m+1)} - g_{(m+1)}}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(g_{(N-m+1)} - c_i)^2}{2} = \pi_i(g_{(N-m+1)}, b_{-i})$. 因此若银行操纵报价, 不会超过 $g_{(N-m+1)}$, $b_i^* \leq g_{(N-m+1)}$.

根据情景 1 与情景 2, 银行只在 $g_{(m+1)} \leq b_i \leq g_{(N-m+1)}$ (操纵情景 3) 上寻找最优报价.

当 $g_{(m+1)} \leq c_i \leq g_{(N-m)}$ 时 (见图 2, 白色表示报价有效, 黑色表示报价无效), c_i 在 $\{c_i, b_{-i}\}$ 下有效 (图 2 中诚实报价), 此时同样有 3 种报价操纵情景 (图 2). 效用函数为

根据情景 1 与情景 2, 银行只在 $g_{(m)} \leq b_i \leq g_{(N-m+1)}$ 上寻找最优报价 b_i^* (操纵情景 3). 由式 (7) 可知, $\theta = 0$ 时, 银行诚实报价, $\theta > 0$ 时, 银行提高报价, 当 $\theta < 0$ 时, 银行压低报价. 由于 $\frac{\partial \pi_i(b_i, b_{-i})}{\partial b_i} \Big|_{b_i=c_i} = \frac{\theta}{N - 2m} - \delta(c_i - c_i) = \frac{\theta}{N - 2m}$, 且 $\pi_i(c_i, b_{-i}) = 0$. 根据单调函数的性质易知, 除了 $g_{(m)} = c_i$ 且 $\theta < 0$; $g_{(N-m+1)} = c_i$ 且 $\theta > 0$; $\theta = 0$ 这 3 情况以外, 总能找到 $b_i' \in [g_{(m)}, g_{(N-m+1)}]$, 满足 $\pi_i(b_i', b_{-i}) > \pi_i(c_i, b_{-i}) = 0$. 此时, 银行总会操纵, 操纵的方向由风险敞口 θ 决定.

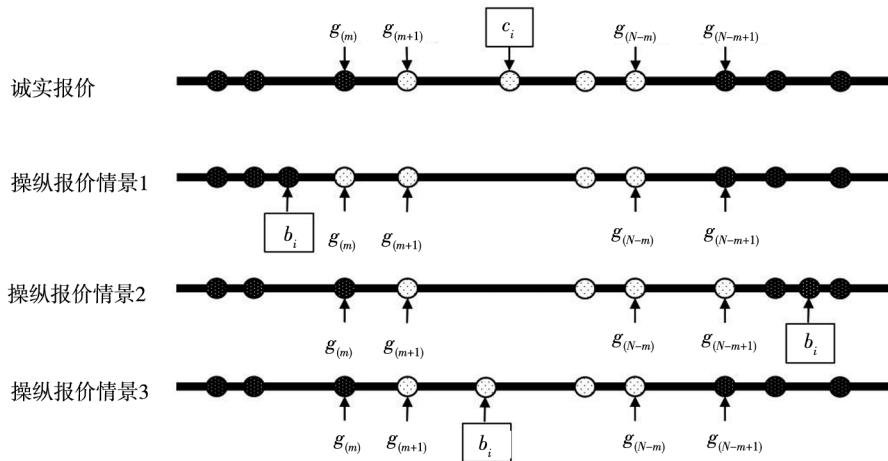


图2 $g_{(m+1)} \leq c_i \leq g_{(N-m)}$ 时银行 i 的报价行为 (在给定其他银行报价 b_{-i})

Fig. 2 Quoting behavior of bank i when $g_{(m+1)} \leq c_i \leq g_{(N-m)}$ (given the quotes of other banks b_{-i})

3) $g_{(N-m)} < c_i$ 的情况与 $c_i < g_{(m+1)}$ 类似,只是方向相反,此处不再赘述.

2.3 截尾均值法下银行的均衡报价行为

根据单家银行的行为,下面讨论整体的报价均衡. 首先报价均衡 $\Omega = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*, \dots, b_N^*\}$ 是个纳什均衡,即 $\forall i = 1, 2, \dots, N$ 总是有

$$\pi_i(b_i^*, b_{-i}^*) \geq \pi_i(\hat{b}_i, b_{-i}^*)$$

根据上文的讨论与纳什均衡的定义易有如下结论.

结论 1 当 $\theta = 0$ 时, $\Omega = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, 所有银行诚实报价.

结论 2 当 $\theta > 0$ 时, 银行总是提高报价, 即 $b_i^* \geq c_i$. 反之, 当 $\theta < 0$ 时, 银行总是压低报价, 即 $b_i^* \leq c_i$.

结论 3 若银行操纵报价 ($b_i^* \neq c_i$), b_i^* 不会超出有效报价区间, 即 b_i^* 总是有效的. 反之, 若银行的报价无效, 则必有 $b_i^* = c_i$.

并不是所有纳什均衡都是报价均衡. 定理 1 给出报价均衡.

定理 1 已知参数为 N 与 m 的截尾均值法, 银行的均衡报价为 Ω

当 $\theta = 0$ 时, $\Omega = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$.

当 $\theta \neq 0$ 时, 资金成本最小的 m 家和最大的 m 家银行都诚实报价, 只有中间的 $N - 2m$ 家银行会操纵报价. 若 $\theta > 0$, 中间 $N - 2m$ 家银行的均衡报价为 $b_i^* = \min\left\{c_i + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}, c_{(N-m+1)}\right\}$, 若 θ

< 0 , 中间 $N - 2m$ 家银行的均衡报价为 $b_i^* = \max\left\{c_i + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}, c_{(m)}\right\}$. 其中 $c_{(m)}$ 与 $c_{(N-m+1)}$ 分别表示从小到大排序, 第 m 位和第 $N - m + 1$ 位的银行资金成本.

证明见附录. 图 3 是银行报价行为的图示. 其中资金成本最小的 A, B 以及最大的 F, G 都是诚实报价, 只有 C, D, E 会操纵报价. C, D 的报价为 c 与 d . 对于 E, 根据结论 3, E 报价不会超出有效区间, 因此其均衡报价为 F 而非 e .

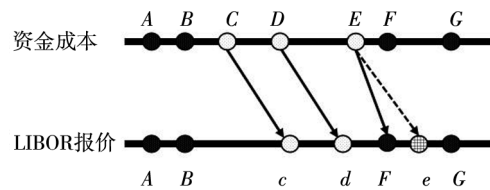


图3 截尾均值法下银行的均衡报价行为

Fig. 3 Quoting equilibrium under the trimmed mean method

截尾均值法下, 操纵行为分成两个部分. 第一个是扭曲效应. 根据定理 1 可知, 每家银行偏离程度最大的报价为 $c_i + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}$, 易得扭曲效应为 $\frac{\theta}{(N - 2m)\delta} \cdot \left| \frac{\theta}{(N - 2m)\delta} \right| > \left| \frac{\theta}{N\delta} \right|$, 即截尾均值法由于有效报价家数减少, 相对于均值法, 扭曲效应增大. 这与文献[27]的结论一致.

另一方面, 截尾均值法限制了银行的报价范围, 例如图 3 中银行 E, 报价幅度不能超出闭区间

$[c_{(m)}, c_{(N-m+1)}]$, 若 $c_i + \frac{\theta}{(N-2m)\delta}$ 超出这个区间, 只能以 $c_{(m)}$ 或 $c_{(N-m+1)}$ 作为均衡报价. 这种由于价格限制引起 LIBOR 总操纵程度降低的效应称为阻断效应. 总操纵程度 = 扭曲效应 - 阻断效应. 扭曲效应衡量的是 LIBOR 的最大可操纵程度. 扭曲效应越大, 总操纵程度越大; 阻断效应对 LIBOR 操纵的限制, 它衡量的是报价行操纵报价的难易程度, 阻断效应越大, 总操纵程度越小. 均值法是 $m = 0$, 阻断效应为 0 的特殊情况, 此时所有银行都会操纵, 操纵难度为 0. 这也正是均值法被大部分文献所诟病的原因.

当阻断效应大到一定程度时, 会有相当数量的银行以 $c_{(m)}$ 或 $c_{(N-m+1)}$ 作为均衡报价. 此时, 银行报价会在 $c_{(m)}$ 或 $c_{(N-m+1)}$ 处呈现异常的聚类性. 文献[9, 10, 18]从理论模型与实证的角度都发现该现象, 并以这种异常的聚类性作为检测 LIBOR 操纵行为的依据.

2.4 截尾随机法与中值法下银行的均衡报价行为

对于参数为 N 与 m 的截尾随机法, 单家银行的有效报价只有 $\frac{1}{N-2m}$ 的概率成为 LIBOR, 一旦被选中, LIBOR 则完全由该银行的报价决定,

银行最大化其期望效用函数 $E[\pi_i(b_i, b_{-i})]$. 由于银行都是风险中性的, $E[\pi_i(b_i, b_{-i})]$ 与截尾均值法下的效用函数相同. 从银行报价的角度, 两种方法是完全一致, 区别仅在于 LIBOR 最终值不同.

中值法可看作截尾均值法在 $N - 2m = 1$ 或 2 时的特殊情况.

3 不同市场环境下计算方法的比较

下面通过数值模拟, 在不同市场环境下比较不同计算方法. 假设 $\{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ 服从均匀分布 $U[0, u]$, u 是待定参数, 用来衡量市场利率波动幅度. 本文以 u 与市场整体操纵倾向 θ/δ 描述市场环境, 以应用最为广泛的美元 LIBOR 的参数 $N = 18$ 与 $m = 4$ 作为基准参数. 不失一般性, 只考虑 $\theta > 0$ 的情况. θ/δ 的取值从 0 到 50, 间距为 0.05. 分别考虑 $u = 1, 2, 4, 8$ 等 4 种不同情况^⑦.

3.1 不同市场环境下不同计算方法的扭曲效应

表 1 给出了不同计算方法的扭曲效应比较. 由于扭曲效应不受 u 的影响, 研究市场环境对扭曲效应的影响, 只需考虑市场操纵倾向 θ/δ . 图 4 比较不同市场环境下, 不同计算方法的扭曲效应.

表 1 不同计算方法的扭曲效应比较

Table 1 Comparison of distorting effect under different calculation methods

计算方法	扭曲效应大小	与 θ/δ 的关系	与 N 的关系	与 m 的关系	扭曲效应对比
截尾均值法 截尾随机法	$\left \frac{\theta}{(N-2m)\delta} \right $	成正比. θ/δ 增加时, 扭曲效应增大.	成反比. N 增加时, 扭曲效应降低.	成正比. m 增加时, 扭曲效应增大.	扭曲效应在均值法与中值法之间
均值法	$\left \frac{\theta}{N\delta} \right $				
中值法	$\left \frac{\theta}{2\delta} \right $ (若 N 为偶数) $\left \frac{\theta}{\delta} \right $ (若 N 为奇数)		扭曲效应只与 N 的奇偶性相关	扭曲效应最大	

⑦ $u = 1$ 表示利率在 0 到 1% 之间波动. 由于利率大于 8% 的现象比较少见, 因此 u 的最大值取到 8.

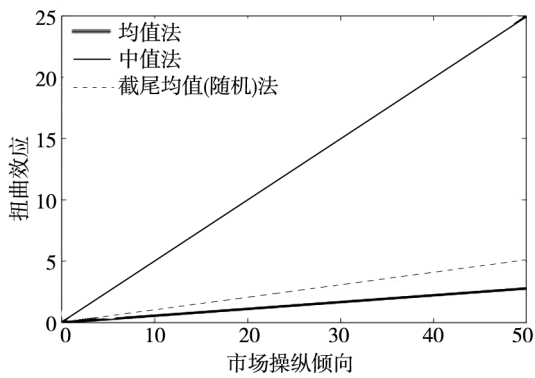


图 4 不同市场环境下,不同计算方法的扭曲效应(越小越好)

Fig. 4 Distorting effect of different calculation methods under different market environments (the smaller, the better)

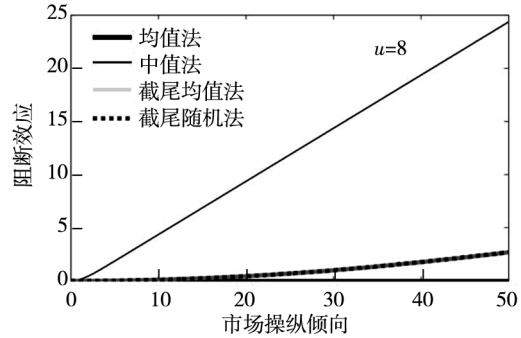
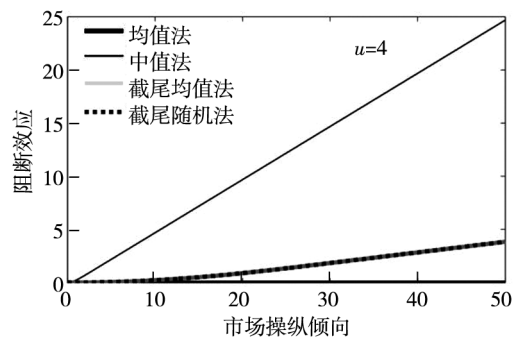
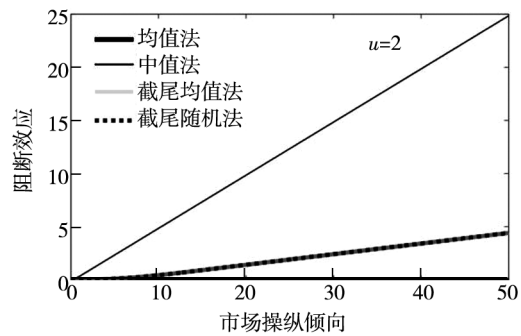
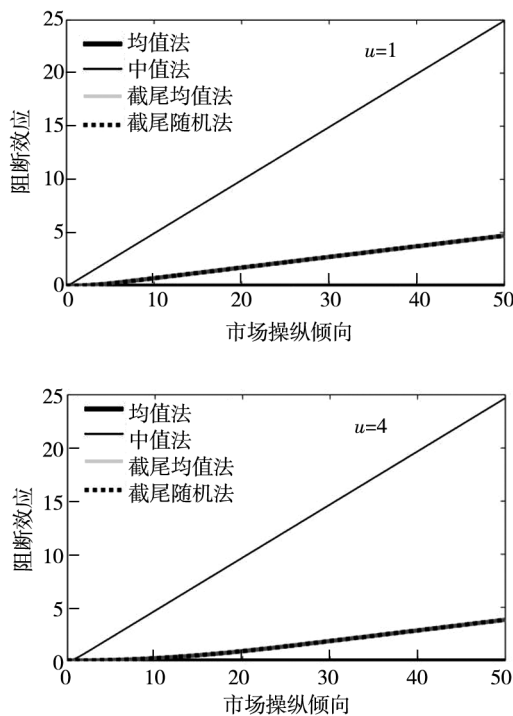


图 5 不同市场环境下不同计算方法的阻断效应(越大越好)

Fig. 5 Blocking effect of different calculation methods under different market environments (the larger, the better)

首先,均值法的阻断效应为 0,与 X 轴重合.在其他计算方法下,阻断效应同样随着市场操纵倾向 θ/δ 的增大而增大,即操纵倾向越大,阻断效应对操纵的抑制效果越明显.

其次,截尾均值法与截尾随机法阻断效应几乎相同(实际值略有微小偏差),曲线重合(图 5 中值法与均值法之间黑灰相间的粗线).中值法阻断效应最大.从阻断效应来看,结论与扭曲效应

首先,增加市场操纵倾向会增加扭曲效应(最大可操纵程度).其次,由于均值法的有效报价家数最大,最大可操纵程度被平均化,因此通常被认为操纵程度最大的均值法扭曲效应反而最小.中值法有效报价家数仅为 1 或 2,扭曲效应最大.

3.2 不同市场环境下不同计算方法的阻断效应

由于阻断效应的解析解难以获得,下面通过数值模拟,先根据定理 1 计算 LIBOR 的总操纵程度,然后利用公式总操纵程度 = 扭曲效应 - 阻断效应,反推阻断效应.由于银行的资金成本 c_i 是随机变量,对于每组参数 $(\theta/\delta, u)$,都做 10 000 次模拟.不同市场环境下,不同计算方法的阻断效应见图 5.

刚好相反,中值法最优,截尾均值法与截尾随机法次之,均值法最差.结论在不同的市场环境下都成立.

此外,除了均值法的阻断效应总为 0,在其他计算方法下,随着市场利率波动幅度 u 的增大,阻断效应是降低的(图 6^⑧).随着市场利率波动幅度的增大,不同银行的成本间距变大.这就给了报价行更大的操纵空间,降低了操纵的难度,进而降

⑧ 图 6 是将图 5 的结果重新整理,为了便于观察,只给出 θ/δ 的取值从 0 到 5 的情况。 θ/δ 取其他值时,该特征不变.

低阻断效应(阻断效应衡量的是报价行操纵报价

的难易程度).

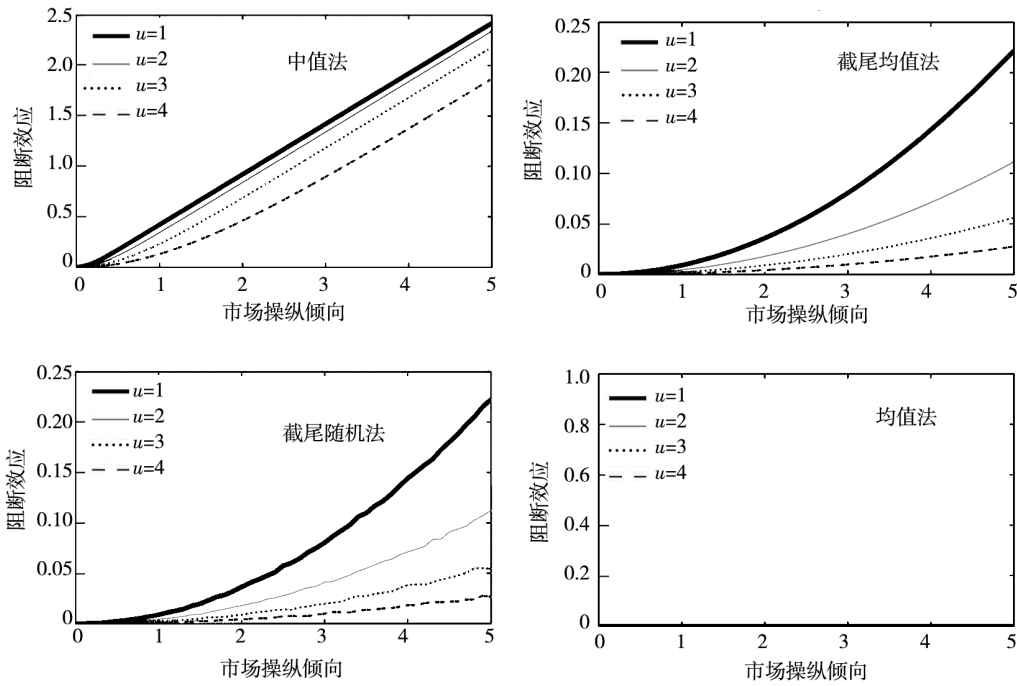


图 6 不同市场环境下不同计算方法的阻断效应(越大越好)

Fig. 6 Blocking effect of different calculation methods under different market environments (the larger, the better)

阻断效应衡量银行操纵报价的难易程度,不受限制的均值法最容易操纵,阻断效应为 0;中值法下操纵难度最大,阻断效应最大.但之前文献错误地用这个结论认定中值法具备最小的总操纵程

度.在 3.3 节可以看到,计算方法的优劣是由市场环境决定所决定的.

3.3 不同市场环境下不同计算方法的总操纵程度

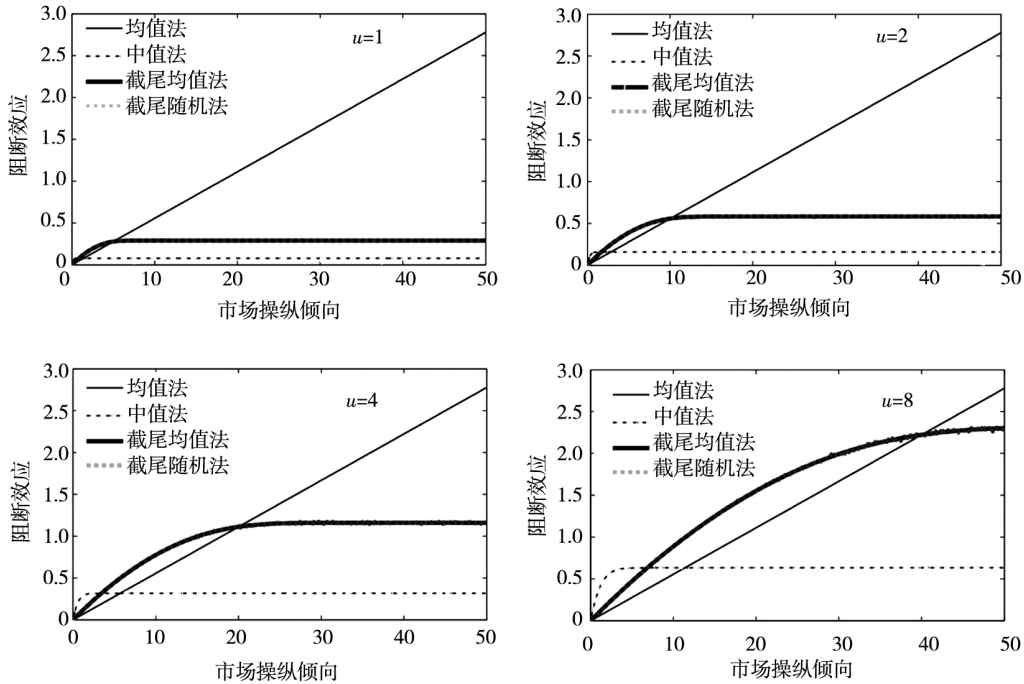


图 7 不同市场环境下不同计算方法的总操纵程度(越小越好)

Fig. 7 Total manipulation of different calculation methods under different market environments (the smaller, the better)

从 LIBOR 总操纵程度上看,截尾随机法与截尾均值法几乎相同,曲线相互重合(即图 7 中黑灰相间的粗线).从降低操纵程度的角度上讲,两者功效相同.但截尾随机法下 LIBOR 的波动率更大,因此可以认为截尾均值法优于截尾随机法的.由于总操纵程度的曲线基本重合,为了提高图表可读性,下文图表中将截尾随机法省略.

θ/δ 较小或者 u 较大时,扭曲效应的作用大于阻断效应.因此,扭曲效应最小的均值法最优,截尾随机法与截尾均值法次之,中值法最差.反之, θ/δ 较大或者 u 较小时,阻断效应的作用大于扭曲效应.因此,阻断效应最大的中值法最优,截尾随机法与截尾均值法次之,均值法最差.

当 θ/δ 到超过某个临界值之后,阻断效应可以完全抵消扭曲效应,限制 LIBOR 的操纵程度的增加.阻断效应最大的中值法首先达到临界值,并且相对于截尾随机法与截尾均值法,中值法将操纵程度限制在了较低的水平.对于没有阻断效应均值法,操纵程度会随着 θ/δ 的增大一直增大

下去.

扭曲效应均不受 u 的影响,均值法的阻断效应总为 0,其他计算方法下的阻断效应随着 u 的增大而降低.然后利用公式,总操纵程度 = 扭曲效应 - 阻断效应可知,均值法下总操纵程度不受 u 的影响,其他计算方法下总操纵程度随着 u 的增大而增大.

通过将总操纵程度划分为扭曲效应与阻断效应,能够清晰地比较不同计算方法的优劣.由于计算方法的优劣由市场环境所决定,因此监管者应当针对市场环境选择计算方法以缓解操纵行为.

4 报价行家数 N 对总操纵程度的影响

4.1 给定 m 时报价行家数 N 对总操纵程度的影响

给定 $m = 4$,下面研究在高 θ/δ ($\theta/\delta = 20$),低 θ/δ ($\theta/\delta = 2$);高 u ($u = 8$),低 u ($u = 2$) 两两组合的市场环境下, N 的变化对不同计算方法的总操纵程度的影响(图 8).

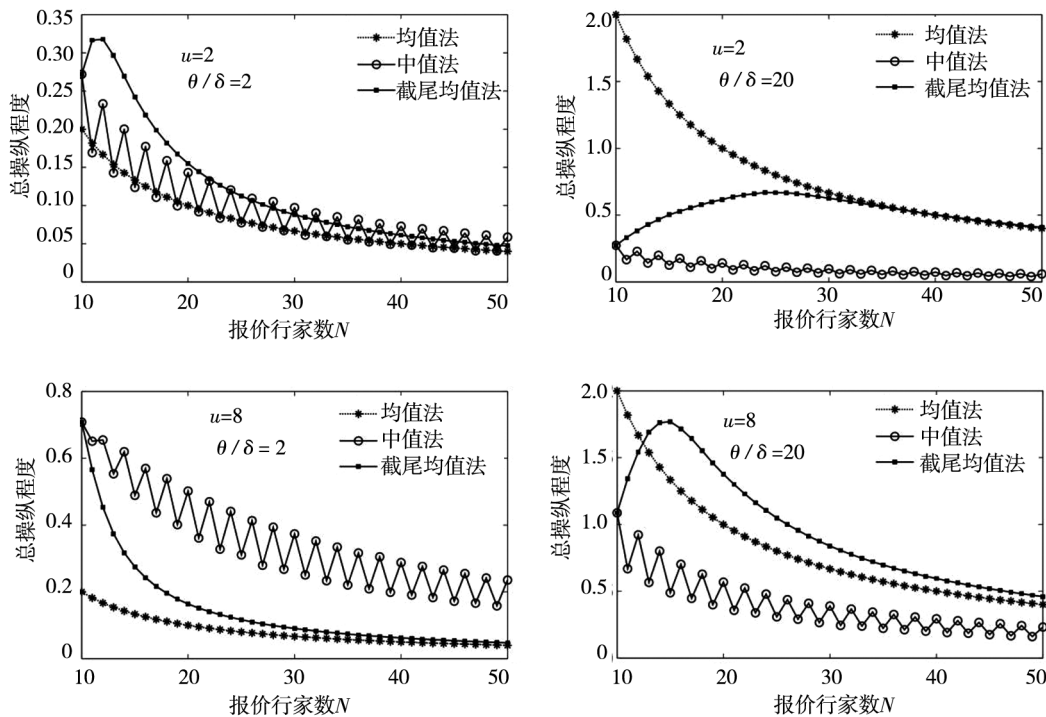


图 8 N 对 LIBOR 总操纵程度的影响 (给定 $m = 4$)

Fig. 8 Impact of N on total manipulation (given $m = 4$)

首先,与上文结论一致,在高 u 低 θ/δ 的组合下,均值法最优,而在低 u 高 θ/δ 的组合下,中值法最优.在低 u 低 θ/δ 下,均值法或 N 为奇数时的中值法

的总操纵程度最低.在高 u 高 θ/δ 下(譬如次贷危机期间),中值法操纵程度最小,在 $N \geq 13$ 时,截尾随机法与截尾均值法的总操纵程度最大.因此,在次贷

危机期间,监管层可以通过临时采用中值法并将 N 的取值从 18 变为 17,便捷有效地降低总操纵程度.

另一个有趣的现象是,对于截尾均值法,除了高 u 低 θ/δ ,在其他市场环境下,总操纵程度随 N 的增加都呈现出先增加后减少的倒 U 型特征.这意味着,给定 m 时,增加 N 并不一定能够减少操

纵程度,与一般直觉相违背.

N 的增大代表有效报价家数的增加,根据表 1,此时扭曲效应会降低.另一方面,阻断效应也是随着 N 的增大而减少(图 9)^⑨.由于两者的随 N 变化程度非线性且不一致,因此总操纵程度随着 N 的增加呈现出一种非单调性特征.

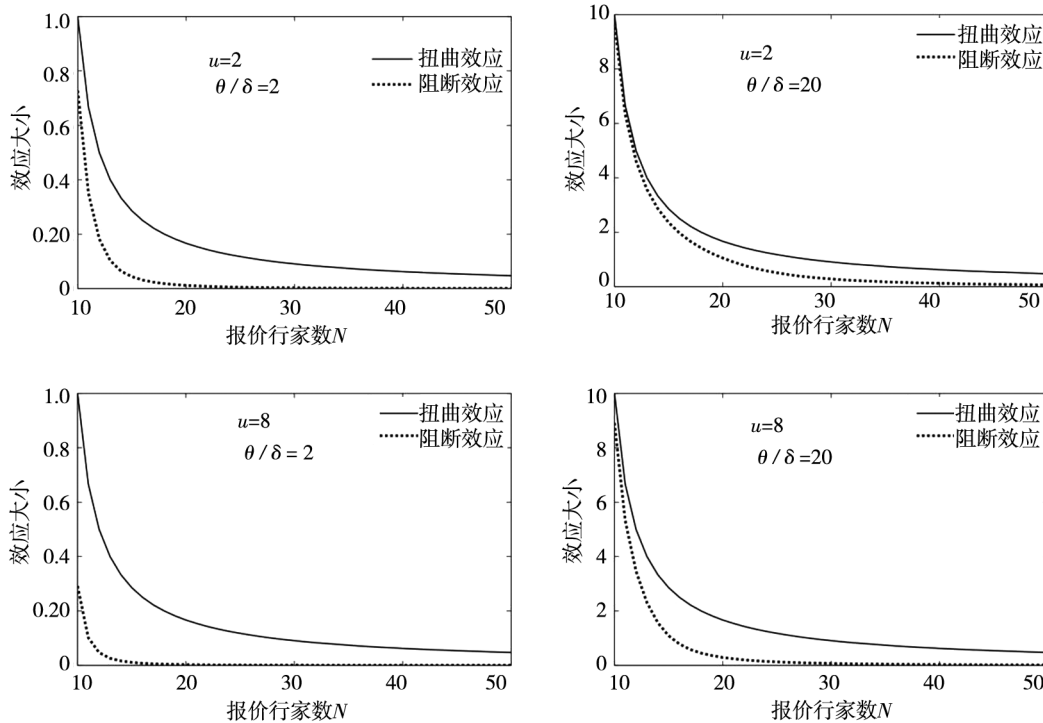


图 9 N 对截尾均值法的阻断效应与扭曲效应的影响(给定 $m = 4$)

Fig. 9 Impact of N on distorting effect and blocking effect under trimmed mean method (given $m = 4$)

4.2 保持 m 与 N 的比例时报价行家数 N 对操纵程度的影响

在实际应用中,监管者改变 N 的同时,一般会同时改变 m .目前常用的算法是保持 m 为 N 的 25%,见表 2. N 的取值为 6 到 18 时, m 的取值按照实际 LIBOR 计算方法; N 的取值为 19 到 45 时, m 值根据同样的方法计算而得的.

与 4.1 节一样,根据表 2 的参数给出不同市场环境下,不同计算方法的总操纵程度.

从图 10 可以看到,从整体而言,在保持 m 与 N 的比例时,不同计算方法下增加 N 均能降低操纵程度.低 u 高 θ/δ 的情况下的截尾均值法,增加 N 整体上也能够降低操纵程度,只是效果非常不明显.

表 2 不同 N 下的截尾均值法

Table 2 Trimmed mean method under different N

N	m	N	m	N	m	N	m
6	1	16	4	26	6	36	9
7	1	17	4	27	7	37	9
8	2	18	4	28	7	38	9
9	2	19	5	29	7	39	10
10	2	20	5	30	7	40	10
11	3	21	5	31	8	41	10
12	3	22	5	32	8	42	10
13	3	23	6	33	8	43	11
14	3	24	6	34	8	44	11
15	4	25	6	35	9	45	11

综上所述,如果希望通过增加 N 来降低操纵

^⑨ 较为直观的理解方式是 N 的增大代表有效报价数增加.中值法的有效报价数最小,阻断效应最大,均值法的有效报价数最大,阻断效应为 0.阻断效应随有效报价数的增加而减少.

程度. 要么取一个比较大的 N (倒 U 型曲线的右 侧), 要么保持 m 与 N 的比例不变.

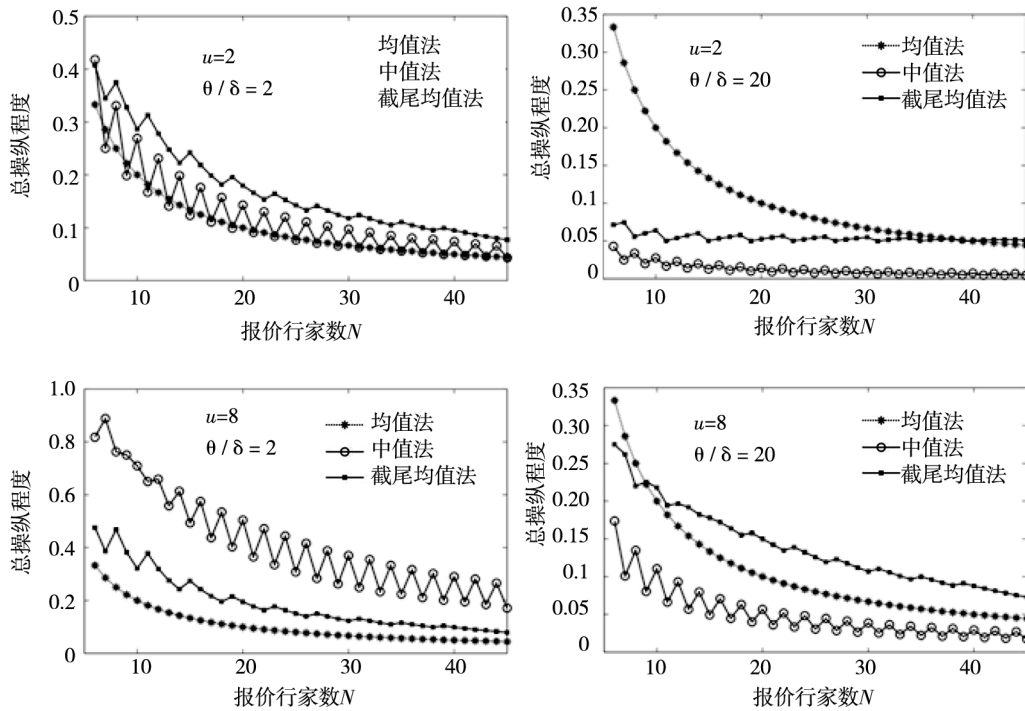


图 10 N 对总操纵程度的影响(保持 m 与 N 的比例不变)

Fig. 10 Impact of N on total manipulation (given N/m unchanged)

5 结束语

本文通过包含操纵行为的 LIBOR 报价模型, 将 LIBOR 计算方法对操纵行为的影响划分为扭曲效应与阻断效应. 两种效应分别从不同的角度衡量计算方法对操纵行为的影响. 结论对包括我国 Shibor 在内的 IBOR 类利率的监管有着重要的借鉴意义.

首先, 一般观点认为, 相对中值法、截尾均值法和截尾随机法这 3 种方法, 均值法下 LIBOR 更容易受操纵的影响. 本文发现: 除了截尾均值法优于截尾随机法(相同的操纵程度, 更小的波动率), 对于其他的计算方法, 优劣程度由市场环境所决定. 因此, 监管者必须根据市场环境选择最优的计算方法. 目前常用的截尾均值法似乎是个折衷的选择.

其次, Shibor 曾经在 2012 年 12 月将报价行的家数从 16 家增加到 18 家. 但在截尾均值法下, 增加报价行的家数并不总能降低操纵程度. 若监

管层考虑进一步增加报价行的家数 N , 则需要取比较大的 N (倒 U 型曲线的右侧), 或者保持剔除的报价行家数 m 与 N 比例不变才能达到降低总操纵程度的目的.

第三, 当前 Shibor 类衍生品市场规模小, 监管机构对银行的监管程度与控制程度较高, 因此银行操纵 Shibor 的动机小, 难度大. 随着利率市场化进程的不断深化, 利率衍生产品市场的不断发展, 一旦相应监管没有到位, Shibor 操纵案同样有发生的可能. 因此监管层在发展利率衍生产品的同时, 必须加强对 Shibor 的监控.

第四, LIBOR 操纵的根源在于 LIBOR 报价与实际交易脱钩. 要从根本上预防 Shibor 操纵就必须加强银行的 Shibor 报价与银行实际资金交易的联系.

最后, 根据模拟结果, 在次贷危机期间, 截尾均值法的操纵程度最大, 监管者可以通过紧急改用中值法, 同时将报价行家数从 18 降低为 17 的方式降低操纵程度.

参考文献:

- [1] Monticini A, Thornton D L. The effect of underreporting on LIBOR rates[J]. *Journal of Macroeconomics*, 2013, 37(9): 345 – 348.
- [2] Yeoh P. Libor benchmark: Practice, crime and reforms[J]. *Journal of Financial Crime*, 2016, 23(4): 1140 – 1153.
- [3] Mollenkamp C, Whitehouse M. Study casts doubt on key rate[N]. *The Wall Street Journal*, 29/05/2008.
- [4] Abrantes-Metz R M, Kraten M, Metz A D, et al. LIBOR manipulation? [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2012, 36(1): 136 – 150.
- [5] Kuo D, Skeie D, Vickery J. A Comparison of LIBOR to Other Measures of Bank Borrowing Costs[R]. Federal Reserve Bank of New York, 2012.
- [6] Fouquau J, Spieser P K. Statistical evidence about LIBOR manipulation: A “Sherlock Holmes” investigation[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2015, 50(1): 632 – 643.
- [7] Rauch B, Goettsche M, El Mouaaouy F. LIBOR Manipulation-Empirical Analysis of Financial Market Benchmarks Using Benford’s Law[R]. Social Science Research Network, 2013.
- [8] Abrantes-Metz R M, Villas-Boas S B, Judge G. Tracking the LIBOR rate[J]. *Applied Economics Letters*, 2011, 18(10): 893 – 899.
- [9] Snider C A, Youle T. Does the LIBOR Reflect Banks’ Borrowing Costs? [R]. Social Science Research Network, 2010.
- [10] Snider C A, Youle T. The Fix is in: Detecting Portfolio Driven Manipulation of The LIBOR[R]. Social Science Research Network, 2012.
- [11] Bariviera A F, Martín M T, Plastino A, et al. LIBOR troubles: Anomalous movements detection based on maximum entropy[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 449(5): 401 – 407.
- [12] Bariviera A F, Guercio M B, Martinez L B, et al. LIBOR at crossroads: Stochastic switching detection using information theory quantifiers[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2016, 88(7): 172 – 182.
- [13] Youle T. How Much Did Manipulation Distort the LIBOR? [R]. Department of Economics Dartmouth College, 2014.
- [14] Eisl A, Jankowitsch R, Subrahmanyam M G. The Manipulation Potential of LIBOR and Euribor[R]. Social Science Research Network, 2014.
- [15] Gandhi P, Golez B, Jackwerth J C, et al. LIBOR Manipulation: Cui Bono? [R]. Social Science Research Network, 2015.
- [16] Abrantes-Metz R M. Why and How Should the LIBOR Be Reformed? [R]. Social Science Research Network, 2012.
- [17] Duffie D, Skeie D R, Vickery J I. A Sampling-Window Approach to Transactions-based LIBOR Fixing[R]. FRB of New York Staff Report, 2013 (596).
- [18] Chen J. LIBOR’s Poker: Interbank Borrowing Costs and Strategic Reporting[R]. Social Science Research Network, 2013.
- [19] Coulter B, Shapiro J D. A Mechanism for LIBOR[R]. Social Science Research Network, 2015.
- [20] Duffie D, Stein J C. Reforming LIBOR and other financial market benchmarks[J]. *The Journal of Economic Perspectives*, 2015, 29(2): 191 – 212.
- [21] 方 意, 方 明. 中国货币市场基准利率的确立及其动态关系研究[J]. *金融研究*, 2012, (7): 84 – 97.
Fang Yi, Fang Ming. On the establishment of benchmark interest rate and its dynamic relationships in the Chinese money market[J]. *Journal of Financial Research*, 2012, (7): 84 – 97. (in Chinese)
- [22] 钱雪松, 杜 立, 马文涛. 中国货币政策利率传导有效性研究: 中介效应和体制内外差异[J]. *管理世界*, 2015, (11): 11 – 28.
Qian Xuesong, Du Li, Ma Wentao. A study on interest rate channel of monetary policy in China: Mediation effect and the difference between inside and outside of the institutional system[J]. *Management World*, 2015, (11): 11 – 28. (in Chinese)

- [23] 沈传河, 王向荣. 金融市场联动形态结构的非线性分析[J]. 管理科学学报, 2015, 18(2): 66–75.
Shen Chuanhe, Wang Xiangrong. Nonlinear analysis on the pattern structures of connection between financial markets[J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(2): 66–75. (in Chinese)
- [24] 杨宝臣, 苏云鹏. 基于无损卡尔曼滤波的 HJM 模型及实证研究[J]. 管理科学学报, 2010, 13(4): 67–75.
Yang Baochen, Su Yunpeng. Model calibration of HJM models based on UKF with application[J]. Journal of Management Sciences in China, 2010, 13(4): 67–75. (in Chinese)
- [25] 林宇, 陈粘, 陈宴祥. 基于 HMM-EGARCH 的银行间同业拆放利率市场波动预测研究[J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3): 593–603.
Lin Yu, Chen Zhan, Chen Yanxiang. Shibor volatility forecast based on hidden Markov model EGARCH model[J]. System Engineering: Theory and Practice, 2016, 36(3): 593–603. (in Chinese)
- [26] Wheatley M. TheWheatley Review of Libor: Final Report[R]. HM Treasury, United Kingdom, 2012.
- [27] Diehl C. TheLibor Mechanism and Related Games[R]. Institute of Mathematical Economics, 2013 (482).

LIBOR fixing manipulation and LIBOR calculation

LIU Ruo-zhou, FENG Yun*

Antai College of Economics and Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China

Abstract: Being an important global reference rate of the money market, the reliability of LIBOR is vital. Nevertheless, the shortcomings of LIBOR fixing mechanism came under the spotlight during the LIBOR scandal in 2012. This paper focuses on the calculation of LIBOR fixing mechanism and compares the differences in the effects of mitigating manipulation under different LIBOR calculation methods by a model of LIBOR fixing with manipulation behavior. The results provide a theoretical basis for the fixing mechanism of IBOR-class rates, especially for Shibor. The main results are: From the perspective of mitigating total manipulation, trimmed mean method is not necessarily better than average mean method; the superiority of calculation methods depends on the market environment; for trimmed mean method, increasing the number of panel banks does not always decrease manipulation.

Key words: market manipulation; LIBOR fixing mechanism; reference rates; LIBOR scandal; trimmed mean method

附录

定理 1 证明:

$\theta = 0$ 的情况同结论 1. 不失一般性, 只证明 $\theta > 0$ 的情况.

先将银行按资金成本从小到大排序. 最小的 m 家记为 A 组, 最大的 m 家记为 C 组, 中间 $N - 2m$ 家记为 B 组. 用银行的成本来标记银行, 成本排名第 k 名的银行记为 $c_{(k)}$. 证明分 3 步.

第一步 在均衡下 C 组总是诚实报价.

假设已知报价均衡 Ω , 将报价最大的 m 家银行记为 γ 组. $\theta > 0$, 由结论 2 知, 所有银行成本都小于或等于其均衡报价, 因此其他 $N - m$ 家银行的成本都小于或等于 γ 组中最小的报价. 又因为 γ 组的报价无效, 由结论 3 易知, γ 组都是诚实报价的. 故在 Ω 下, γ 组是由成本最大的 m 家银行, 即 C 组全部诚实报价得到的. 此时 A 组与 B 组的均衡报价都小于或等于 $c_{(N-m+1)}$ (γ 组中成本最小的银行). 因此, 总是在所有满足“C 组诚实报价, A 组与 B 组报价小于或等于

$c_{(N-m+1)}$ ”的报价组合中寻找报价均衡.

第二步 在所有满足“C 组诚实报价 A 组与 B 组报价小于或等于 $c_{(N-m+1)}$ ”的报价组合中,若 B 组按照定理 1 报价, A 组必诚实报价.

B 组均按照定理 1 报价,即对于任意 $c_{(k)} \in B, b_{(k)} = \min\left\{c_{(k)} + \frac{\theta}{(N-2m)\delta}, c_{(N-m+1)}\right\}$ $b_{(m+1)}$ 是 B 组中报价最小者 (见图 A-1). A 组中任取一家银行 c_i, c_i 的报价记为 b_i . 除 c_i 外 A 组其他银行的报价记为 ϕ (A 组报价均小于或等于 $c_{(N-m+1)}$), ϕ 是一个包含 $m-1$ 家报价的向量. 按照 2.2 节, 将其他所有银行的报价与 c_i 从小到大排序, 第 $m+1$ 家记为 $g_{(m+1)}$, 下面求 c_i 的均衡报价 b_i^* .

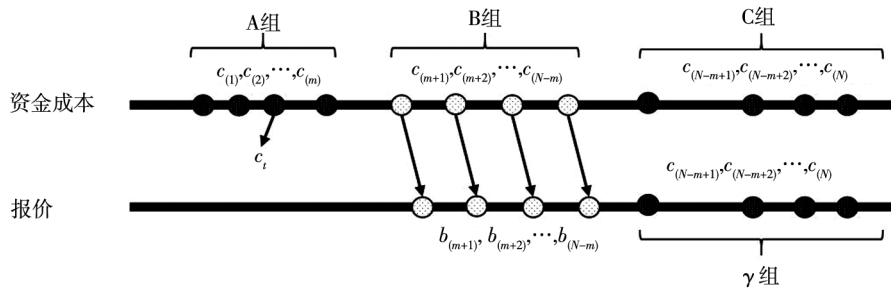


图 A-1 多银行的报价行为

Fig. A-1 Quoting behavior of multiple banks

首先, 无论 ϕ 取何值, 总有 $b_{(m+1)} \leq g_{(m+1)}$. 根据 A 组与 B 组的定义, $c_i \leq c_{(m+1)}$, 故 $c_i \leq c_{(m+1)} \leq b_{(m+1)} \leq g_{(m+1)}$. 此时 c_i 的效用函数为式(6). 根据 $b_{(m+1)} = \min\left\{c_{(m+1)} + \frac{\theta}{(N-2m)\delta}, c_{(N-m+1)}\right\}$ 分组讨论.

$$1) \text{ 当 } c_{(m+1)} + \frac{\theta}{(N-2m)\delta} \leq c_{(N-m+1)} \text{ 时, } b_{(m+1)} = c_{(m+1)} + \frac{\theta}{(N-2m)\delta}.$$

若 $g_{(N-m+1)} < b_i$, $\pi_i(b_i) < \pi_i(g_{(N-m+1)})$. 故满足 $g_{(N-m+1)} < b_i$ 的 b_i 都不是最优报价. 因此 $g_{(N-m+1)} \geq b_i^*$. 若 $g_{(m+1)} \leq b_i \leq g_{(N-m+1)}$, $\pi_i(b_i) = \left(\frac{b_i - g_{(m+1)}}{N-2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2}$. 根据二次函数的性质, 当 $b_i = c_i + \frac{\theta}{(N-2m)\delta}$ 时, $\pi_i(b_i)$ 取最大值

$$\pi_i\left(c_i + \frac{\theta}{(N-2m)\delta}\right) = \left(\frac{c_i - g_{(m+1)}}{N-2m}\right)\theta + \frac{1}{\delta} \left(\frac{\theta}{(N-2m)}\right)^2 - \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{(N-2m)}\right)^2 = \left(\frac{c_i - g_{(m+1)}}{N-2m}\right)\theta + \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{(N-2m)}\right)^2$$

而

$$\left(\frac{c_i - g_{(m+1)}}{N-2m}\right)\theta + \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{N-2m}\right)^2 \leq \left(\frac{c_i - b_{(m+1)}}{N-2m}\right)\theta + \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{N-2m}\right)^2$$

且 $\left(\frac{c_i - b_{(m+1)}}{N-2m}\right)\theta + \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{N-2m}\right)^2 = \left(\frac{c_i - c_{(m+1)} - \frac{\theta}{(N-2m)\delta}}{N-2m}\right)\theta + \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{N-2m}\right)^2 = \left(\frac{c_i - c_{(m+1)}}{N-2m}\right)\theta - \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{N-2m}\right)^2 = \frac{\theta}{N-2m} \left(c_i - c_{(m+1)} - \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\theta}{N-2m}\right)\right) < 0$, 故 $\pi_i\left(c_i + \frac{\theta}{(N-2m)\delta}\right) < 0$. 这意味着若 $g_{(m+1)} \leq b_i \leq g_{(N-m+1)}$, 总有 $\pi_i(b_i) < 0$. 因满足 $g_{(m+1)} \leq b_i \leq g_{(N-m+1)}$ 的 b_i 都不是最优报价. 故 $b_i^* < g_{(m+1)}$. 而当 $b_i < g_{(m+1)}$ 时, 效用函数为 $\pi_i(b_i) = -\frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2}$. 综上, 有 $b_i^* = c_i$, 且满足 $b_i^* < g_{(m+1)}$.

2) 当 $c_{(m+1)} + \frac{\theta}{(N-2m)\delta} > c_{(N-m+1)}$ 时, $b_{(m+1)} = c_{(N-m+1)}$. 由于 $b_{(m+1)}$ 是 B 组中最小的报价 (见 A-2 图), B 组中所有银行的报价都是 $c_{(N-m+1)}$, 此时 $c_i \leq c_{(m+1)} \leq b_{(m+1)} = c_{(N-m+1)} \leq g_{(m+1)}$.

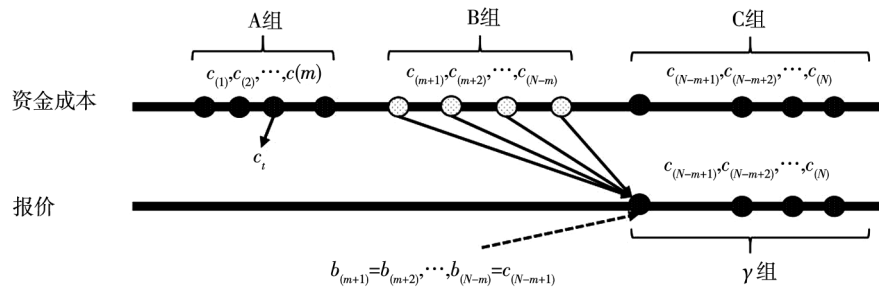


图 A-2 多银行的报价行为 (当 $b_{(m+1)} = c_{(N-m+1)}$ 时)

Fig. A-2 Quoting behavior of multiple bank (when $b_{(m+1)} = c_{(N-m+1)}$)

若 $b_i > g_{(m+1)}$, 此时 $b_i > g_{(m+1)} \geq c_{(N-m+1)}$, 这与 $b_i \leq c_{(N-m+1)}$ 矛盾 (根据 γ 组的性质, A 组报价均小于或等于 $c_{(N-m+1)}$). 故 $b_i^* \leq g_{(m+1)}$. 当 $b_i \leq g_{(m+1)}$ 时, 效用函数为 $\pi_i(b_i) = -\frac{\delta(b_i - c_i)^2}{2}$, 有 $b_i^* = c_i$, 且满足 $b_i^* \leq g_{(m+1)}$.

综上所述, 对于任意的 $c_i \in A$, 无论 A 组其他银行如何报价, 只要 B 组按照定理 1 报价, C 组诚实报价, c_i 的均衡报价总是 $b_i^* = c_i$. 即此时 A 组只能跟随 B 组行动, 诚实报价.

第三步 当 A 组与 C 组诚实报价时, B 组的全局最优报价策略为定理 1. 因此 B 组总如此报价, A 组只能诚实报价. B 组中任取一家银行 c_l , 当 A 组与 C 组诚实报价, B 组其他银行按照 b_{c_k} 报价时, c_l 的效用函数为

$$\pi_l(b_l) = \left(\frac{b_l - c_l}{N - 2m}\right)\theta - \frac{\delta(b_l - c_l)^2}{2} \text{ 且 } c_l \leq b_l \leq c_{(N-m+1)}, \text{ 其中 } b_l \text{ 是 } c_l \text{ 的报价}$$

由二次函数的性质可知, $\pi_l(c_l) = 0$, $\pi_l(b_l)$ 在 $b_l = c_l + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}$ 处取最大值 $\frac{\theta}{2(N - 2m)^2\delta}$, 且 $\frac{\theta}{2(N - 2m)^2\delta} > 0$. $\pi_l(c_l)$ 在 $\left[c_l, c_l + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}\right]$ 上是单调增函数. 若 $c_l + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta} \leq c_{(N-m+1)}$ 时, $b_l = c_l + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}$ 处效用最大; 若 $c_l + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta} > c_{(N-m+1)}$ 时, $b_l = c_{(N-m+1)}$ 处效用最大, 且效用大于 0. 故 c_l 最优报价为 $\min\left\{c_l + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}, c_{(N-m+1)}\right\}$, 即定理 1 的报价.

此时 c_l 达到的不仅仅是给定其他银行报价时的最大效用, 而是全局最大效用 (根据式 (6) 和式 (7) 研究银行的最优化行为即可证明, 此处不再赘述). 只要所有的 $c_k \in B$ 都按照 $b_k = \min\left\{c_{c_k} + \frac{\theta}{(N - 2m)\delta}, c_{(N-m+1)}\right\}$ 报价, 在均衡下 A 组与 C 组都必须诚实报价, c_k 的效用达到全局最大. 因此 B 组总会如此行动, 而其他银行只能跟随, 故定理 1 中的报价策略是唯一的报价均衡.