

# 随机环境下的多投入多产出生产前沿面估计<sup>①</sup>

谢建辉<sup>1</sup>, 李勇军<sup>2</sup>, 梁 樑<sup>2</sup>, 吴 记<sup>3\*</sup>

(1. 中山大学岭南学院, 广州 510275; 2. 中国科学技术大学管理学院, 合肥 230026;  
3. 中山大学管理学院, 广州 510275)

摘要: 传统的 DEA 模型假设观测样本的投入产出都是确定型数据, 这使得 DEA 在实际应用中受到限制. 本文提出的基于拟似然估计的多投入多产出随机非参数包络数据( PLE-StoNED) 方法拓展了这个假设, 能够估计随机环境下的生产前沿面. 本文证明, 生产可能集假设条件下的前沿面可以用一个有凹凸性和单调性限制的函数来表示. 相较之前的 StoNED 方法, 本文提出的方法可以估计随机环境下多投入多产出决策单元( DMU) 的前沿面. 通过 Monte Carlo 实验, 多投入多产出 PLE-StoNED 方法的有效性得到验证, 它可纠正 DEA 等传统方法产生的偏误. 最后, 实证研究部分运用这一新提出的方法估计了中国大陆商业银行的生产前沿面和效率. 本文提出的方法弥补了 DEA 缺乏统计性的不足, 可为决策者在随机环境下对多投入多产出决策单元进行生产力和效率评估提供决策参考.

关键词: 生产力和效率评估; 前沿面估计; 数据包络分析( DEA); 随机非参数包络数据( StoNED)

中图分类号: C934 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2018)11-0050-11

## 0 引 言

数据包络分析( DEA) 是一种对多投入多产出型实体进行生产力和效率评估的非参数方法. DEA 的概念最早是由 Charnes 等<sup>[1]</sup>提出来的, 而评估投入产出类型相似企业相对效率的框架则是由 Farrell 最早搭建<sup>[2]</sup>. 基于凸性和单调性假设, 构建观测样本点的包络前沿面, 并将这些观测点投影到所构建的前沿面, 而后通过测算观测点同前沿面的相对距离来衡量观测点的表现, 是 DEA 及其拓展的核心思想. 经过三十年的发展, DEA 及其拓展模型<sup>[3,4,5]</sup> 已经被广泛应用到技术创新效率评估<sup>[6,7]</sup>、学术期刊评估<sup>[8]</sup>、电子商务<sup>[9]</sup>、产能利用率<sup>[10]</sup> 和银行效率评估<sup>[11]</sup> 等领域. 然而, DEA 受到质疑的

一点是, 正如 Schmidt 所述<sup>[12]</sup>, DEA 缺乏统计特性, 噪音或者随机错误在模型中被忽略. 为了回应 Schmidt, Banker 通过极大似然估计将 DEA 联系到对一个单调递增凹函数的非参数估计, 还证明 DEA 估计具有一致性<sup>[13]</sup>. 然而, Banker 依然在估计中引入随机噪音, 而是将观测点与前沿面之间的残差全部归入了非有效部分, 这导致了 DEA 估计的向上偏误. Allon 等<sup>[14]</sup> 同样通过极大似然估计对凹函数进行估计, 但仍然没有将随机错误考虑进来. Banker 和 Maindiratta<sup>[15]</sup> 同时考虑了非有效部分和随机错误, 但需要求解一个非线性非凸规划. 本文在 Banker 和 Maindiratta 模型的基础之上, 将非有效部分和随机错误都集中在一个指标, 建立基于拟似然估计的易于求解的多投入多产出随机非参数包络数

① 收稿日期: 2016-09-18; 修订日期: 2018-07-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目( 71701220; 71671172; 71601190); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目( 17wkpy45; 17wkpy19).

通讯作者: 吴 记( 1988—), 男, 浙江金华人, 博士, 副教授, Email: wuji3@mail.sysu.edu.cn

据( PLE-StoNED) 方法.

随机非参数数据包络( StoNED) 方法是 Kuosmanen 等提出的一种前沿面估计方法<sup>[16,17,18]</sup>, 它是 DEA 与随机前沿面分析( SFA) 的结合. StoNED 与 DEA 相比, 两者均是非参数方法, 优势是 StoNED 具有统计性. StoNED 与 SFA 相比, 两者均考虑了随机因素对前沿面的影响, 优势则是不需要像后者一样需要假定特定的函数形式. StoNED 方法在第一步需要运用一个最小二乘法估计, 第二步将得到的综合误差项分解到非有效部分和随机错误. 而第二步的分解方法又有三种, 分别是: 矩估计, 拟似然估计和非参数核密度估计<sup>[18]</sup>. 其中, 矩估计方法在利用第二、三阶矩进行代换的时候可能会出现估计出的方差为负值的情况<sup>[16]</sup>; 拟似然估计方法需要预先假设随机错误服从正态分布, 非有效部分服从半正态分布, 其优势是估计具有一致性并且不会产生类似矩估计的奇异结果; 非参数核密度估计方法不需要预先假设非有效部分和随机错误的分布形式, 然而正如 Hall 和 Simar 所述<sup>[19]</sup>, 它不适用于随机错误的方差相对较大的情况, 并且当随机错误的方差不趋近于零时, 该估计不具有—致性. 基于三种分解方法的优劣性, 本文选取拟似然估计方法来分解最小二乘估计所估计出的综合误差, 其原因有: 1) 本文的研究目的是提出随机环境下的多投入多产出前沿面估计, 在随机前沿面分析的文献中, 非有效部分服从半正态分布和随机错误服从正态分布是经典而普遍的假设<sup>[20,21]</sup>; 2) Hall 和 Simar<sup>[19]</sup> 所讨论的非参数核密度估计方法可以估计出非有效部分的整体期望, 但在估计每个样本的非有效部分时, 仍然需要分别预先假定非有效部分和随机错误的分布形式; 3) 在实际应用中, 随着样本量的增大, 随机错误的方差往往不趋于零.

传统 DEA 模型通常需要假设所有的投入产出都是确定型的数据. 指标中的一部分包含非有效部分, 如果这部分指标是产出, 则模型为产出导向型, 如果这部分数据是投入, 则模型为投入导向型. 对于—组特定的观测样本, DEA 的最小包络前沿面是确定的, 只需将包含非有效部分的数据投影到前沿面, 便可得到效率值. 值得注意的是, 对于多个指标含有非有效部分的情况, 投影方向的不同, 也会带来最后求得的效率值的变化. 考虑

到计算的可处理性, 本文假设有一个指标同时存在非有效部分和随机错误, 其他指标则两者都不存在. 跟随 Aigner 等<sup>[20]</sup> 和 Jondrow 等<sup>[21]</sup>, 假设非有效部分服从半正态分布, 随机错误则服从正态分布, 便可建立 PLE-StoNED 模型.

## 1 多投入多产出生产前沿面

考虑一个生产过程, 将  $m$  个投入  $x \in \mathfrak{R}_+^m$  转化成  $s$  个产出  $y \in \mathfrak{R}_+^s$ , 可以得到一个生产可能集:  $T = \{ (x, y) \mid \text{投入 } x \geq 0 \text{ 可能生产出 } y \geq 0 \}$ .

假设  $n$  个观测生产单元都拥有类似的生产过程, 其投入产出分别为  $(x_j, y_j), j = 1, \dots, n$ . 那么由  $(x_j, y_j)$  组成的集合  $T = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \}$  被称为参考集, 其中  $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ ,  $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})$ . Shephard<sup>[22]</sup> 和 Banker 等<sup>[23]</sup> 将下面四个公理性假设引入到生产可能集.

**假设 1** 生产可能集  $T$  是一个凸集. 对于集合  $T$  中任意两点  $(x, y)$  与  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , 给定一个  $\lambda \in [0, 1]$ , 有  $\lambda^* (x, y) + (1 - \lambda) (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$ .

**假设 2** 非有效性. 如果  $(x, y) \in T$  且  $\tilde{x} \geq x$ , 那么  $(\tilde{x}, y) \in T$ ; 如果  $(x, y) \in T$  且  $\tilde{y} \leq y$ , 那么  $(x, \tilde{y}) \in T$ .

**假设 3** 锥性. 如果  $(x, y) \in T$ , 那么对于任意的  $k \geq 0$ , 有  $k^* (x, y) \in T$ .

**假设 4** 最小性. 设定  $(x_j, y_j) \in \tilde{T}, \forall j = 1, \dots, n$ ,  $T$  是所以满足上述假设 1、假设 2、假设 3 的集合  $\tilde{T}$  的交集.

只满足假设 1、假设 2、假设 4 的集合是规模收益不变生产可能集, 其可被公式化为

$$T = \{ (x, y) \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y \}$$

而满足所有上述四个假设的集合则是规模收益可变生产可能集, 其可以表述为

$$T = \{ (x, y) \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \}$$

在观测样本确定的情况下, 由于假设 4 的存在, 基于样本建立起来的生产可能集是唯一的, 包络生产可能集的最小前沿面也是确定的. 另一方

面,由于观测样本大小是有限的,假设 4 也导致了前沿面的向内偏误<sup>[24]</sup>.

设定观测样本  $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$  和  $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})$  中某个投入或者产出指标中包含随机错误并将这个随机的指标标记为  $\xi_j$ . 为方便编辑,下文将  $\xi_j$  之外的投入产出重新标记为  $x_j$  和  $y_j$ , 观测样本数据的数学表达重新编辑为  $(x_j, y_j, \xi_j) j = 1, \dots, n$ .

引入表达式  $\xi_j = \hat{\xi}_j + \varepsilon_j, \forall j = 1, \dots, n$  其中  $\hat{\xi}_j$  表示前沿面上的真实值,  $\varepsilon_j$  表示观测点与真实值之间的偏差. 引入  $u_j$  与  $v_j$  分别表示非有效部分和噪音, 观测值与真实值之间偏差的数学表达式  $\varepsilon_j = v_j \pm u_j$ . 其中  $u_j \geq 0, v_j \sim N(0, \sigma_v^2), \forall j = 1, \dots, n$ . 当  $\xi_j$  表示一个投入时,  $\varepsilon_j = v_j + u_j$ . 反之, 当  $\xi_j$  表示一个产出时,  $\varepsilon_j = v_j - u_j$ .

正如前面所述,  $\xi_j$  作为一个带有随机错误和非有效部分的投入或者产出, 其真实值  $\hat{\xi}_j$  是在生产可能集  $T$  的前沿面上. 因此, 如果  $\hat{\xi}_j$  是一个产出,  $T$  的前沿面模型可以表示为

$$\hat{\xi}_k = \left\{ \max_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x_k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\} \quad (1)$$

其中  $\xi_k = \hat{\xi}_k + \varepsilon_k, k$  表示第  $k$  个样本观测点. 如果  $\hat{\xi}_j$  是一个投入, 其前沿面模型为

$$\hat{\xi}_k = \left\{ \min_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x_k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\} \quad (2)$$

其中  $\xi_k = \hat{\xi}_k - \varepsilon_k$ .

定理 1 定义一个凹函数  $g_1(x, y)$ , 且  $g_1$  随着  $x$  单调不减, 随着  $y$  单调不减, 那么模型 (1)

等于

$$\xi_k = g_1(x_k, y_k) + \varepsilon_k, \forall k = 1, \dots, n \quad (3)$$

定义一个凸函数  $g_2(x, y)$ , 且  $g_1$  随着  $x$  单调不减, 随着  $y$  单调不减, 那么模型 (2) 等于

$$\xi_k = g_1(x_k, y_k) - \varepsilon_k, \forall k = 1, \dots, n \quad (4)$$

定理 1 的证明见附录.

模型 (1) 的对偶模型为

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_k &= \min_{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k} \alpha_k + \beta_k x_k - \gamma_k y_k \\ \text{s. t. } &\alpha_k + \beta_k x_j - \gamma_k y_j \geq \hat{\xi}_j \\ &\beta_k, \gamma_k \geq 0 \\ &j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

与之对应, 模型 (2) 的对偶模型为

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_k &= \max_{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k} \alpha_k + \beta_k x_k - \gamma_k y_k \\ \text{s. t. } &\alpha_k + \beta_k x_j - \gamma_k y_j \leq \hat{\xi}_j \\ &\beta_k, \gamma_k \geq 0 \\ &j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

令  $\hat{\xi}_k = \alpha_k + \beta_k x_k - \gamma_k y_k$ , 并且将模型 (5) 的不等式约束条件的左右两边同时减去  $\hat{\xi}_k$ , 可得

$$\beta_k(x_j - x_k) - \gamma_k(y_j - y_k) \geq \hat{\xi}_j - \hat{\xi}_k \quad (7)$$

同理, 通过类似的代换可得模型 (6) 相当于不等式

$$\beta_k(x_j - x_k) - \gamma_k(y_j - y_k) \leq \hat{\xi}_j - \hat{\xi}_k \quad (8)$$

## 2 多投入多产出 PLE-StoNED 估计方法

上文假设对于任意样本观测点  $j$ , 其通过  $(\xi_j, 0, 0)$  方向投影到前沿面之间的误差项  $\varepsilon_j$  不仅包含了非有效部分, 还存在随机错误. 因此, 对于一组观测样本, 倘若直接通过 DEA 估计前沿面, 会导致偏误<sup>[24]</sup>. 下面设定  $\xi_j$  为一个产出, 并以此为例阐述多投入多产出 PLE-StoNED 估计方法.  $\varepsilon_j$  中非有效部分和噪音部分的分布在随机前沿面分析的文献中被广泛地讨论, 常见的假设是  $\varepsilon_j$  为一个正态分布随机量与一个半正态分布随机量之和<sup>[20, 21]</sup>. 在此假设下, Aigner 等<sup>[20]</sup>对  $\varepsilon_j$  的分布做了阐述, 概率密度函数为

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma} f^* \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right) [1 - F^* (\varepsilon \rho \sigma^{-1})],$$

$$\varepsilon \in [-\infty, +\infty] \quad (9)$$

其中  $\sigma^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2$ 、 $\rho = \frac{\sigma_u}{\sigma_v}$ ,  $\sigma_u$  是  $u$  的方差, 而  $f^*$  和  $F^*$  则分别是标准正态分布的概率密度函数和累积分布函数. 由式(9) 可以求得  $\varepsilon$  的期望和方差分别可表示为

$$E(\varepsilon) = E(v - u) = E(v) - E(u)$$

$$= -E(u) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma_u \quad (10)$$

$$\text{Var}(\varepsilon) = \text{Var}(v) + \text{Var}(u)$$

$$= \left( \frac{\pi - 2}{\pi} \right) \sigma_u + \sigma_v \quad (11)$$

在上述假设下, 多投入多产出前沿面可以被估计, 其具体估计步骤如下:

步骤 1 求解下面的最小二乘法模型

$$\min_{\beta, \gamma, \lambda, \rho^2} \sum_{k=1}^n (\hat{\xi}_k - \xi_k)^2$$

$$\text{s. t. } \beta_k (x_j - x_k) - \gamma_k (y_j - y_k) \geq \hat{\xi}_j - \hat{\xi}_k, \forall k \neq j$$

$$\beta_k, \gamma_k \geq 0, k = 1, \dots, n \quad (12)$$

根据前面的讨论, 可知生产前沿面可以被一个单调递增的凹函数表示, 即  $\xi_k = g_1(x_k, y_k) + \varepsilon_k, \forall k = 1, \dots, n$ . 由于  $E(\varepsilon_k) = E(-u_k + v_k) = -u \leq 0$ , 模型(12) 的求解将会带来生产前沿面的向下偏误. 因此, 将模型做下面的变换.

$$\xi_k = g_1(x_k, y_k) + \varepsilon_k$$

$$= g_1(x_k, y_k) - u + u - u_k + v_k, \forall k = 1, \dots, n$$

令

$$g_1'(x_k, y_k) = g_1(x_k, y_k) - u$$

$$\varepsilon_k' = u - u_k + v_k, \forall k = 1, \dots, n$$

可知  $g_1'$  可以运用模型(12) 来估计.

步骤 2 运用 PLE 估计  $\hat{\sigma}_u$  和  $\hat{\sigma}_v$ . 上一步可得误差项的估计值  $\hat{\varepsilon}_k'$ , 根据 PLE 方法, 最大化下面的似然函数.

$$\ln L(\rho) = n \ln \frac{1}{\sigma} + \sum_{k=1}^n \ln [1 - F^* \left( \frac{\varepsilon_k \rho}{\sigma} \right)] -$$

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \quad (13)$$

$$\text{其中 } \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n \hat{\varepsilon}_k'^2}{n \left( 1 - \frac{2\rho^2}{\pi(1+\rho^2)} \right)}}, \varepsilon_k = \hat{\varepsilon}_k' -$$

$\frac{\sqrt{2}\rho\sigma}{\sqrt{\pi(1+\rho^2)}}$ . 求解模型(13), 可得估计值  $\hat{\sigma}$  和  $\hat{\rho}$ ,

并以此获得  $\hat{\sigma}_u$  和  $\hat{\sigma}_v$  的估计值,  $\hat{\sigma}_u = \frac{\hat{\rho}\hat{\sigma}}{\sqrt{1+\hat{\rho}^2}}$ ,

$\hat{\sigma}_v = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{1+\hat{\rho}^2}}$ . 生产前沿面的估计为  $\hat{\xi}_k = \hat{g}_1'(x_k,$

$y_k) + \hat{u}$  其中  $\hat{u} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{\sigma}_u$ .

步骤 3 非有效部分的估计. 根据 Jondrow 等<sup>[21]</sup> 提出的方法,  $u_k$  的条件期望可被计算为

$$E(\hat{u}_k | \hat{\varepsilon}_k) = \frac{\hat{\sigma}\hat{\rho}}{1+\hat{\rho}^2} \left( \frac{f^* \left( \frac{\hat{\varepsilon}_k \hat{\rho}}{\hat{\sigma}} \right)}{1 - F^* \left( \frac{\hat{\varepsilon}_k \hat{\rho}}{\hat{\sigma}} \right)} - \frac{\hat{\varepsilon}_k \hat{\rho}}{\hat{\sigma}} \right).$$

步骤 4 将非有效部分转化为效率值. 上述第三步得出的结果是非有效部分的条件期望值, 通过下面的模型(14),  $E(\hat{u}_k | \hat{\varepsilon}_k)$  可被转化为距离函数形式的效率值.

$$\min \frac{\beta_k' x_k + \alpha_k}{\gamma_k' y_k + \tau_k (\hat{\xi}_k - E(\hat{u}_k | \hat{\varepsilon}_k))}$$

$$\text{s. t. } \frac{\beta_k' x_j + \alpha_k}{\gamma_k' y_j + \tau_k \hat{\xi}_j} \geq 1, \forall j$$

$$\beta_k, \gamma_k, \tau_k \geq 0 \quad (14)$$

通过 Charnes-Cooper 变换, 模型(14) 可被线性化为下面的模型.

$$\min \beta_k' x_k + \alpha_k$$

$$\text{s. t. } \gamma_k' y_j + \tau_k (\hat{\xi}_k - E(\hat{u}_k | \hat{\varepsilon}_k)) = 1$$

$$\beta_k' x_j + \alpha_k \geq \gamma_k' y_j + \tau_k \hat{\xi}_j, \forall j$$

$$\beta_k, \tau_k, \sigma_k \geq 0 \quad (15)$$

下面的图 1 描述了这一转化过程, 图中 CDEF 表示在投入同水平下产出  $(\hat{\xi}_k, y_k)$  的前沿面. A 是一样本观测点, A1 为其在前沿面上的投影,  $E(\hat{u}_k | \hat{\varepsilon}_k)$  为其非有效部分的条件期望估计值,  $E(\hat{u}_k | \hat{\varepsilon}_k)$  为随机部分的条件期望估计值.  $\hat{\xi}_k - E(\hat{u}_k | \hat{\varepsilon}_k)$  将投影点 A1 拉回到 A2, 模型(14) 则将 A2 重新投影到前沿面上的 A3.

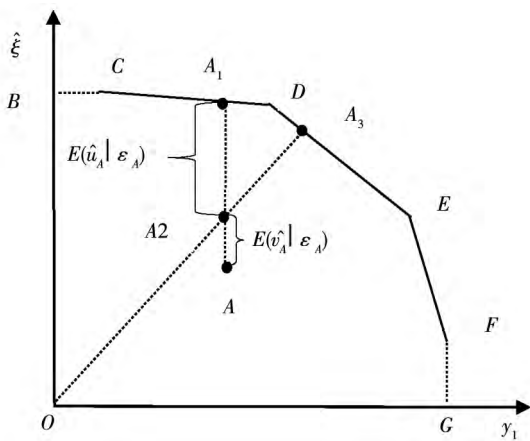


图1 非有效部分与比率效率之间的转化

Fig. 1 Transformation between inefficient part and ratio efficiency

### 3 Monte Carlo 模拟

本节通过两个 Monte Carlo 实验作为对比来考察上文提出的估计模型. 实验 1 的数据产生过程为  $\xi_k = \sqrt{x_k} - u_k + v_k$  (Model 1) 其中  $x_k$  服从 [1, 10] 的均匀分布,  $u_k$  服从标准差为  $\sigma_u$  的半正态分布,  $v_k$  服从期望为 0, 标准差为  $\sigma_v$  的正态分布. 数据集产生之后, 通过 PLE-StoNED 计算参数的估计值, 并且通过均方误差 (Mean Squared Errors, Mse) 和估计值与实际值之间的偏误 (Bias) 两个指标来考察估计的表现. 以参数  $\sigma^2$  的估计为例, Mse 和 Bias 的定义可以表示如下:

$$Mse_{\sigma^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)^2$$

$$Bias_{\sigma^2} = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^M \hat{\sigma}_i^2 \right) - \sigma^2$$

其中  $\sigma^2$  为综合误差项方差的真实值,  $i$  表示第  $i$  次重复实验,  $\hat{\sigma}_i^2$  为第  $i$  次重复实验方差的估计值,  $M$  为重复次数. 跟随 Fan 等<sup>[25]</sup>, 分别考虑三组综合误差和标准差比值组合, 即 ( $\sigma^2 = 1.88, \rho = 1.66$ ) ( $\sigma^2 = 1.88, \rho = 1.66$ ) ( $\sigma^2 = 1.88, \rho =$

1.66), 来产生非有效部分和随机错误的标准差 ( $\sigma_u, \sigma_v$ ). 而后通过 Model 1 可产生相应的 3 组数据集, 其样本大小如表中所示分别是  $n = 100$  和  $n = 300$ , 重复次数为 100 次. 通过 PLE-StoNED 估计得出的结果在表 1 和表 2 中. 表中的 Value 指的是各项指标的估计值, Mse 是均方误差, Bias 则是估计值与实际值之间的偏误.

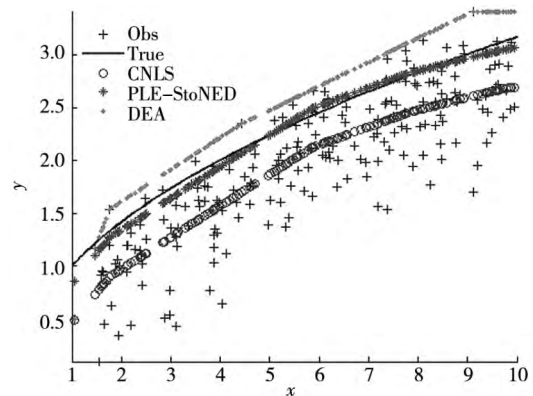


图2 三种估计的对比

Fig. 2 Comparison among three estimators

PLE-StoNED 方法在第二步中的拟似然估计中则需要求解一个非线性无约束似然函数. Fan 等<sup>[25]</sup> 提出了基于似然函数对  $\rho$  的微分的搜索算法来求解模型, 并验证了其可靠性. 本文运用 Matlab 中的 fminbnd 来求解似然函数,  $\rho$  的下界被设定为 0, 上界则被设定为 100. 图 2 是 PLE-StoNED 的估计结果及其与其他估计的对比 ( $\sigma^2 = 0.25, \rho = 1.66$ ). 图中, “o”表示的是最小二乘法 (CNLS) 得到的估计值, 可以发现其相对于前沿面是向下偏误的, “\*”表示修正后的估计值, 可以发现其与真实值更加接近了, 而 DEA 模型估计的前沿面则有明显的向上偏误. 比较表 1 和表 2 可以发现, 当样本量从  $n = 100$  增加到  $n = 300$  时,  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\lambda}$  的 Mse 和 Bias 的绝对值均有所减小. 这说明, 随着样本量的增加,  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\lambda}$  估计的结果越来越逼近真实值.

表 1 PLE-StoNED 的模拟结果 (Model 1,  $n = 100$ , replications = 100)

Table 1 Simulation results of PLE-StoNED (Model 1,  $n = 100$ , replications = 100)

	$\hat{\sigma}^2 = 1.88, \hat{\lambda} = 1.66$			$\hat{\sigma}^2 = 1.63, \hat{\lambda} = 1.24$			$\hat{\sigma}^2 = 1.35, \hat{\lambda} = 0.83$		
	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias
$\hat{\sigma}^2$	1.825 0	0.252 8	0.055 0	1.591 2	0.287 1	0.038 8	1.327 5	0.223 6	0.022 5
$\hat{\lambda}$	1.816 0	1.412 2	-0.156 0	1.354 5	1.022 0	-0.114 5	0.829 9	0.623 9	0.000 1
$\hat{\sigma}_u^2$	1.248 8	0.490 6	0.130 6	0.842 6	0.549 1	0.145 1	0.405 1	0.414 9	0.145 6
$\hat{\sigma}_v^2$	0.474 0	0.059 8	0.026 6	0.589 9	0.074 6	0.052 5	0.740 7	0.059 1	0.058 7

表 2 PLE-StoNED 的模拟结果 (Model 1, n = 300, replications = 100)  
Table 2 Simulation results of PLE-StoNED (Model 1, n = 300, replications = 100)

	$\hat{\sigma}^2 = 1.88, \hat{\lambda} = 1.66$			$\hat{\sigma}^2 = 1.63, \hat{\lambda} = 1.24$			$\hat{\sigma}^2 = 1.35, \hat{\lambda} = 0.83$		
	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias
$\hat{\sigma}^2$	1.870 8	0.106 4	0.009 2	1.603 0	0.110 8	0.027 0	1.338 7	0.118 2	0.011 3
$\hat{\lambda}$	1.734 5	0.253 5	-0.074 5	1.225 2	0.256 6	0.014 8	0.786 3	0.344 4	0.043 7
$\hat{\sigma}_u^2$	1.358 5	0.195 7	0.021 0	0.917 4	0.212 9	0.070 3	0.437 8	0.242 2	0.112 9
$\hat{\sigma}_v^2$	0.485 0	0.020 6	0.015 5	0.632 4	0.024 2	0.009 9	0.776 6	0.033 0	0.022 7

实验 2 考虑双投入双产出的模型 (Model 2),  $\xi_k = \sqrt{x_{1k} + x_{2k} - y_k^2} - u_k + v_k$  与实验 1 相同,  $u_k$  为半正态分布随机变量,  $v_k$  为正态分布随机变量. 实验 2 同样考虑三组综合误差和标准差比值组合, 即 ( $\sigma^2 = 1.88, \rho = 1.66$ ), ( $\sigma^2 = 1.88, \rho = 1.66$ ), ( $\sigma^2 = 1.88, \rho = 1.66$ ) 来产生非有效部分和随机错误的标准差 ( $\sigma_u, \sigma_v$ ), 以及考虑  $n = 100$  和  $n = 300$  两个样本大小.  $x_{1k}$  和  $x_{2k}$  分别服从  $[1, 10]$  的均匀分布,  $y$  服从  $[0, 1]$  的均匀分布. 模拟实验的结果分别在表 3 和表 4 中. 同样地, 比较表 3 和表 4 可以发现, 当样本量从  $n = 100$  增加到  $n = 300$  时,  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\lambda}$  的 Mse 与 Bias 的绝对值均有所减小. 例如, 比较表 3 的第 2 列 ~ 第 3 列和

表 4 的第 2 列 ~ 第 3 列可以发现,  $\hat{\sigma}^2$  的 Mse 从 0.263 8 降低到 0.085 8, Bias 从 0.123 8 降低到 0.051 1,  $\hat{\lambda}$  的 Mse 则从 1.225 2 降低到 0.220 4, Bias 则从 -0.337 9 变成 -0.123 1. 比较表 1 和表 3 可以发现, 从单投入单产出模型到双投入双产出模型部分方差组合中,  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\lambda}$  的 Mse 和 Bias 的绝对值有所提升, 但提高的幅度不大. 还有部分组合  $\hat{\sigma}^2$  和  $\hat{\lambda}$  的 Mse 和 Bias 的绝对值有小幅降低. 例如, 比较表 1 的第 2 列 ~ 第 3 列和表 3 的第 2 列 ~ 第 3 列,  $\hat{\sigma}^2$  的 Mse 由表 1 的 0.252 8 增加到表 3 的 0.263 8, 而  $\hat{\lambda}$  的 Mse 则由表 1 的 1.412 2 降低到表 3 的 1.225 2. 这些结果说明, 本文所提出的可以处理多投入多产出 PLE-StoNED 在投入产出数量增加的情况下, 估计效果依旧良好.

表 3 多投入多产出 PLE-StoNED 的模拟结果 (Model 2, n = 100, replications = 100)

Table 3 Simulation results of multiple inputs and multiple outputs PLE-StoNED (Model 2, n = 100, replications = 100)

	$\hat{\sigma}^2 = 1.88, \hat{\lambda} = 1.66$			$\hat{\sigma}^2 = 1.63, \hat{\lambda} = 1.24$			$\hat{\sigma}^2 = 1.35, \hat{\lambda} = 0.83$		
	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias
$\hat{\sigma}^2$	1.756 2	0.263 8	0.123 8	1.548 9	0.192 5	0.081 1	1.330 1	0.198 4	0.019 9
$\hat{\lambda}$	1.997 9	1.225 2	-0.337 9	1.544 4	0.720 4	-0.304 4	1.204 6	0.885 4	-0.374 6
$\hat{\sigma}_u^2$	1.248 6	0.337 9	0.130 8	0.924 2	0.279 4	0.063 5	0.563 1	0.426 3	-0.012 4
$\hat{\sigma}_v^2$	0.388 8	0.051 5	0.111 8	0.508 9	0.068 6	0.133 4	0.632 1	0.110 0	0.167 3

表 4 多投入多产出 PLE-StoNED 的模拟结果 (Model 2, n = 300, replications = 100)

Table 4 Simulation results of multiple inputs and multiple outputs PLE-StoNED (Model 2, n = 300, replications = 100)

	$\hat{\sigma}^2 = 1.88, \hat{\lambda} = 1.66$			$\hat{\sigma}^2 = 1.63, \hat{\lambda} = 1.24$			$\hat{\sigma}^2 = 1.35, \hat{\lambda} = 0.83$		
	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias	Value	Mse	Bias
$\hat{\sigma}^2$	1.828 9	0.085 8	0.051 1	1.597 9	0.048 5	0.032 1	1.353 4	0.044 6	-0.003 4
$\hat{\lambda}$	1.783 1	0.220 4	-0.123 1	1.220 9	0.086 2	0.019 1	0.926 9	0.187 4	-0.096 9
$\hat{\sigma}_u^2$	1.337 9	0.122 9	0.041 5	0.941 2	0.073 9	0.046 5	0.559 5	0.116 2	-0.008 8
$\hat{\sigma}_v^2$	0.448 4	0.017 1	0.052 2	0.628 9	0.008 8	0.013 4	0.752 3	0.026 3	0.047 0

## 4 中国大陆商业银行生产前沿面估计与效率分析

本节将提出的模型应用到中国大陆商业银行

的生产前沿面估计和效率分析. 中国大陆的商业银行按照规模和所有者可以分为四类: 大型国有商业银行、股份制商业银行、城市商业银行以及农村商业银行. 我们收集了从 2006 年—2014 年的 45 家中国大陆商业银行的数据, 来源是“国泰安

金融数据库 CSMAR (<http://www.gtarsc.com/>)和各个商业银行的年报. 其中,大型国有商业银行5家,股份制银行11家,城市商业银行22家以及农村商业银行7家. 值得注意的是,并不是每家银行在所有年份的数据都齐全,2006年只有10家数据齐全,2014年则有43家,年份越往后数据越齐

全,这有商业银行越来越多上市和公布财报的缘故. 下面的表5是银行投入产出以及运作效率的描述性统计. 跟随 Banker 等<sup>[26]</sup> 本文选取总资本、员工薪酬作为决策单元的投入,利息收入和非利息收入作为决策单元的产出. 本文将利息收入当作因变量  $\xi$ , 投入指标和非利息收入当作自变量.

表5 中国大陆商业银行投入产出以及效率的描述性统计

Table 5 Descriptive statistics of inputs-outputs and efficiencies of China mainland's commercial banks

银行性质		总资本	员工薪酬	利息收入	非利息收入	DEA	PLE-StoNED
大型国有	平均	3 518.30	803.40	4 214.76	75.60	1.252 7	1.276 8
	标准差	1 228.87	412.40	1 976.27	93.37	0.210 9	0.137 6
	观测数	38	38	38	38	38	38
股份制	平均	421.89	117.45	744.79	1.76	1.705 8	1.425 3
	标准差	293.93	88.97	591.63	2.83	0.725 4	0.263 8
	观测数	80	80	80	80	80	80
城商行	平均	61.17	10.05	86.34	0.30	3.313 5	1.898 3
	标准差	62.61	10.45	115.55	0.52	1.709 5	0.550 8
	观测数	153	153	153	153	153	153
农商行	平均	81.43	19.19	95.90	1.55	3.093 3	1.875 9
	标准差	52.76	14.86	74.53	3.76	1.564 1	0.502 1
	观测数	37	37	37	37	37	37

\* 单位:亿元;

从表5中,可以看到中国大陆不同类型商业银行之间的规模相差巨大,大型国有商业银行的平均总资本为3 518.30亿元,而农商行的平均总资本只有81.43亿元,大型银行的总资本年度变化值甚至超过了小银行的总资本额. 本文分别应用 DEA 和比例 PLE-StoNED 来估计银行的运作效率.

图3反映了四类商业银行非有效部分的变化趋势. 本文采用的是产出导向型模型,因此,所有的效率值均大于等于1,且效率值越小代表银行的表现越好. 从图中可以看到,总体上国有商业银行的运作表现最优,股份制商业银行次之,城市商业银行和农村商业银行的平均效率最大. 从年度变化上看,2006年—2008年银行的效率保持平稳,2009年—2010年则显著上升,之后又逐渐恢复. 大型国有商业银行、股份制银行和城商行的效率波动幅度要小于农商行.

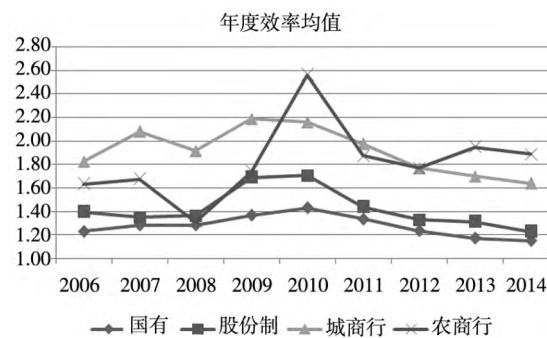


图3 四类商业银行的年度效率均值  
Fig. 3 Yearly average efficiency among the four types of commercial banks  
注:图中年份为年报发布时间,其记录的是上一年数据

### 5 结束语

传统的 DEA 假设投入产出都是确定型数据,通过将样本观测点投影到生产前沿面便可以得到此观测样本点的效率估计值. 本文将这个假设放

松,允许其中的一个投入或者产出与真实值之间的误差项包含随机错误。Kuosmanen 和 Kortelainen<sup>[16]</sup>提出一种被命名为 StoNED 的方法来估计随机环境下单产出多投入生产前沿面。他们通常采用的矩估计方法会导致第二步估计非有效部分的方差时出现负值的情况。本文基于 Fan 等<sup>[25]</sup>提出的 PLE 方法,提出了 PLE-StoNED,并将其拓展到可以估计多投入多产出样本数据集的前沿面。两个 Monte Carlo 实验的结果表明,多投入多产出 PLE-StoNED 估计的结果可以纠正 DEA 和 CNLS 的偏误。最后,实证部分中运用多投入多产出 PLE-StoNED 对中国大陆商业银行进行前沿面估计和效率分析,PLE-StoNED 方法的实用性得到进一步的验证。

值得注意的是,多投入多产出 PLE-StoNED 把整个生产活动的随机错误都归结到某个投入或者产出,从而使得随机环境下的多投入多产出生产前沿面可以被估计。然而,当决策已明确知道多个投入或产出指标包含了随机错误时,多投入多产出 PLE-StoNED 将会需要对一个非凸非线性规

划进行求解,如 Banker 和 Maindiratta<sup>[15]</sup>所提出的估计模型,当前并没有一个很好的算法来求得这种类型非线性规划的全局最优解。近期 Kuosmanen 和 Johnson<sup>[27]</sup>提出的基于方向距离函数的方法可以得到一个易于求解的二次规划模型,然而他们需要假设同一个样本的不同指标所包含的随机错误值是一样的,这也是一个限制十分强的假设。因此,提出一个可以被快速求解的多个指标含有随机变量的多投入多产出前沿面估计方法是未来的一个研究方向。此外,PLE 是一种半参数方法,需要假设非有效部分服从半正态分布,随机错误服从正态分布,文中提到的非参数核密度估计方法不需要这些假设,然而如正 Hall 和 Simar<sup>[19]</sup>所述,在随机错误方差比较大且随着样本量增大不趋于零的情况下,非参数核密度估计方法不具有一致性。因此,放宽非有效部分和随机错误的分布假设,是未来的研究方向之一。此外,考虑环境变量的多投入多产出 StoNED<sup>[28]</sup>以及模型中的变量选择问题也是未来值得研究的问题。

## 参 考 文 献:

- [1]Charnes A ,Cooper W W ,Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. *European Journal of Operational Research* ,1978 ,2 ( 6) : 429 - 444.
- [2]Farrell M J. The measurement of productive efficiency [J]. *Journal of the Royal Statistical Society ,Series A* ,1957 ,General 120: 253 - 281.
- [3]李光金. 评价相对效率的投入——产出型 DEA [J]. *管理科学学报* ,2001 ,4( 2) : 58 - 62.  
Li Guangjin. Input-and-output-oriented DEA for assessing relative efficiency [J]. *Journal of Management Sciences in China* , 2001 ,2: 58 - 62. ( in Chinese)
- [4]丁晶晶,毕功兵,梁 樑. 并联系系统资源和目标配置双准则 DEA 模型 [J]. *管理科学学报* ,2013 ,16( 1) : 10 - 21.  
Ding Jingjing ,Bi Gongbing ,Liang Liang. Bi-criteria DEA model for resource allocation and target setting in parallel production system [J]. *Journal of Management Sciences in China* ,2013 ,16( 1) : 10 - 21. ( in Chinese)
- [5]安庆贤,陈晓红,余亚飞 等. 基于 DEA 的两阶段系统中间产品公平设定研究 [J]. *管理科学学报* ,2017 ,20( 1) : 32 - 40.  
An Qingxian ,Chen Xiaohong ,Yu Yafei ,et al ,Fair setting for intermediate products in two-stage system based on DEA [J]. *Journal of Management Sciences in China* ,2017 ,20( 1) : 32 - 40. ( in Chinese)
- [6]官建成,何 颖. 基于 DEA 方法的区域创新系统的评价 [J]. *科学学研究* ,2005 ,23( 2) : 265 - 272.  
Guan Jiancheng ,He Ying. The performance of Chinese regional innovation system evaluation based on data envelopment analysis [J]. *Studies In Science of Science* ,2005 ,23( 2) : 265 - 272. ( in Chinese)
- [7]陈凯华,汪寿阳,寇明婷. 三阶段组合效率测度模型与技术研发效率测度 [J]. *管理科学学报* ,2015 ,18( 3) : 31 - 44.  
Chen Kaihua ,Wang Shouyang ,Kou Mingting ,Enhanced hybrid three-stage model for efficiency measure with application to technological R&D efficiency [J]. *Journal of Management Sciences in China* ,2015 ,18( 3) : 31 - 44. ( in Chinese)



- [8]李琳,黄海军,汪寿阳. 基于 DEA/AR 博弈交叉效率方法的学术期刊评价研究[J]. 管理科学学报, 2016, 19(4): 118-126.  
Li Lin, Huang Haijun, Wang Shouyang. Academic journal evaluation based on DEA/AR game cross efficiency method[J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(4): 118-126. (in Chinese)
- [9]Wu J, Xie K, Xiao J, et al. Effects of customer heterogeneity on participation performance in virtual brand community: A two-stage semiparametric approach[J]. International Journal of Electronic Commerce 2018, 22(2): 289-321.
- [10]张少华,蒋伟杰. 中国的产能过剩: 程度测算与行业分布[J]. 经济研究, 2017, 1: 89-102.  
Zhang Shaohua, Jiang Weijie. Overcapacity in China: Measurement and distribution[J]. Economic Research Journal, 2017, 1: 89-102.
- [11]张健华. 我国商业银行的 X 效率分析[J]. 金融研究, 2003(6): 46-57.  
Zhang Jianhua. X-efficiency analysis of Chinese commercial banks[J]. Journal of Financial Research, 2003(6): 46-57. (in Chinese)
- [12]Schmidt P. Frontier production functions[J]. Econometric Reviews, 1985, 4(2): 289-328.
- [13]Banker R D. Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: A statistical foundation[J]. Management Science, 1993, 39: 1265-1273.
- [14]Allon G, Beenstock M, Hackman S, et al. Nonparametric estimation of concave production technologies by entropic methods[J]. Journal of Applied Econometrics, 2007, 4: 795-816.
- [15]Banker R D, Maindiratta A. Maximum likelihood estimation of monotone and concave production frontiers[J]. Journal of Productivity Analysis, 1992, 3: 401-415.
- [16]Kuosmanen T, Kortelainen M. Stochastic non-smooth envelopment of data: Semi-parametric frontier estimation subject to shape constraints[J]. Journal of Productivity Analysis, 2012, 38(1): 11-28.
- [17]Johnson A L, Kuosmanen T. An Introduction to CNLS and StoNED Methods for Efficiency Analysis: Economic Insights and Computational Aspects[M]// In Ray S C, Kumbhakar S C, Dua P. (Ed.), Benchmarking for Performance Evaluation: A Production Frontier Approach, Springer India, 2015: 117-186.
- [18]Kuosmanen T, Johnson A, Saastamoinen A. Stochastic nonparametric approach to efficiency analysis: a unified framework [M]// In Zhu J. (Ed.), Handbook on Data Envelopment Analysis, vol. II. Springer US, 2015, 191-244.
- [19]Hall P, Simar L. Estimating a change point, boundary, or frontier in the presence of observation error[J]. Journal of the American statistical Association, 2002, 97(458): 523-534.
- [20]Aigner D, Lovell C A K, Schmidt P. Formulation and estimation of stochastic frontier production function models[J]. Journal of Econometrics, 1977, 6: 21-37.
- [21]Jondrow J, Lovell C A K, Materov I S, et al. On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model[J]. Journal of Econometrics, 1982, 19: 233-238.
- [22]Shephard R W. Cost and Production Functions[M]. Princeton University Press, Princeton: 1953.
- [23]Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis[J]. Management Science, 1984, 30: 1078-1092.
- [24]Simar L, Wilson P W. Sensitivity analysis of efficiency scores: How to bootstrap in nonparametric frontier models[J]. Management Science, 1998, 44(1): 49-61.
- [25]Fan Y, Li Q, Weersink A. Semiparametric estimation of stochastic production frontier models[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 1996, 14: 460-468.
- [26]Banker R D, Chang H, Lee S. Differential impact of Korean banking system reforms on bank productivity[J]. Journal of Business Finance and Accounting, 2010, 33: 218-235.
- [27]Kuosmanen T, Johnson A. Modeling joint production of multiple outputs in StoNED: Directional distance function approach [J]. European Journal of Operational Research, 2017, 262(2): 792-801.
- [28]Nieswand M, Seifert S. Environmental factors in frontier estimation: A Monte Carlo analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2018, 265(1): 133-148.

## Estimation of multiple inputs and multiple outputs frontiers in stochastic environment

XIE Jian-hui<sup>1</sup>, LI Yong-jun<sup>2</sup>, LIANG Liang<sup>2</sup>, WU Ji<sup>3\*</sup>

1. Lingnan College, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. The School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China;

3. Business School, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

**Abstract:** Traditional DEA method assumes that all inputs-outputs of observed samples are deterministic data, which restricts the practical applications of DEA. The pseudo likelihood estimation method based stochastic non-smooth envelopment of data (PLE-StoNED) in this paper extends this assumption, and can estimate frontiers in stochastic environment. The current paper proves that a frontier based on the assumptions of production possibility sets can be represented by a function with restrictions of convexity and monotonicity. Compared with the previous StoNED methods, our method can estimate the efficiencies of DMUs with multiple inputs and multiple outputs. Based on Monte Carlo experiments, the multiple inputs and multiple outputs PLE-StoNED is verified to be effective, and it can correct the bias generated by traditional methods like DEA. Finally, the new method is applied to estimate the frontier and efficiencies of commercial banks in mainland China. Our method fills up the gap of deterministic DEA method and statistical nature, which can provide decision references for decision makers who want to evaluate the productivity and efficiency for DMUs with multiple inputs and multiple outputs in stochastic environments.

**Key words:** productivity and efficiency analysis; frontier estimation; data envelopment analysis; stochastic non-smooth envelopment of data

### 附录

定理 1 的证明: 设定函数

$$\hat{g}_1(x, y) = \left\{ \max_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\} \quad (16)$$

第 1 步 首先证明  $\hat{g}_1$  是随着  $x$  单调不减, 随着  $y$  单调不增的凹函数.

函数  $\hat{g}_1(x, y)$  的对偶形式为

$$\hat{g}_1(x, y) = \left\{ \min_{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k} \alpha_k + \beta_k x_k - \gamma_k y_k \left| \begin{array}{l} \alpha_k + \beta_k x_k - \gamma_k y_k \geq \hat{\xi}_j \\ \beta_k, \gamma_k \geq 0 \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\} \quad (17)$$

从模型 (17) 中, 可以很容易地发现  $\hat{g}_1$  随着  $x$  单调不减, 随着  $y$  单调递减. 接下来证明  $\hat{g}_1$  是一个凹函数.

设定  $(x', y')$  和  $(x'', y'')$  分别为函数  $\hat{g}_1(x, y)$  定义域上两点. 那么, 对于任意使得  $(x', y')$  和  $(x'', y'')$  在定义域的两组权重  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$  和  $\lambda_j'', j = 1, \dots, n$ , 有下面的不等式.

$$\begin{aligned}
& \hat{g}_1(tx' + (1-y)x'' + ty' + (1-t)y'') \\
& \geq \sum_{j=1}^n t\lambda_j \hat{\xi}_j + (1-t) \lambda_j \hat{\xi}_j \\
& = t \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j + (1-t) \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j
\end{aligned} \tag{18}$$

由定义可知,  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j$  的上确界为  $\hat{g}_1(x', y')$ ,  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j$  的上确界为  $\hat{g}_1(x'', y'')$ . 得到了可以证明  $\hat{g}_1(x, y)$  是凹函数的不等式

$$\hat{g}_1(tx' + (1-y)x'' + ty' + (1-t)y'') \geq t\hat{g}_1(x', y') + (1-t)\hat{g}_1(x'', y'') \tag{19}$$

第 2 步 引入一个函数集合  $G = \{g_1 \mid g_1 \text{ 是随着 } x \text{ 单调递增且随着 } y \text{ 单调递减的凹函数}\}$ . 证明对于任意属于集合  $G$  的函数  $g_1$ , 均可以被  $\hat{g}_1$  表示. 假设  $g_1$  不可以被  $\hat{g}_1$  表示, 那么意味着, 在  $k = 1, \dots, n$  中, 至少存在一个  $x_k, y_k$ , 使得  $\hat{\xi}_k = g_1(x_k, y_k) \neq \hat{g}_1(x_k, y_k)$ . 又, 由  $\hat{g}_1(x_k, y_k)$  的定义可知,  $\hat{g}_1(x_k, y_k) \geq \hat{\xi}_k$ , 因此,  $\hat{g}_1(x_k, y_k) > \hat{\xi}_k$ .

由  $\hat{g}_1$  的定义可知, 存在一组  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \mid 0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}$ , 使得

$$\hat{g}_1(x_k, y_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{\xi}_j > \hat{\xi}_k = g_1(x_k, y_k) \tag{20}$$

由  $g_1$  的凹性可知

$$g_1\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^* (x_j, y_j)\right) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^* g_1(x_j, y_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* \hat{\xi}_j \tag{21}$$

由  $g_1$  其单调性又可知对于任意满足条件  $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq y_k, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq x_k$  的  $(x_k, y_k)$ , 可得

$$g_1(x_k, y_k) \geq g_1\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^* (x_j, y_j)\right) \tag{22}$$

联立式(20)、式(21)和式(22), 可以发现它们相互矛盾, 因此推翻原假设. 对于任意属于集合  $G$  的函数  $g_1$ , 均可以被  $\hat{g}_1$  表示. 综上, 可以得出模型(1)等于模型(3)的结论, 同理可以证明模型(2)等于模型(4). 证毕.