考虑关联与替代关系的应急物资储备量模型①

林 琪[1,2], 赵秋红[1,3*], 倪冬梅[4,5]
(1. 北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100191; 2. 北京市城市运行应急保障模拟技术北京市重点实验室, 北京 100191; 3. 城市安全运行与应急保障国际科技合作基地, 北京 100191; 4. 北京农学院经济管理学院, 北京 102206; 5. 北京新农村建设研究基地, 北京 102206)

摘要: 应急物资储备量决策是应急管理的重点工作之一,需要兼顾以人为本和经济性两方面的要求. 针对应急救援的阶段性特点,应急物资被划分为响应期物资和恢复期物资. 其中,恢复期物资需求量会受到响应期物资缺货量的影响. 首先考虑两阶段应急物资之间的关联关系,构建了考虑关联关系的应急物资储备量决策模型,分析了模型最优解的特征;进一步,分析了同类应急物资之间的替代性,构建了考虑关联与替代关系的应急物资储备量决策模型,设计了基于蒙特卡洛仿真的求解算法;最后,通过算例分析,验证了模型的有效性. 理论和计算分析的结果表明,将应急物资的关联和替代关系与储备量决策综合考虑,可在保证供应的前提下减少应急物资的储备量.

关键词: 应急物资; 关联关系; 替代关系; 储备量决策
中图分类号: F251.2 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007-9807(2018)08-0112-15

0 引 言

近年来,自然或人为灾害的频繁发生对应急救援的效率和效果提出了更高的要求. Mcloughlin[1]指出了应急管理一体化的重要性,构建了集成缓解、预案、响应、恢复4阶段的应急管理架构. 其中,响应和恢复是应急救援的主要阶段,这两个阶段的应急物资储备量直接决定了应急救援的效率和效果. 然而,由于灾害的不确定性,不仅这两个阶段的应急物资储备量和需求量难以完全匹配,恢复期物资需求量还会受到响应期物资缺货量的影响. 此外,同类应急物资之间能够相互替代而发挥相同或相似的功能,考虑利用这种替代性尽可能地避免缺货情形的发生,进一步增加了应急物资储备量决策的难度.

目前,国内外学者已经对多阶段库存决策问题进行了一定的研究. 早在1953年,Whitin[2]就提出了随机需求下两阶段生产过程中零配件和产成品的库存决策问题. Stalinski[3]按照期望成本最小和利润水平最大的不同优化目标,分析了多阶段零配件和产成品的库存优化决策. 卢继周等[4]建立了简单两级供应链,证明了信息共享能够显著降低制造商库存量的牛鞭效应. 文献[4]指出,救援链和物流链的协作机制是提高生命救援与资源利用效率的关键因素,通过加强上、下阶段的协作以改善应急救援的效率和效果是可行的. 因此,部分学者将生产领域中多阶段库存决策问题的研究成果应用到了应急领域. Barbarosoglu 和 Arda[5]构建了两阶段随机规划模型,用于应急救援期间应急物资的运输决策. Qin 等[6]考虑单周期、多阶段的需求特点,将两阶段报童模型应用到应急物资储备量决策中. 葛洪磊和刘南[7]基于复杂

① 收稿日期: 2016-12-30; 修订日期: 2017-08-04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71471006; 91224007); 北京市新农村基地研究专项资助项目(PXM2017_014207_000031).
通讯作者: 赵秋红(1968—), 女, 山西人, 博士, 教授. Email: qhzhao@buaa.edu.cn

灾害情景构建了两阶段随机规划模型，用于应急设施的定位决策、应急物资的库存决策和不同灾害情景下应急物资分配预案的制定. 刘长石等[8]认为应急物资的及时供应是震后救援工作的重中之重，以应急物资供应总时间最短为目标，构建了震后应急物资多方式供应的多周期模糊 LRP 优化模型. 此外，Ekin 等[9]开发了两阶段随机规划问题的求解算法，讨论了其在两阶段报童模型求解中的应用. Kim 和 Mehrotra[10]研究了需求不确定环境下两阶段随机整数规划问题的求解算法，以及该算法在护士调度管理中的应用. 上述研究虽然在多阶段库存决策模型的构建和求解上取得了较好的进展，但在应急领域的应用多集中于应急物资的运输、调度等问题，针对应急物资储备量的研究较少，特别是多阶段、多产品的应急物资库存决策问题.

此外，考虑产品之间的替代性不仅有助于提高产品的供应水平，而且可以降低产品的储备量. Smith 和 Agrawal[11]讨论了多产品之间存在需求替代关系的零售库存系统管理问题，认为替代性会影响未缺货物资的需求，从而影响其最优储备量. Dutta 和 Chakraborty[12]探讨了模糊环境下单向替代关系对报童模型的影响，证明了替代关系能够提高平均期望利润. Deniz 等[13]研究了不同替代规则下易腐产品补货政策的制定，分析了集中库存以利用产品之间替代关系所带来的好处. 徐寅峰等[14]探讨了有容量限制且需求未知情形下多种物资之间具有替代性时的物资储备问题. Tan 和 Karabati[15]考虑了需求服从泊松分布、缺货时存在需求替代和缺货损失的零售库存管理问题，指出零售商可以利用不同产品之间的替代性来增加期望收益. Chen 等[16]研究了一定客户服务水平约束下两种供应商驱动替代产品的最优库存策略. 汪传旭和许长延[17]构建了两个零售商需求独立且发生缺货时允许相互转运的短生命周期产品两级供应链系统，讨论了零售商之间的应急转运策略. Maddan 等[18]基于经典 EOQ 模型，构建了多产品相互替代的联合补货模型. Lee 等[19]分析了教材零售商的多产品需求估计问题，指出考虑缺货替代情形能显著地提高估计的准确性.

由于灾害的不确定性，应急救援期间应急物资不可避免地会发生缺货或剩余的情形，利用同类应急物资之间的替代性尽可能地避免缺货情形的发生，是一个具有很强现实意义的研究问题. 未雨绸缪地考虑两阶段应急物资之间的相关性和同类应急物资之间的替代性，能够缩小应急物资储备量和需求量之间的差距，改善应急救援的效率和效果. 因此，本研究基于已有研究成果，考虑应急物资的需求特点，构建了考虑关联与替代关系的应急物资储备量决策模型，在一定的需求满足率约束下，以最小化应急物资期望成本为目标，确定了每种应急物资的储备量. 通常，多阶段库存决策模型中，只有最终需求是外生的，而本研究认为恢复期物资既有内生需求，也有外生需求. 同时，研究的是多种应急物资之间的关联关系和部分、顺序与双向的替代关系，相比于一般的多阶段库存决策问题和产品替代问题，更符合应急救援的实际情况.

1　问题描述

考虑以下情形（如图 1 所示）：响应期物资为 P_0，恢复期物资为 $P_i(i = 1,\cdots,n)$，每种应急物资对应着特定的需求 $D_i(i = 0,1,\cdots,n)$. P_0 和 P_i 之间存在关联关系，P_i 具有相同或相似的功能，P_i 之间存在一定的替代关系. 由于自然或人为灾害发生的频率较小，该情形近似于单周期、两阶段的库存决策问题.

开始，管理者确定每种应急物资的储备量. 对单周期库存决策问题来说，不妨设初始库存为 0，订货提前期为 0[20]. 在储备期，应急物资会产生采购成本和库存持有成本. 需要说明的是，应急救援时间相比于库存持有时间要短得多，因此，不考虑应急救援期间的库存持有成本. 灾害发生后，应急救援进入响应期，需求随机地到达，这一阶段的应急物资可能会产生缺货成本. 之后，应急救援进入恢复期，此时的应急物资需求量受到响应期物资缺货量的影响，管理者可以利用应急物资之间的替代性尽可能地避免缺货情形的发生. 事实上，响应期物资之间也同样存在一定的替代关系，这种替代关系对恢复期物资储备量决策的影响由关联关系加以体现，换言之，通过影响响应期物资缺

货量,进而影响恢复期物资需求量. 因此,为了更清楚地阐述替代关系的作用,仅以恢复期物资为例展开讨论. 下面,具体地说明关联关系和替代关系的含义.

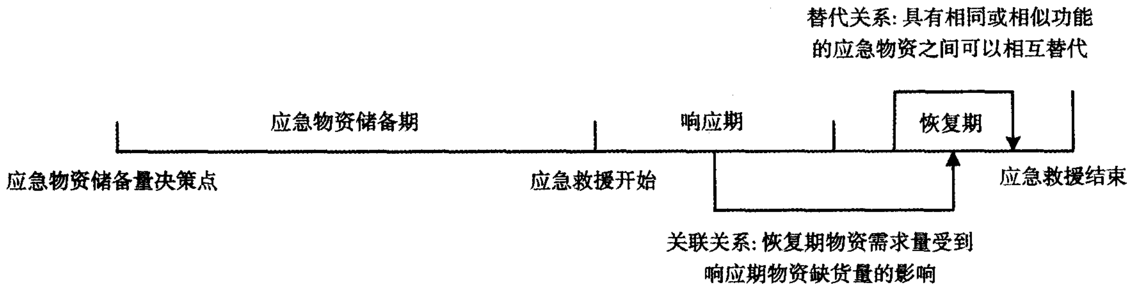

图 1 应急物资储备量决策和使用过程

Fig. 1 The decision-making and use process of emergency material reserve

首先,讨论响应期物资 P_0 和恢复期物资 $P_i(i=1,\cdots,n)$ 之间的关联关系. 应急救援期间,如果 P_0 的储备量恰好满足或者超过其需求量,则不影响 P_i 的需求量;反之,如果 P_0 发生缺货,往往会产生 P_i 的内生需求,造成 P_i 需求量的增加[6]. 也就是说,恢复期物资的需求由两部分组成:一是由灾害自身产生的外生需求,二是由响应期物资缺货产生的内生需求. 举例来说,某地发生了大地震,由于响应期消毒水缺货,导致恢复期爆发了大规模传染病,如疟疾,因此,用于治疗疟疾的药品(氯喹、奎宁、青蒿素、蒿甲醚等)的需求就会增加.

接着,以恢复期为例,研究同类应急物资之间的替代关系对其储备量决策的影响. 举例来说,氯喹、奎宁、青蒿素和蒿甲醚都可以用于疟疾的治疗,当某种药品缺货时,可以使用未缺货的药品加以替代. 但是,疟疾分为间日疟、恶性疟和凶险性疟疾,不同药品对 3 种疟疾的治疗效果不同[14](如表 1 所示).

表 1 不同药品对 3 种疟疾的治疗效果

Table 1 The therapeutic effect of different drugs on three kinds of malaria

药品	间日疟	恶性疟	凶险性疟疾
氯喹	可治疗,但不可根治	可治疗	/
奎宁	可治疗	可治疗	/
青蒿素	可治疗	可治疗(尤其针对抗氯喹的疟疾)	可治疗,但效果一般
蒿甲醚	/	可治疗(尤其针对抗氯喹的疟疾)	可治疗

因此,本研究认为部分、顺序和双向的替代关系更符合应急救援的实际情况. 部分指的是不同应急物资满足同种需求所产生的效果不同. 比如,氯喹、奎宁和青蒿素都能治疗间日疟,但氯喹无法根治. 顺序指的是未缺货应急物资是按照一定的顺序对已缺货应急物资进行替代的. 比如,医疗人员会优先使用青蒿素来治疗间日疟,青蒿素不足则使用奎宁,最后才会使用氯喹. 双向指的是应急物资之间可以相互替代.

综上所述,针对该问题,在一定的需求满足率约束下,以最小化应急物资期望成本为目标,构建考虑关联与替代关系的应急物资储备量决策模型. 显然,应急物资储备量决策发生在灾前,管理者无法提前获得应急物资的需求信息,但能够从历史数据中总结出一定的规律. 因此,本研究基于相关文献,取灾害的平均间隔时间为应急物资的库存持有时间,并假设应急物资需求服从于某种分布,进而展开研究.

2 考虑关联关系的应急物资储备量决策模型

管理者的目标是在一定的需求满足率约束下,最小化应急物资的期望成本,期望成本包括两阶段应急物资的采购成本、库存持有成本和可能的缺货成本. 忽略同类应急物资之间的替代关系,先分析关联关系对应急物资储备量决策的影响.

2.1 参数与假设

i 为应急物资下标, $i=0$ 表示响应期物资,

$i=1,\cdots,n$ 表示恢复期物资. 基于此，所使用的参数及其符号说明如下.

1)基本参数

p_i 应急物资 P_i 的单位采购价格；

h_i 应急物资 P_i 的单位库存持有成本；

T 应急物资 P_i 的库存持有时间，即应急物资 P_i 的储备期；

s_i 应急物资 P_i 的单位缺货成本；

D_i 应急物资 P_i 的外生需求，是个随机变量；

$f_i(D_i)$ 应急物资 P_i 外生需求的概率密度函数；

η_i 应急物资 P_i 的给定需求满足率.

2)决策变量

Q_i 应急物资 P_i 的储备量；

D_i' 应急物资 P_i 的实际需求；

$f_i'(D_i')$ 应急物资 P_i 实际需求的概率密度函数；

d_i 应急物资 P_i 的缺货量，$d_i=[D_i'-Q_i]^+=\max(D_i'-Q_i,0)$；

$g_i(d_0)$ 由响应期物资缺货产生的恢复期物资的内生需求，此时，$i=1,\cdots,n$.

为了保证所构建的模型符合实际情况且具有数学意义，进行如下假设

1)从社会角度定义应急物资的缺货成本，指灾害发生后，由于应急物资发生缺货情形所造成的人们精神和肉体上的痛苦、情绪上的波动等[21]；

2)假设应急物资的外生需求服从于参数为 $\lambda_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的指数分布，即

$$f_i(D_i)=\lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i D_i}\ (\lambda_i>0)$$

表示产生大量需求的大规模灾害发生概率较小，反之亦然[6]；

3)假设

$$g_i(d_0)=\alpha_i(1-\mathrm{e}^{-\beta_i d_0})(\beta_i>0)$$

$d_0=0$ 时 $g_i(d_0)=0$，$d_0\to+\infty$ 时 $g_i(d_0)\to\alpha_i$[6]. 其中 α_i 表示由响应期物资缺货产生的恢复期物资的最大内生需求. 由需求满足率约束可知，应急物资储备量下限 Q_i^L 满足不等式 $Q_i^L\geq\eta_i\alpha_i$. 通常，应急救援要求 η_i 较大，以体现以人为本的指导思想. 因此，不妨假设 $Q_i^L\geq\alpha_i$，既符合应急救援的实际情况，也便于模型的构建和求解；

4)假设 $D_i'=D_i+g_i(d_0)$，表示恢复期物资需求由外生需求和内生需求两部分构成；

5) D_i 之间相互独立.

由以上假设可以求得(见附录 1).

$$f_i'(D_i')=\begin{cases}\dfrac{\lambda_0\lambda_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 Q_0}}{\alpha_i\beta_i}\displaystyle\int_0^{D_i'}\left(1-\frac{g_i}{\alpha_i}\right)^{\frac{\lambda_0}{\beta_i}-1}\mathrm{e}^{\lambda_i g_i}\mathrm{d}g_i\,\mathrm{e}^{-\lambda_i D_i'},D_i'<\alpha_i\\[2ex]\dfrac{\lambda_0\lambda_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 Q_0}}{\alpha_i\beta_i}\displaystyle\int_0^{\alpha_i}\left(1-\frac{g_i}{\alpha_i}\right)^{\frac{\lambda_0}{\beta_i}-1}\mathrm{e}^{\lambda_i g_i}\mathrm{d}g_i\,\mathrm{e}^{-\lambda_i D_i'},D_i'\geq\alpha_i\end{cases}\tag{1}$$

2.2　模型构建

根据以上的参数和假设，给出响应期物资期望成本、恢复期物资期望成本和总期望成本.

响应期物资期望成本表达式为

$$T(Q_0)=p_0Q_0+h_0TQ_0+\mathrm{E}[s_0d_0]\tag{2}$$

其中第 1 项表示应急物资的采购成本；第 2 项表示应急物资的库存持有成本；第 3 项则是应急物资的缺货成本. 其中

$$\mathrm{E}[s_0d_0]=s_0\int_{Q_0}^{+\infty}(D_0-Q_0)f_0(D_0)\mathrm{d}D_0\tag{3}$$

同理，恢复期物资期望成本表达式为

$$T(Q_i)=\sum_{i=1}^{n}(p_iQ_i+h_iTQ_i+\mathrm{E}[s_id_i])\tag{4}$$

如果管理者忽略了两阶段应急物资之间的相关性，则有

$$\mathrm{E}[s_id_i]=s_i\int_{Q_0}^{+\infty}(D_i-Q_i)f_i(D_i)\mathrm{d}D_i\tag{5}$$

但是，由于关联关系的存在，理论上有

$$\mathrm{E}[s_id_i]=s_i\int_{Q_i}^{+\infty}(D_i'-Q_i)f_i'(D_i')\mathrm{d}D_i'\tag{6}$$

综上，两阶段应急物资的总期望成本表达式为

$$T(Q_0,Q_i)=T(Q_0)+T(Q_i)$$

考虑以下两种管理情形.

1)管理者(如民政局救灾处)以最小化单阶段应急物资的期望成本为目标进行决策.

对于响应期物资而言，有

$$\frac{\mathrm{d}T(Q_0)}{\mathrm{d}Q_0}=p_0+h_0T-s_0\mathrm{e}^{-\lambda_0 Q_0}$$

则有

$$\frac{d^2T(Q_0)}{dQ_0^2}=s_0\lambda_0 e^{-\lambda_0 Q_0}>0$$

显然，$T(Q_0)$ 对 Q_0 的二阶导数大于 0，存在最优的响应期物资储备量 Q_0^*，使得 $T(Q_0^*)=\min T(Q_0)$. 由 $T(Q_0)$ 对 Q_0 的一阶导数可知

$$Q_0^*=-\frac{\ln\left(\frac{p_0+h_0T}{s_0}\right)}{\lambda_0}$$

响应期物资需求满足率约束为

$$\int_0^{Q_0} f_0(D_0)\,dD_0\geqslant\eta_0$$

因此，Q_0 存在下限 $Q_0^L=-\frac{\ln(1-\eta_0)}{\lambda_0}$. 则响应期物资储备量决策如下

$$Q_0^D=\begin{cases}Q_0^L, Q_0^*\leqslant Q_0^L\\ Q_0^*, Q_0^*\geqslant Q_0^L\end{cases}\tag{7}$$

对于恢复期物资而言，如果管理者忽略了这种关联关系，当响应期物资发生缺货情形时，管理者仍然认为恢复期物资需求量为 $D_i(i=1,\cdots,n)$，则 $\hat{Q}_i^*=-\frac{\ln\left(\frac{p_i+h_iT}{s_i}\right)}{\lambda_i}$. 然而，此时的实际需求量 $D_i'\neq D_i$. 在两种情形下，恢复期物资会产生缺货成本：1）响应期物资不缺货，恢复期物资缺货，$D_i'=D_i$；2）响应期物资缺货，恢复期物资缺货，$D_i'=D_i+g_i(d_0)$. 因此，理论的恢复期物资期望成本表达式为

$$T(Q_i)=\sum_{i=1}^{n}(p_iQ_i+h_iTQ_i+s_iA)\tag{8}$$

$$A=\int_0^{Q_0}\int_{Q_i}^{+\infty}(D_i-Q_i)f_i(D_i)\,dD_if_0(D_0)\,dD_0+\int_{Q_0}^{+\infty}\int_{Q_i}^{+\infty}(D_i'-Q_i)f_i'(D_i')\,d\,D_i'f_0(D_0)\,dD_0$$

化简上式得

$$A=(1-e^{-\lambda_0Q_0})\frac{e^{-\lambda_iQ_i}}{\lambda_i}+e^{-\lambda_0Q_0}\int_{Q_i}^{+\infty}(D_i'-Q_i)f_i'(D_i')\,dD_i'$$

分析恢复期物资期望成本的性质，可以得

$$\frac{\partial T(Q_i)}{\partial Q_i}=p_i+h_iT+s_i\left[(e^{-\lambda_0Q_0}-1)e^{-\lambda_iQ_i}-e^{-\lambda_0Q_0}\int_{Q_i}^{+\infty}f_i'(D_i')\,dD_i'\right]$$

$$\frac{\partial^2T(Q_i)}{\partial Q_i^2}=s_i\left[(1-e^{-\lambda_0Q_0})\lambda_ie^{-\lambda_iQ_i}+e^{-\lambda_0Q_0}f_i'(Q_i)\right]>0$$

因此，$T(Q_i)$ 为凸函数，存在 Q_i^* 使得 $T(Q_i^*)=\min T(Q_i)$（如图 2 所示）. 由 $\frac{\partial^2T(Q_i)}{\partial Q_i^2}>0$ 可知，$\frac{\partial T(Q_i)}{\partial Q_i}$ 单调递增，且 $\frac{\partial T(Q_i^*)}{\partial Q_i^*}=0$（如图 3 所示）.

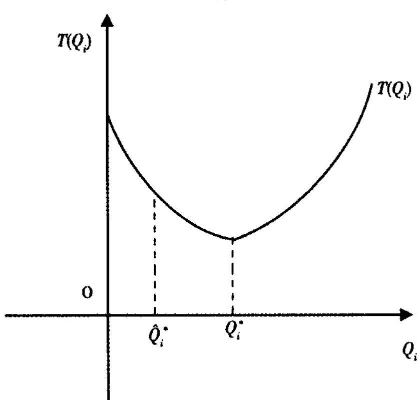

图 2 恢复期物资期望成本函数

Fig. 2 The cost function of recovery material

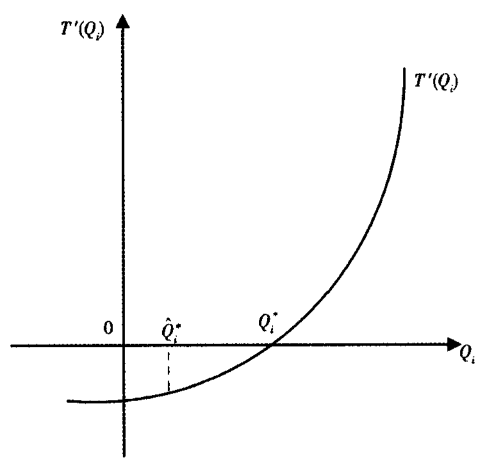

图 3 恢复期物资期望成本一阶导数

Fig. 3 The first derivative of the cost function of recovery material

Q_i^* 可以根据一阶条件 $\frac{\partial T(Q_i)}{\partial Q_i}=0$ 求得. 有

$$\frac{\partial T(Q_i)}{\partial Q_i}=p_i+h_iT-s_i\times\left(1-e^{-\lambda_0Q_0}+\frac{B_i}{\lambda_i}e^{-\lambda_0Q_0}\right)e^{-\lambda_iQ_i}$$

$$B_i = \frac{\lambda_0 \lambda_i^{\lambda_i \alpha_i} e^{-\lambda_0 Q_0}}{\beta_i (\lambda_i \alpha_i)^{\lambda_0 / \beta_i}} \gamma\left(\frac{\lambda_0}{\beta_i}, \lambda_i \alpha_i\right)$$

则

$$Q_i^* = -\frac{\ln\left[\dfrac{p_i + h_i T}{s_i\left(1 - e^{-\lambda_0 Q_0} + \dfrac{B_i e^{-\lambda_0 Q_0}}{\lambda_i}\right)}\right]}{\lambda_i}$$

恢复期物资需求满足率约束为

$$\int_0^{Q_0} \int_0^{Q_i} f_i(D_i) \mathrm{d}D_i f_0(D_0) \mathrm{d}D_0 + \int_{Q_0}^{+\infty} \left[\int_0^{\alpha_i} f_i(D_i') \mathrm{d}D_i' + \int_{\alpha_i}^{Q_i} f_i'(D_i') \mathrm{d}D_i'\right] \times f_0(D_0) \mathrm{d}D_0 \geqslant \eta_i$$

因此，Q_i 存在下限

$$Q_i^L = -\frac{\ln\left(\dfrac{1 - e^{-\lambda_0 Q_0} + \dfrac{\lambda_0 e^{-2\lambda_0 Q_0}}{\beta_i - \eta_i}}{1 - e^{-\lambda_0 Q_0} + \dfrac{B_i e^{-\lambda_0 Q_0}}{\lambda_i}}\right)}{\lambda_i}.$$（见附录2）

同理，恢复期物资储备量决策如下

$$Q_i^D = \begin{cases} Q_i^L, Q_i^* \leqslant Q_i^L \\ Q_i^*, Q_i^* \leqslant Q_i^L \end{cases} \tag{9}$$

将 $\hat{Q}_i^*$ 代入 $\dfrac{\partial T(Q_i)}{\partial Q_i}$ 的表达式，可以得

$$\frac{\partial T(\hat{Q}_i^*)}{\partial \hat{Q}_i^*} = p_i + h_i T + s_i\left[(e^{-\lambda_0 Q_0} - 1) e^{-\lambda_i \hat{Q}_i^*} - e^{-\lambda_0 Q_0} \int_{\hat{Q}_i^*}^{+\infty} f_i'(D_i') \mathrm{d}D_i'\right]$$

化简上式得

$$\frac{\partial T(\hat{Q}_i^*)}{\partial \hat{Q}_i^*} = (p_i + h_i T)\left(1 - \frac{B_i}{\lambda_i}\right) e^{-\lambda_0 Q_0}$$

通常，$\dfrac{B_i}{\lambda_i} > 1$. 因此，$T'(\hat{Q}_i^*) < 0$，从而得到结论 $\hat{Q}_i^* \leqslant Q_i^*$. 由图2可知，$T(Q_i^*) \leqslant T(\hat{Q}_i^*)$. 本研究认为由于管理者忽略了两阶段应急物资之间的相关性，错误地判断了恢复期物资的需求信息，增大了恢复期物资发生缺货情形的风险，从而产生了额外的缺货成本，造成了应急物资总期望成本增加.

2）管理者以最小化两阶段应急物资的总期望成本为目标进行决策. 在管理者考虑了两阶段应急物资之间相关性的基础上，讨论非关联决策和关联决策对应急物资储备量决策的影响.

已知响应期物资期望成本、恢复期物资期望成本和总期望成本的表达式，构建考虑关联关系的应急物资储备量决策模型如下

$$\min T(Q_0, Q_i) \tag{10}$$

$$\int_0^{Q_0} f_0(D_0) \mathrm{d}D_0 \geqslant \eta_0 \tag{11}$$

$$\int_0^{Q_0} \int_0^{Q_i} f_i(D_i) \mathrm{d}D_i f_0(D_0) \mathrm{d}D_0 + \int_{Q_0}^{+\infty} \left[\int_0^{\alpha_i} f_i'(D_i') \mathrm{d}D_i' + \int_{\alpha_i}^{Q_i} f_i'(D_i') \mathrm{d}D_i'\right] \times f_0(D_0) \mathrm{d}D_0 \geqslant \eta_i \tag{12}$$

整理得

$$\min T(Q_0, Q_i)$$

$$Q_0 \geqslant -\frac{\ln(1 - \eta_0)}{\lambda_0}$$

$$Q_i \geqslant -\frac{\ln \dfrac{1 - e^{-\lambda_0 Q_0} + \dfrac{\lambda_0 e^{-2\lambda_0 Q_0}}{\beta_i - \eta_i}}{1 - e^{-\lambda_0 Q_0} + \dfrac{B_i e^{-\lambda_0 Q_0}}{\lambda_i}}}{\lambda_i}$$

分析目标函数的性质可知 $\dfrac{\partial T^2(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0^2} > 0$，$\dfrac{\partial T^2(Q_0, Q_i)}{\partial Q_i^2} > 0$，$\dfrac{\partial T^2(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0 \partial Q_i} > 0$，且可证明 $T(Q_0, Q_i)$ 的海塞矩阵 $\nabla^2 T(Q_0, Q_i)$ 正定（见附录3）. 因此，该模型为凸规划，存在唯一的最优解 (Q_0^*, Q_i^*). 由 $\dfrac{\partial T^2(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0^2} > 0$ 可知，$T(Q_0, Q_i)$ 是 Q_0 的凸函数，同理，$T(Q_0, Q_i)$ 是 Q_i 的凸函数，因此，(Q_0^*, Q_i^*) 可由一阶条件联立解得.

由 $\dfrac{\partial T^2(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0^2} > 0$ 可知，$\dfrac{\partial T(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0}$ 是

Q_0 的单调增函数，当 $Q_0 = -\dfrac{\ln\left(\dfrac{p_0 + h_0 T}{s_0}\right)}{\lambda_0}$ 时，$\dfrac{\partial T(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0} < 0$. 因此，非关联决策的响应期物资储备量小于关联决策的响应期物资储备量. 本研究认为管理者进行关联决策时，认识到两阶段应急物资之间的内在联系，通过适当地增加响应期物资储备量，以减小恢复期物资发生缺货情形的风险.

由 $\dfrac{\partial T^2(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0 \partial Q_i} > 0$ 可知，$\dfrac{\partial T(Q_0, Q_i)}{\partial Q_0}$ 是 Q_i 的单调增函数（如图 4 所示），显然，Q_i^* 和 Q_0^* 反向变化.

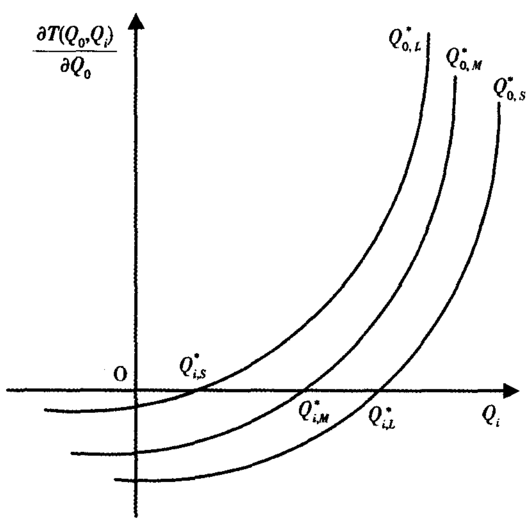

图 4　总期望成本对响应期物资的一阶导数

Fig. 4 The first partial derivative of total cost function versus recovery material

综上，关联决策的响应期物资储备量大于非关联决策的响应期物资储备量，而恢复期物资则相反. 本研究认为管理者可以通过两阶段应急物资储备量的调整和平衡，以实现更小的总期望成本.

3　考虑关联与替代关系的应急物资储备量决策模型

以恢复期物资为例，讨论应急物资之间的替代关系对其储备量决策的影响. 基于第 2 节构建的考虑关联关系的应急物资储备量决策模型，考虑部分、顺序和双向的替代关系，仍以在一定需求满足率约束下，最小化应急物资期望成本为目标建模，讨论模型解的特征，提出有效的求解算法.

3.1　模型构建

考虑恢复期物资集合 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, n 种应急物资之间存在部分、顺序和双向的替代性. 引入效用替代率[14]的概念，应急物资 P_i 满足需求 k 产生的效用为 $\pi_k(i)$，应急物资 P_j 满足需求 k 产生的效用为 $\pi_k(j)$，定义 $\beta_{ij} = \pi_k(i) / \pi_k(j)$ 为应急物资 P_i 对应急物资 P_j 的效用替代率. 显然，$\beta_{ij} = 0$ 意味着应急物资 P_i 、P_j 不能相互替代；$\beta_{ij} \in (0,1)$ 意味着就需求 k 而言，应急物资 P_i 的效果不如应急物资 P_j ；$\beta_{ij} = 1$ 意味着应急物资 P_i、P_j 可以完全地相互替代；$\beta_{ij} \in (1, +\infty)$ 则表示对于需求 k ，应急物资 P_i 效果更好.

分别写出响应期物资期望成本和恢复期物资期望成本.

响应期物资期望成本表达式为

$$T(Q_0) = p_0 Q_0 + h_0 T Q_0 + \mathrm{E}[s_0 d_0]$$

恢复期物资期望成本表达式为

$$T(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} (p_i Q_i + h_i T Q_i + \mathrm{E}[s_i d_i])$$

基于替代关系的定义，恢复期物资 P_i 缺货时，按 β_{ij} 从小到大的顺序寻求替代，即 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_{n-1}}$. 应急物资 P_{i_j} 在满足自身需求 D_{i_j} 后，才会用于满足应急物资 P_i 的剩余需求 $(D_i' - Q_i)$（如图 5 所示）.

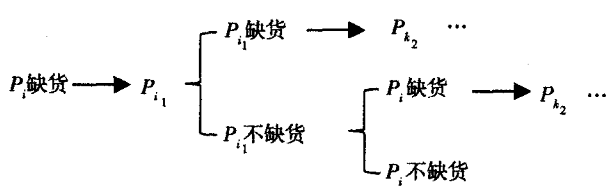

图 5　应急物资替代流程

Fig. 5 The alternative flow of emergency material

因此，构建恢复期物资期望成本表达式为

$$T(Q_i) = \sum_{i=1}^{n}\left\{p_iQ_i + h_iTQ_i + s_i\left[\int_0^{Q_0}\mathrm{E}_{n-1}f_0(D_0)\,\mathrm{d}D_0 + \int_{Q_0}^{+\infty}\mathrm{E}_{n-1}{}'f_0(D_0)\,\mathrm{d}D_0\right]\right\}$$

$$\mathrm{E}_j = \int_0^{Q_{ij}}\mathrm{E}_{j-1}f_{ij}(D_{ij})\,\mathrm{d}D_{ij} + \int_{Q_{ij}}^{+\infty}\mathrm{E}_{j-1}f_{ij}(D_{ij})\,\mathrm{d}D_{ij}(j = 1,\cdots,n)$$

$$\mathrm{E}_0 = \int_{Q_i+\sum_{t=1}^{j}\frac{(Q_{i_t}-D_{i_t})^+}{\beta_{ii_t}}}^{+\infty}\left\{D_i - \left[Q_i + \sum_{t=1}^{j}\frac{(Q_{i_t}-D_{i_t})^+}{\beta_{ii_t}}\right]\right\}f_i(D_i)\,\mathrm{d}D_i$$

$$\mathrm{E}_j' = \int_0^{Q_{ij}}\mathrm{E}_{j-1}'f_{ij}(D_{ij}')\,\mathrm{d}D_{ij}' + \int_{Q^{ij}}^{+\infty}\mathrm{E}_{j-1}'f_{ij}'(D_{ij}')\,\mathrm{d}D_{ij}'(j = 1,\cdots,n)$$

$$\mathrm{E}_0' = \int_{Q_i+\sum_{t=1}^{j}\frac{(Q_{i_t}-D_{i_t}')^+}{\beta_{ii_t}}}^{+\infty}\left\{D_i' - \left[Q_i + \sum_{t=1}^{j}\frac{(Q_{i_t}-D_{i_t}')^+}{\beta_{ii_t}}\right]\right\}f_i'(D_i')\,\mathrm{d}D_i'$$

综上，构建考虑关联与替代关系的应急物资储备量决策模型如下

$$\min T(Q_0,Q_i)$$

$$\int_0^{Q_0}f_0(D_0)\,\mathrm{d}D_0 \geqslant \eta_0$$

$$\int_0^{Q_0}\int_0^{Q_i}f_i(D_i)\,\mathrm{d}D_if_0(D_0)\,\mathrm{d}D_0 + \int_{Q_0}^{+\infty}\Big(\int_0^{\alpha_i}f_i'(D_i'\mathrm{d}D_i' + \int_{\alpha_i}^{Q_i}f_i'(D_i')\,\mathrm{d}D_i'\Big)f_0(D_0)\,\mathrm{d}D_0 \geqslant \eta_i$$

从模型的基本假设出发，给出以下结论.

1) $T(Q_0,Q_i)$ 是 Q_0 的凸函数

$$\frac{\partial T(Q_0,Q_i)}{\partial Q_0} = p_0 + h_0T - s_0\mathrm{e}^{-\lambda_0Q_0} + s_i(\mathrm{E}_{n-1}f_0(Q_0) - \mathrm{E}_{n-1}'f_0(Q_0)) = p_0 + h_0T - \mathrm{e}^{-\lambda_0Q_0}[s_0 + s_i\lambda_0(\mathrm{E}_{n-1}' - \mathrm{E}_{n-1})]$$

$$\frac{\partial T^2(Q_0,Q_i)}{\partial Q_0^2} = \lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0Q_0}\left[s_0 + s_i\lambda_0(\mathrm{E}_{n-1}' - \mathrm{E}_{n-1})\right] > 0$$

由$B_i > \lambda_i$ 可知$E_{n-1}' \geqslant E_{n-1}$. 因此，$T(Q_0,Q_i)$ 是 Q_0 的凸函数.

2) $T(Q_0,Q_i)$ 是 Q_i 的凸函数

同理，$\frac{\partial T^2(Q_0,Q_i)}{\partial Q_i^2} > 0$. 因此，$T(Q_0,Q_i)$ 是 Q_i 的凸函数.

3.2　模型求解

由于模型存在循环计算，当同类应急物资的种类较多时，难以通过解析方法进行求解. 就此情形，提出基于蒙特卡洛仿真的求解算法. 根据长期的应急救援经验，以及仓储容量、资金等的限制，确定应急物资的上限值. 具体流程如下(如图 6 所示)：

1)输入系统参数，初始化仿真系统；

2)给定 1 个应急物资储备量组合 (Q_0,Q_i)，随机产生需求，计算两阶段应急物资期望成本. 重复 T 次，找到最大的 $T(Q_0,Q_i)$；

3) 重复步骤 2)，直到遍历所有组合，找到最小的 $T(Q_0,Q_i)$；

4)结束仿真，输出最小的两阶段应急物资期望成本及其对应的应急物资储备量水平.

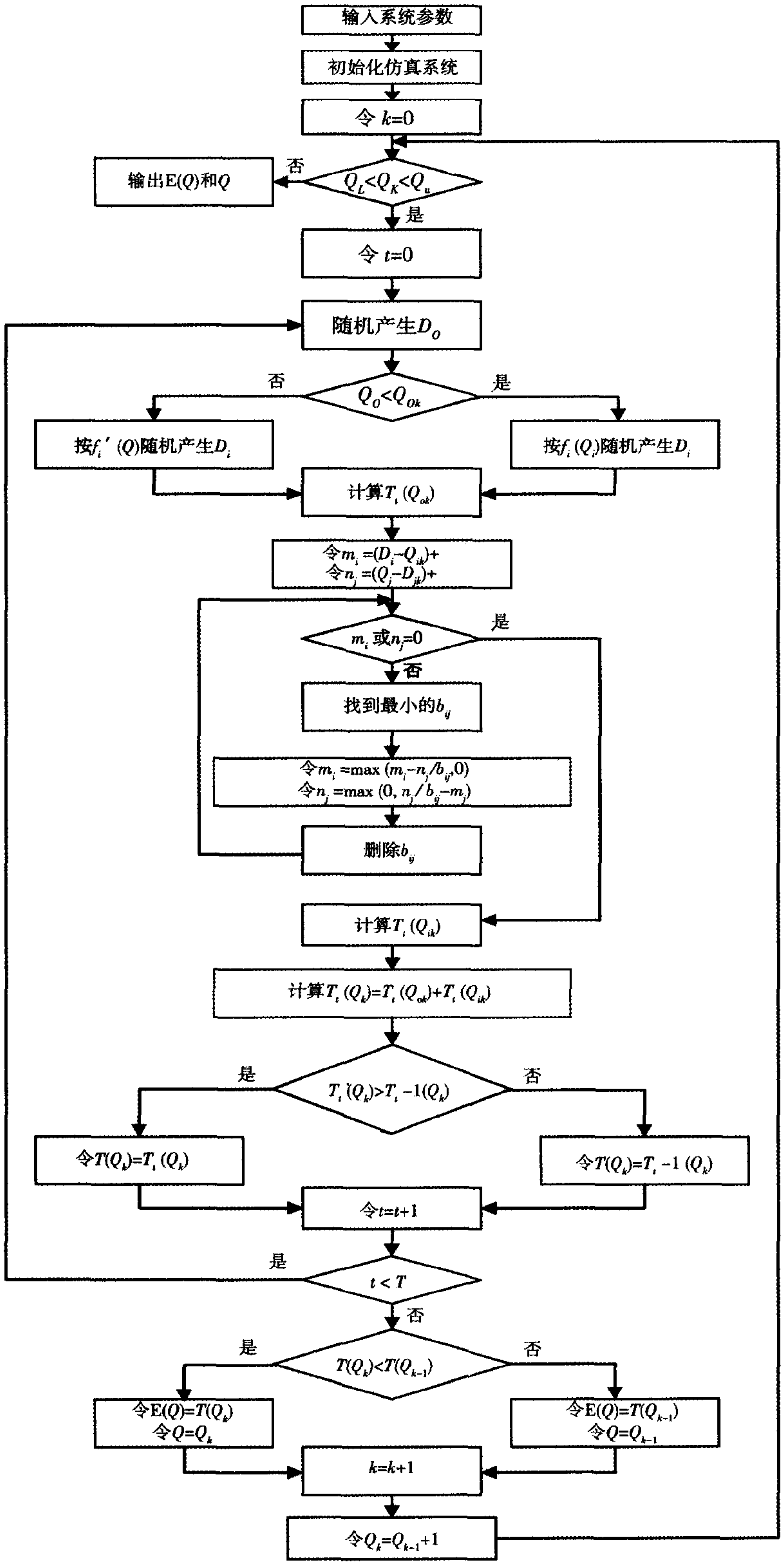

图 6 基于蒙特卡洛仿真的求解算法

Fig. 6 The solution algorithm based on Monte Carlo simulation

4 算例分析

以响应期物资消毒水、恢复期物资蒿甲醚、青蒿素和奎宁为例进行算例分析.其中,蒿甲醚用于凶险型疟疾的治疗,青蒿素用于间日疟的治疗,奎宁用于恶性疟的治疗.不失一般性,假设应急物资的持有成本约为采购价格的 10%,应急物资的平均库存时间为 3 年,缺货成本约为原价的 15 倍(缺货成本指的是为了弥补应急物资发生缺货情形所造成的负面影响而支付的成本).表 2 列出了算例的输入参数值.

仅考虑应急物资之间的相关性时,决策结果如表 3 所示.

表 2　输入参数值

Table 2 The input parameters

物资	名称	p_i	h_i	s_i	λ_i	η_i(%)	α_i	β_i
P_0	消毒水	60	6	900	0.003	85		
P_1	蒿甲醚	30	3	450	0.002	82	400	0.001
P_2	青蒿素	38	3.8	570	0.001 5	87	500	0.001 5
P_3	奎宁	54	5.4	810	0.001 8	88	450	0.001

表 3　考虑关联关系时的决策结果

Table 3 The decision-making result considering correlation

决策模式		非关联决策		关联决策	
物资	名称	Q_i^*	$T(Q_i^*)$	Q_i^*	$T(Q_i^*)$
P_0	消毒水	815	89 587.83	923	90 811.41
P_1	蒿甲醚	1 272	69 099.73	1 241	67 890.72
P_2	青蒿素	1 870	114 574.01	1 701	112 602.84
P_3	奎宁	1 410	138 013.35	1 377	135 677.83
总计			411 274.92		406 982.80

根据表 3,得出主要结论如下.

当不考虑应急物资之间的替代关系时,关联决策的消毒水储备量大于非关联决策时的消毒水储备量,其期望成本也随之增大;但是,蒿甲醚、青蒿素和奎宁的储备量在关联决策时小于非关联决策时,其期望成本也随之减小;关联决策时的两阶段应急物资总期望成本也要更优,与第 2 节解析分析的结果一致.本研究认为管理者在认识到两阶段应急物资需求量和储备量之间相关性的基础上,通过关联决策,尽可能地减小由响应期物资缺货带来的恢复期物资的缺货风险.在应急救援中,应急物资的缺货不仅会造成紧急订货的成本、应急救援不及时造成的经济损失,还会造成灾区的人心恐慌和社会舆论.

考虑应急物资之间的相关性和替代性时,应急物资之间替代程度如表 4 所示,决策结果如表 5 所示.

表 4　效用替代率

Table 4 The substitution rate of utility

物资及名称		P_1 蒿甲醚	P_2 青蒿素	P_3 奎宁
		β_{ij}		
P_1	蒿甲醚	1	3	3.5
P_2	青蒿素	2	1	2.5
P_3	奎宁	4	1.5	1

表 5　考虑关联和替代关系时的决策结果

Table 5 The decision-making result considering correlation and substitution

关联决策		不考虑替代性		考虑替代性	
物资	名称	Q_i^*	$T(Q_i^*)$	Q_i^*	$T(Q_i^*)$
P_0	消毒水	923	90 811.41	1 002	93 002.32
P_1	蒿甲醚	1 241	67 890.72	997	49 993.17
P_2	青蒿素	1 701	112 602.84	1 618	94 863.12
P_3	奎宁	1 377	135 677.83	1 194	98 434.38
总计			406 982.80		336 292.98

根据表 5,得出主要结论如下.

在管理者进行关联决策的基础上,考虑应急物资之间的替代关系时,消毒水的储备量有所增加,但蒿甲醚、青蒿素和奎宁的储备量,以及总期望成本都较小. 本研究认为由于恢复期物资在应急救援期间可以相互替代,替代行为降低了恢复期物资发生缺货情形的风险. 显然,即使某种应急物资在应急救援期间发生了缺货情形,也能够寻求其他同类的未缺货的应急物资加以替代,从而避免缺货成本的发生,这与日常的采购行为是一样的.

参数中,s_i 表示应急物资的单位缺货成本,α_i 表示由响应期物资缺货产生的恢复期物资的最大内生需求,β_i 表示响应期物资和恢复期物资之间的关联程度. 基于考虑关联与替代关系的应急物资储备量决策模型,对 3 个参数做敏感度分析.

1) 消毒水的单位缺货成本 s_0 .

由图 7 可知,随着 s_0 的增大,消毒水的储备量呈上升趋势. 由于消毒水的单位缺货成本增大,适当地增加储备量以避免缺货情形的发生是合理的. 由于消毒水的缺货风险减小,因此,恢复期物资的内生需求量会减少,其最优储备量也相应地减少,而总期望成本则呈现上升趋势.

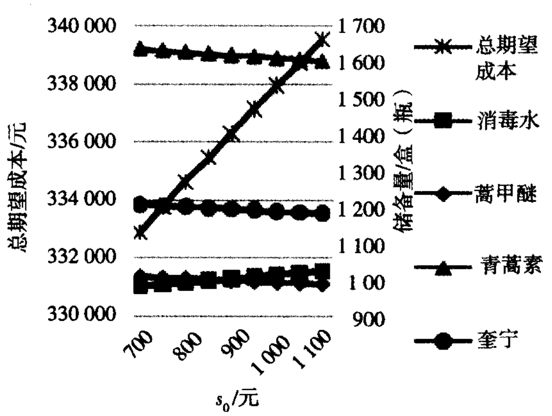

图 7　s_0 敏感性分析

Fig. 7 The sensitivity analysis of s_0

2) 蒿甲醚的单位缺货成本 s_1 .

由图 8 可知,随着 s_1 的增大,恢复期物资储备量都略有增加. 通过多储备蒿甲醚直接减小缺货风险,多储备青蒿素和奎宁利用替代性间接地减小缺货风险. 由于恢复期物资储备量的增加,缓解了响应期物资避免缺货的程度,因此,消毒水的储备量略有减少,而总期望成本则呈现上升趋势.

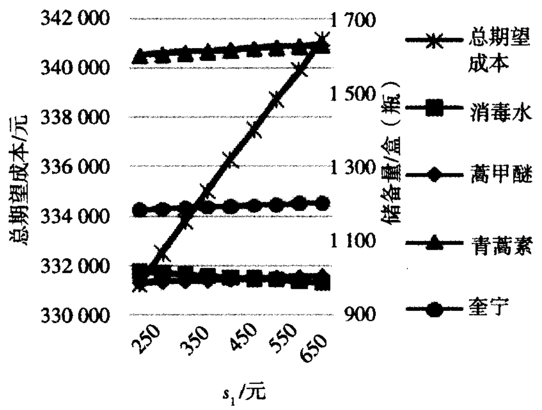

图 8　s_1 敏感性分析

Fig. 8 The sensitivity analysis of s_1

3) 蒿甲醚的最大内生需求 α_1、消毒水和蒿甲醚的关联程度 β_1 .

由图 9 和图 10 可知,随 α_1 或 β_1 增加,消毒水和蒿甲醚的储备量都有所减少,而青蒿素和奎宁的储备量则有所增加. α_1 或 β_1 增加意味着蒿甲醚的缺货风险增大,通过替代来避免蒿甲醚缺货在成本上优于增加消毒水或蒿甲醚的储备量. 本研究认为这有两方面的原因:一是消毒水的单位采购价格和单位库存持有成本较高;二是内生需求是确定性的,相比于外生需求,更容易分析和预测. 因此,利用替代性来避免缺货情形的发生具有成本上的优势,如图所示,两阶段应急物资的总期望成本呈现下降趋势.

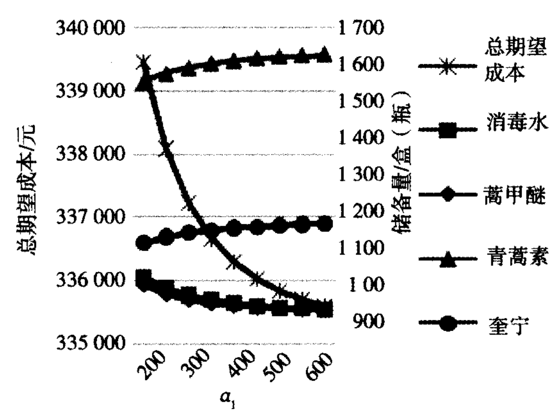

图 9　α_1 敏感性分析

Fig. 9 The sensitivity analysis of α_1

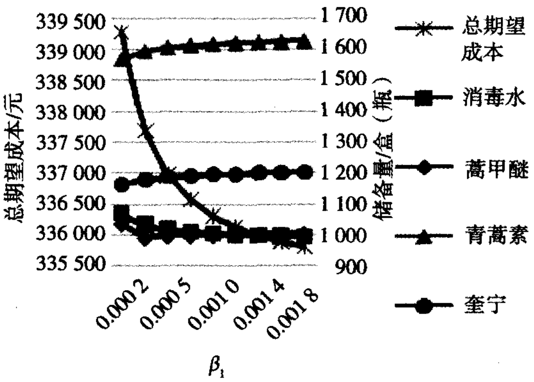

图 10　β_1 敏感性分析

Fig. 10 The sensitivity analysis of β_1

总之，通过利用应急物资之间的替代关系，可以减少应急物资的储备量，从而降低应急物资的采购和库存持有成本，同时尽可能地避免缺货情形的发生，降低了可能的缺货成本. 因此，在两阶段应急物资储备量决策中考虑替代关系，既能够降低库存管理的难度，也能够带来经济上的效益. 综上，管理者在决策时，应当充分考虑应急物资之间的相关性和替代性，形成合理有序的应急物资储备和管理机制，在保证应急救援要求的前提下，提高资金使用的效率和效果.

5　结束语

应急物资储备量决策影响着应急救援的效率和效果，确定合理的应急物资储备量，对于灾后快速有效的应急救援和恢复重建具有重要意义. 基于此背景，本研究完成了两阶段应急物资储备量决策中关联关系和替代关系的综合研究.

针对应急管理的响应和恢复阶段，将应急物资划分为响应期物资和恢复期物资两种类型；考虑两阶段应急物资储备量和需求量的内在联系，即响应期物资缺货量对恢复期物资需求量的影响，以期望成本最小化为目标，构建了考虑关联关系的应急物资储备量决策模型；引入了效用替代率的概念，考虑同类应急物资之间的替代关系，进一步完善了模型，设计了基于蒙特卡洛仿真的求解算法；最后，运用算例证明了模型的有效性，说明了在应急物资储备量决策中考虑关联关系和替代关系是必要的.

参 考 文 献：

[1]Mcloughlin D. A framework for integrated emergency management[J]. Public Administration Review, 1985, 45(4): 165 - 172.

[2]Whitin T M. The Theory of Inventory Management[M]. Princeton: Princeton University Press, 1953.

[3]Stalinski P. The single-period inventory placement problem for a serial supply chain under alternative objectives[D]. Cleveland: Operations Management and Business Statistics Department, Cleveland State University, 1998.

[4]卢继周，冯耕中，王能民，等. 信息共享下库存量牛鞭效应的影响因素研究[J]. 管理科学学报，2017，20(3)：136 - 147.

Lu Jizhou, Feng Gengzhong, Wang Nengmin, et al. Factors affecting bullwhip effect of inventory under information sharing [J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(3): 136 - 147. (in Chinese)

[5]Barbarosoglu G, Arda Y. A two-stage stochastic programming framework for transportation planning in disaster response[J]. Journal of the Operational Research Society, 2004, 55(1): 43 - 53.

[6]Qin J C, Xing Y T, Wang S, et al. An inter-temporal resource emergency management model[J]. Computers and Operations Research, 2012, 39(8): 1909 - 1918.

[7]葛洪磊，刘　南. 复杂灾害情景下应急资源配置的随机规划模型[J]. 系统工程理论与实践，2014，34(12)：3034 - 3042.

Ge Honglei, Liu Nan. A stochastic programming model for relief resources allocation problem based on complex disaster scenarios[J]. System Engineering: Theory & Practice, 2014, 34(12): 3034 - 3042. (in Chinese)

[8]刘长石，寇　纲，刘导波. 震后应急物资多方式供应的模糊动态 LRP[J]. 管理科学学报，2016，19(10)：61 - 72.

Liu Changshi, Kou Gang, Liu Daobo. Fuzzy dynamic LRP for post-earthquake multimodal relief delivery[J]. Journal of

Management Sciences in China, 2016, 19(10): 61 - 72. (in Chinese)
[9] Ekin T, Polson N G, Soyer R. Augmented Markov chain Monte Carlo simulation for two-stage stochastic programs with recourse[J]. Decision Analysis, 2014, 11(4): 250 - 264.
[10] Kim K, Mehrotra S. A two-stage stochastic integer programming approach to integrated staffing and scheduling with application to nurse management[J]. Operations Research, 2015, 63(6): 1431 - 1451.
[11] Smith S A, Agrawal N. Management of multi-item retail inventory systems with demand substitution[J]. Operations Research, 2000, 48(1): 50 - 64.
[12] Dutta P, Chakraborty D. A study on linking upward and substitution and fuzzy demands in the newsboy-type problem[J]. International Journal of Mathematics Sciences, 2007, 1(4): 263 - 268.
[13] Deniz B, Karaesmen I, Scheller-wolf A. Managing perishables with substitution: Inventory issuance and replenishment heuristics[J]. Manufacturing and Service Operations Management, 2010, 12(2): 319 - 329.
[14] 徐寅峰, 张敏娇, 余海燕, 等. 基于效用替代率的物资储备量模型与算法[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(2): 270 - 275.
Xu Yinfeng, Zhang Minjiao, Yu Haiyan, et al. Model and algorithm of materials inventory based on substitution rate[J]. System Engineering: Theory & Practice, 2011, 31(2): 270 - 275. (in Chinese)
[15] Tan B, Karabati S. Retail inventory management with stock-out based dynamic demand substitution[J]. International Journal of Production Economics, 2013, 145(1): 78 - 87.
[16] Chen X, Feng Y Y, Keblis M F, et al. Optimal inventory policy for two substitutable products with customer service objectives[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 246(1): 76 - 85.
[17] 汪传旭, 许长延. 两级供应链中短生命周期产品应急转运策略[J]. 管理科学学报, 2015, 18(9): 61 - 71.
Wang Chuanxu, Xu Changyan. Emergency transshipment policy for short life cycle product in a two stage supply chain[J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(9): 61 - 71. (in Chinese)
[18] Maddan B, Kharbeche M, Pokharel S, et al. Joint replenishment model for multiple products with substitution[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(17/18): 7678 - 7688.
[19] Lee J, Gaur V, Muthulingam S, et al. Stockout-based substitution and inventory planning in textbook retailing[J]. Manufacturing and Service Operations Management, 2016, 18(1): 104 - 121.
[20] Deflem Y, Nieuwenhuyse I V. Managing inventories with one-way substitution: A newsvendor analysis[J]. European Journal of Operation Research, 2013, 228(3): 484 - 493.
[21] Huang K, Jiang Y P, Yuan Y F, et al. Modeling multiple humanitarian objectives in emergency response to large-scale disasters[J]. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2015, 75(3): 1 - 17.

Decision-making model for emergency material reserve considering correlation and substitution

LIN Qi[1,2], *ZHAO Qiu-hong*[1,3*], *NI Dong-mei*[4,5]

1. School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China;
2. Beijing Key Laboratory of Emergency Support Simulation Technologies for City Operations, Beijing 100191, China;
3. Beijing International Science and Technology Cooperation Base for City Safety Operation and Emergency Support, Beijing 100191, China;
4. School of Economics and Management, Beijing University of Agriculture, Beijing 102206, China;
5. Beijing Research Center for New Rural Construction, Beijing 102206, China

Abstract: The decision making of emergency material reserves is one of the key topics in emergency management, which needs to balance the people-oriented demand with the economical request. Based on the two-stage characteristic of emergency rescue, emergency material is divided into response material and recovery material. The demand of recovery material partly depends on the shortage of response material. A decision-making model is proposed considering this correlation. Then the properties of the optimal solution are analyzed. Furthermore, taking the substitution among recovery materials into account, the model is further improved. An algorithm is applied to solve it based on Monte Carlo simulation. Finally, numerical examples are provided to illustrate the influence and significance of correlation and substitution on decision making of emergency material reserves.

Key words: emergency material; correlation; substitution; reserve decision-making

附录1:

根据 $d_i = [D_i' - Q_i]^+$ 和 $g_i(d_0) = \alpha_i(1 - e^{-\beta_i d_0})(\beta_i > 0)$，可得

$$f(g_i) = \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0 Q_0}}{\alpha_i \beta_i}(1 - \frac{g_i}{\alpha_i})^{\frac{\lambda_0}{\beta_i}-1}$$

又已知 $f_i(D_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i D_i}(\lambda_i > 0)$，根据独立连续随机变量的联合概率密度公式，可得 $f_i'(D_i')$ 的表达式.

附录2:

恢复期物资储备量决策的需求满足率约束为

$$\int_0^{Q_0}\int_0^{Q_i} f_i(D_i)\,dD_i f_0(D_0)\,dD_0 + \int_{Q_0}^{+\infty}\Big[\int_0^{\alpha_i} f_i'(D_i')\,dD_i' + \int_{\alpha_i}^{Q_i} f_i'(D_i')\,dD_i'\Big] f_0(D_0)\,dD_0 \geq \eta_i$$

化简上式得

$$(1 - e^{-\lambda_0 Q_0})(1 - e^{-\lambda_i Q_i}) + e^{-\lambda_0 Q_0}\Big[\int_0^{\alpha_i} f_i'(D_i')\,dD_i' + \frac{A}{\lambda i}(e^{-\lambda_i \alpha_i} - e^{-\lambda_i Q_i})\Big] \geq \eta_i$$

其中 $\int_0^{\alpha_i} f_i(D_i')\,d D_i' = \int_0^{\alpha_i}\frac{\lambda_0\lambda_i e^{-\lambda_0 Q_0}}{\alpha_i\beta_i}\int_0^{D_i'}(1 - \frac{g_i}{\alpha_i})^{\frac{\lambda_0}{\beta_i}-1} e^{\lambda_i g_i}\,d g_i\, e^{-\lambda_i D_i'}\,d D_i'$.

调整积分顺序，可得

$$\int_0^{\alpha_i} f_i'(D_i')\,dD_i' = \int_0^{\alpha_i}\frac{\lambda_0\lambda_i e^{-\lambda_0 Q_0}}{\alpha_i\beta_i}\int_{g_i}^{\alpha_i}(1 - \frac{g_i}{\alpha_i})^{\frac{\lambda_0}{\beta_i}-1} e^{\lambda_i g_i} e^{-\lambda_i D_i'}\,dD_i'\,dg_i = \frac{\lambda_0 e^{-\lambda_0 Q_0}}{\beta_i}\left(1 - \frac{\gamma(\frac{\lambda_0}{\beta_i},\lambda_i\alpha_i)}{(\lambda_i\alpha_i)^{\lambda_0/\beta_i}}\right)$$

求解以上不等式，可得

$$Q_i^L = -\frac{\ln\left(\dfrac{1 - e^{-\lambda_0 Q_0} + \dfrac{\lambda_0 e^{-2\lambda_0 Q_0}}{\beta_i - \eta_i}}{1 - e^{-\lambda_0 Q_0} + \dfrac{B_i e^{-\lambda_0 Q_0}}{\lambda_i}}\right)}{\lambda_i}$$

附录3:

由

$$\frac{\partial T(Q_0,Q_i)}{\partial Q_0} = p_0 + h_0 T - s_0 e^{-\lambda_0 Q_0} + \sum_{i=1}^{n} s_i\lambda_0 e^{-\lambda_0 Q_0}(1 - 2\frac{B_i}{\lambda_i})\frac{e^{-\lambda_i Q_i}}{\lambda_i}$$

$$\frac{\partial T^2(Q_0,Q_i)}{\partial Q_0^2} = \lambda_0 s_0 e^{-\lambda_0 Q_0} + \sum_{i=1}^{n} s_i\lambda_0^2\frac{e^{-\lambda_0 Q_0}e^{-\lambda_i Q_i}}{\lambda_i}(4\frac{B_i}{\lambda_i} - 1) > 0$$

$$\frac{\partial T(Q_0,Q_i)}{\partial Q_i} = p_i + h_i T + s_i(e^{-\lambda_0 Q_0} - 1 - e^{-\lambda_0 Q_0}\frac{B_i}{\lambda_i})e^{-\lambda_i Q_i}$$

$$\frac{\partial T^2(Q_0,Q_i)}{\partial Q_i^2} = s_i\lambda_i e^{-\lambda_i Q_i}\Big[1 + e^{-\lambda_0 Q_0}(\frac{B_i}{\lambda_i} - 1)\Big] > 0$$

$$\frac{\partial T^2(Q_0,Q_i)}{\partial Q_0 \partial Q_i} = \frac{\partial T^2(Q_0,Q_i)}{\partial Q_i \partial Q_0} = s_i\lambda_0 e^{-\lambda_0 Q_0} e^{-\lambda_i Q_i}(2\frac{B_i}{\lambda_i} - 1) > 0$$

$$\frac{\partial T^2(Q_0,Q_i)}{\partial Q_i \partial Q_j} = 0(i \neq j)$$

则 $T(Q_0,Q_i)$ 的海塞矩阵 $\nabla T^2(Q_0,Q_i)$ 及其 $(i+1)(i=0,1,\cdots,n)$ 阶顺序主子式 D_{i+1} 为

$$\nabla T^2(Q_0,Q_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^2}{\partial {Q_0}^2} & \cdots & \frac{\partial T^2}{\partial Q_0 \partial Q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T^2}{\partial Q_n \partial Q_0} & \cdots & \frac{\partial T^2}{\partial {Q_n}^2} \end{bmatrix}, D_{i+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial T^2}{\partial {Q_0}^2} & \cdots & \frac{\partial T^2}{\partial Q_0 \partial Q_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T^2}{\partial Q_i \partial Q_0} & \cdots & \frac{\partial T^2}{\partial {Q_i}^2} \end{vmatrix}$$

显然,这个行列式除去第 1 行、第 1 列和主对角线外,其余元素都为零,利用行列式的性质求得

$$D_{i+1} = \prod_{j=1}^{i} \frac{\partial T^2}{\partial {Q_j}^2}\left(\frac{\partial T^2}{\partial {Q_0}^2} - \sum_{k=1}^{i} \frac{\frac{\partial T^2}{\partial Q_0 \partial Q_k}\frac{\partial T^2}{\partial Q_i \partial Q_k}}{\frac{\partial T^2}{\partial {Q_k}^2}}\right) = \prod_{j=1}^{i} \frac{\partial T^2}{\partial {Q_j}^2}\left(\frac{\partial T^2}{\partial {Q_0}^2} - \sum_{k=1}^{i} \frac{\left(\frac{\partial T^2}{\partial Q_0 \partial Q_k}\right)^2}{\frac{\partial T^2}{\partial {Q_k}^2}}\right)$$

要证明 $D_{i+1} \geqslant 0$,就是要证明 $\left(\frac{\partial T^2}{\partial {Q_0}^2} - \sum_{k=i}^{i} \frac{\left(\frac{\partial T^2}{\partial Q_0 \partial Q_k}\right)^2}{\frac{\partial T^2}{\partial {Q_k}^2}}\right) \geqslant 0$,即

$$\lambda_0 s_0 e^{-\lambda_0 Q_0} + \sum_{i=1}^{n} s_i \lambda_0^2 \frac{e^{-\lambda_0 Q_0} e^{-\lambda_i Q_i}}{\lambda_i}\left(4\frac{B_i}{\lambda_i} - 1\right) - \sum_{k=1}^{i} \frac{\left[s_k\lambda_0 e^{-\lambda_0 Q_0} e^{-\lambda_k Q_k}\left(2\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)\right]^2}{s_k\lambda_k e^{-\lambda_k Q_k}\left[1 + e^{-\lambda_0 Q_0}\left(\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)\right]} \geqslant 0$$

该不等式等同于

$$\sum_{k=1}^{i} s_k \lambda_0^2 \frac{e^{-\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}}{\lambda_k}\left(4\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right) \frac{s_k^2\ \lambda_0^2\ e^{-2\lambda_0 Q_0}\ e^{-2\lambda_k Q_k}\left(2\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)^2}{s_k\ \lambda_k e^{-\lambda_k Q_k}\left[1 + e^{-\lambda_0 Q_0}\left(\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)\right]} \geqslant 0$$

化简上式得

$$\sum_{k=1}^{i} s_k \lambda_0^2 \frac{e^{-\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}}{\lambda_k}\left(4\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right) - \frac{s_k\ \lambda_0^2\ e^{-2\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}\left(2\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)^2}{\lambda_k\left[1 + e^{-\lambda_0 Q_0}\left(\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)\right]} \geqslant 0$$

缩小不等式左侧得

$$\sum_{k=1}^{i} s_k \lambda_0^2 \frac{e^{-\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}}{\lambda_k}\left(4\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right) - \frac{s_k\ \lambda_0^2\ e^{-2\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}\left(2\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)^2}{\lambda_k\left[e^{-\lambda_0 Q_0} + e^{-\lambda_0 Q_0}\left(\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)\right]}$$

$$= \sum_{k=1}^{i} s_k \lambda_0^2 \frac{e^{-\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}}{\lambda_k}\left(4\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right) - \frac{s_k\ \lambda_0^2\ e^{-\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}\left(2\frac{B_k}{\lambda_k} - 1\right)^2}{B_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{i} s_k\ \lambda_0^2\ e^{-\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}\left(\frac{3}{\lambda_k} - \frac{1}{B_k}\right) = \sum_{k=1}^{i} s_k\ \lambda_0^2\ e^{-\lambda_0 Q_0}\ e^{-\lambda_k Q_k}\left(\frac{3\frac{B_k}{\lambda_k} - 1}{B_k}\right) \geqslant 0$$

因此, $D_{i+1} \geqslant 0$. 由正定矩阵的充要条件可知,海塞矩阵为正定矩阵.