

道德风险下带有 Knight 不确定的最优动态契约设计^①

费晨², 余鹏¹, 费为银^{1*}, 闫理坦²

(1. 安徽工程大学金融工程系, 芜湖 241000; 2. 东华大学旭日工商管理学院, 上海 200051)

摘要: 本文从概率统计模型本身的不确定性是本质的、不能消除掉的角度出发, 研究了 Knight 不确定下连续时间委托-代理问题, 其中主要考虑了代理人的道德风险对契约执行过程以及契约存续情况的影响. 首先, 建立了代理人延续价值以及委托人预期利润的动态方程. 其次, 运用次线性期望下的随机最优性原理, 以更加准确、深刻的方法去刻画实际委托人和代理人经济行为, 进而得到委托人效用值函数的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 并求得委托人对代理人最优支付以及代理人最优努力水平的表达式. 最后, 通过理论解的数值模拟, 分析了 Knight 不确定对委托人和代理人最优策略以及最优契约的影响.

关键词: 委托-代理; 次线性期望; 纯道德风险; 不完全契约理论; 非线性动态规划原理

中图分类号: F062.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2019)06-0086-11

0 引言

众所周知, 经济学家们更加乐意从契约或者合同 (contract) 角度来研究一个社会经济问题, 这一事实已经有相当长的一段历史, 从最初的瓦尔拉斯一般均衡下帕累托 (Pareto) 最优的短期契约集合到考虑不完全性之后形成的阿罗 (Arrow) 与德布鲁 (Debreu) 一般均衡下的帕累托最优长期契约集合. 然而, 经济学家们对于现实问题的探索总是孜孜不倦、力求不断接近现实世界. 上世纪 70 年代以来, 一大批经济学家为契约理论不断完善做出了许多重要的贡献, 其中以 Holmstrom^[1] 等的经典结果为代表. 之后, 许多学者分别从违约赔偿、公司治理结构、履约视角、法律视角进一步讨论了完全契约理论与现实经济问题之间的冲突, 进而明确了契约的不完全性. 通过建立数学模型, Grossman 和 Hart^[2]、Hart 和 Moore^[3] 的两篇奠基性论文开创了正式的不完全契约理论. 其中, 契约理论也被叫做委托-代理理论. 在完全契约理

论的基础上, 为了更真实地反映实际经济问题, 不完全契约理论用其所强调的不确定性进一步深化了我们对现实经济问题的刻画, 使整个契约理论具有更强的生命力和实际意义. 随着经济、社会的不断发展, 在现代经济关系中出现越来越多的委托代理问题, 诸如违约、欺诈和敲竹杠. 因此, 不完全契约理论正越来越成为企业理论、公司战略、公司金融、公司管理等领域的基础工具, 掌握这一理论已是相关经济领域的客观需要.

为了使契约理论能够与实际经济问题达到更高的契合度, 国内外学者做过大量研究, 并且这一领域内学术界已经形成相当多成熟的结论和成果. Sung^[4] 认为, 风险中性的委托人会更加愿意雇佣一个带有风险厌恶偏好的代理人, 并且关于合同的条款在零时刻被决定, 那么其最优契约是线性的. Sannikov^[5] 认为, 委托人雇佣代理人去经营一个项目, 但是该项目的发展趋势和盈利结果只能被代理人观测到. 除此之外, Zhang^[6] 在其马尔科夫链模型中指出, 代理人的效用受到一个持续

① 收稿日期: 2018-03-26; 修订日期: 2019-02-09.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71571001).

通讯作者: 费为银 (1963—), 男, 安徽芜湖人, 博士, 教授, 博士生导师, Email: wyfei@ahpu.edu.cn

的随机波动影响,而这样的随机波动也只能被代理人自己所掌握. Spear 与 Srivastava^[7] 基于延续价值方法研究了连续时间下的动态道德风险问题. Sannikov^[8] 表明代理人瞬时条件的激励问题与延续价值波动率有关. Cvitani 等^[9] 用代理人的效用动态学特征来刻画委托人预期利润的价值函数,以此来研究双方之间的委托-代理关系和契约的存续性.

聂辉华^[10] 综述了完全契约理论和不完全契约理论的发展脉络与应用范围以及完全契约理论和不完全契约理论的关键分歧,并探讨了两类文献融合的趋势和结合的可能性. 朱琪等^[11] 系统阐述了不完全契约理论的演化及该理论发展展望. 除了理论层面的研究,大量学者将契约理论应用到实际经济问题中. 常亮等^[12] 基于契约理论,重构了流域管理市场化过程中政府与市场主体间的角色定位和利益关系. 刘宏英和吴能全^[13] 基于企业契约理论的视角,从纵向上分析人力资源与人力资本管理在“契约关系与目标定位”、“人性假设”以及“管理实践”三方面的差异. 马国旺等^[14] 基于公平偏好与学习效应给出委托代理契约设计. 王云等^[15] 基于债务契约理论研究了不同企业生命周期下企业盈余管理及方式问题. 张照忱和吴彦龙^[16] 从契约理论的角度,分析了企业进行税务筹划的动机,发现政府的主导性地位、税收契约的不完备性、税法的空白与漏洞以及企业之间的关系都会促使企业在合理的范围内进行税务筹划,以实现税收利益最大化. 钱勇和曹志来^[17] 以煤炭、电力企业与政府博弈的具体事例,讨论了契约机制与市场界别之间的关系. 王健和庄新田^[18] 建立数学模型,将心理契约理论引入基金经理激励问题研究中. 在委托代理理论框架下,陈闯等^[19] 从多边代理的视角分析了风险投资和创始人对新上市企业管理层薪酬激励的影响. 吴昊旻等^[20] 讨论了如何设计一个契约,从公平与效率的权衡中解决高管与员工薪酬差距的激励问题. DeMarzo 等^[21] 建立了将动态投资理论与动态最优激励契约相结合易于分析的模型,激励契约在边际和平均 Q 之间产生了一个依赖历史的楔 (wedge),最佳契约包括延期补偿、可能的终止以及持续盈利冲击的补偿. 面对企业突发损失的泊松跳和管理者自利冒险行为,甘柳等^[22] 基于投资

Q 理论框架,给出了管理者不可观测的努力和冒险行为对最优契约的影响.

然而以上的研究成果都是在线性期望下得出的,然而,正由于现实世界的复杂性,人的行为具有情绪特点,信息获取的不完全性,很难用一个精确的模型刻画现实问题. Knight^[23] 认为,在经济和管理领域中,概率统计模型本身的不确定性是本质的、不能消除掉的,这种概率本身的不确定性被称为 Knight 不确定性(或称 Ambiguity). 通常而言,线性期望是在数学大师 Kolmogorov 于上世纪 30 年代引入的概率论公理体系下进行的. 然而,彭实戈^[24] 指出,随着我们所处的社会飞速发展,我们所面对和研究的问题的动态特性和不确定性越来越强,我们也更需要一个新的更基础更深刻的理论和相应的稳健、可靠的分析和计算工具. 概率理论能够解决那些其相应的概率模型能够通过数理统计方法和数据分析予以确定的情形,但是,非线性期望却能够在概率模型本身还无法确定的情形下,就可以对各种风险进行稳健的定量分析和计算. 如何分析和计算 Knight 不确定性下的金融和经济问题已经成为当前重要的关注点,且其已经被应用于许多经济问题的研究中. Chen 和 Epstein^[25] 建立了多先验效用的连续时间跨期模型,并对风险溢价 (risk premium) 和模糊溢价 (ambiguity premium) 进行了阐述. Fei^[26] 利用 α -最大最小期望效用 (α -MEU) 模型研究了 Knight 不确定下的最优消费和投资组合问题. 进一步的,费为银等^[27] 研究了 Knight 不确定下带有通胀风险的最优消费和投资问题. 李伟和韩立岩^[28] 建立了 Knight 不确定条件下的模糊二叉树期权定价模型,得出更合理的市场价格预测. 费为银等^[29] 在 Knight 不确定及机制转换环境下研究了汇率变动对跨国投资决策的影响. 王春峰等^[30] 研究了中国证券市场 Knight 不确定性度量与资产定价问题. 有些学者已经考虑到契约设计中需要引入 Knight 不确定,例如,面对 Knight 不确定环境,经济代理人往往表现为模糊厌恶 (ambiguity aversion),由于信息不对称性,和被保险人存在逆向选择, Koufopoulos 和 Kozhan^[31] 设计了一个最优保险契约. 但我们研究的问题和框架与他们的工作是不同的(我们的工作基于次线性期望理论).

上述文献综述分析虽然表明金融市场投资者

的行为具有 Knight 不确定,但经济领域中的契约设计同样由于复杂的经济环境和人的行为情绪特点等因素,需要我们在契约设计中引入 Knight 不确定.我们发现,现有的契约理论模型总是假设私人冲击(private shock)是一直持续的,并将影响代理人的技巧、类型或者偏好,而这些个人特质将在他们的职业生涯初始就被决定并保持不变.除此之外,动态道德风险将与持续私人冲击混合在一起,使得问题变得更加复杂,这是因为,提供给代理人的契约支付不仅要包含瞬时激励,还必须提供一个累积激励来促使代理人在零时刻真实地汇报私人冲击.然而,众所周知的是,代理人的道德水平是一个无法掌控的因素.程红等^[32]表明双向激励契约能对核心企业缺失下供应链具有逆向选择和道德风险的问题进行激励和协调.Chang 等^[33]研究了带有道德风险的连续时间委托-代理问题,在委托人和代理人具有展望理论类型偏好的前提下,分析了委托人代理人动态行为特征.Piskorskia 和 Westerfield^[34]研究了对面临存在道德风险代理人实施有成本的监督以增加企业价值的动态契约设计问题.Maréchal 和 Thomas^[35]讨论了风险厌恶的代理人存在道德风险和逆向选择时的最优契约设计问题.Packham^[36]研究了带有逆向选择和道德风险代理人且委托人具有竞争性的最优契约设计问题.这些工作没有考虑委托代理模型的 Knight 不确定是如何影响契约设计的问题.费为银等^②研究了在 Knight 不确定下单边有限责任连续时间契约问题,尽管基于非线性期望框架研究连续时间最优契约设计,但没有涉及代理人的道德风险问题.

另一方面,我们知道,大多数学者更愿意从传统概率统计角度去分析契约问题,但是,随着非线性期望理论的建立,我们认为,基于模型不确定的概率理论更能真实、深刻的反映实际经济问题的本质,因此本文将综合考虑 Knight 不确定性与道德风险对最优动态契约的影响,利用非线性期望

下的随机分析方法不仅在理论上得出了 Knight 不确定及道德风险下委托人的预期利益变化趋势、代理人获得的契约支付变化情况和相应的最优契约,而且对相关理论结果进行了数值分析并给出经济学解释,并得出了一些有经济意义的结论.本文研究发现,随着 Knight 不确定的增大, Knight 不确定厌恶的委托人将会采取审慎的策略,减少代理人报酬支出来增强对冲利润下降风险的能力;短期来看,道德差代理人(也称低道德水平代理人, bad agent)会给委托人带来较大的利益,但是这种利益无法持久,契约不能长期执行下去,道德优秀代理人(也称高道德水平代理人, good agent)才能保证契约的可持续性;纯道德风险框架下,道德优秀的代理人将一直选择最优努力水平,相反,在持续获得委托人报酬的前提下,道德差的代理人将会选择不再努力,努力水平降为零.本文首次尝试在次线性期望理论(见彭实戈^[24])框架下,结合非线性动态规划原理(见 Fei 和 Fei^[37])探讨 Knight 不确定和纯道德风险下的最优动态契约设计问题.

1 基本模型框架

本文在次线性期望空间 (Ω, H, \hat{E}) 上研究连续时间下的委托-代理问题^③,假设委托人和代理人拥有相同的次线性期望 \hat{E} . $B = \{B(t)\}_{t \geq 0}$ 是 (Ω, H, \hat{E}) 上的 G -布朗运动^④, $B(1)$ 分布服从 G -正态分布 $N(0, [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$, $\underline{\sigma}$ 和 $\bar{\sigma}$ 分别是 Knight 不确定下的最小波动率和最大波动率,与整个行业发展前景的不确定性有关.其中, Ω 是给定的状态集合, H 是定义在 Ω 上实值函数所组成的线性空间.彭实戈^[24]给出如下次线性期望的定义^⑤.

定义 1 一个次线性期望是定义在随机变量

② 费为银,杨珊珊,梁勇. Knight 不确定下单边有限责任连续时间契约问题[J]. 中国科技大学学报,即将发表.

③ 经典的委托代理问题属于完全契约理论范畴,本文的委托代理问题属于不完全契约理论范畴.哈特(Hart)和霍姆斯特罗姆(Holmstrom)因在不完全契约理论上杰出贡献获得 2016 年诺贝尔经济学奖.

④ G -布朗运动的详细定义见彭实戈^[24]定义 26,与经典布朗运动不同, G -布朗运动的波动率是模糊不确定(ambiguity),通常假设为一个区间,该区间的上下界利用经验数据可以估计出来,估计方法见彭实戈^[24] φ -max-mean 逼近算法(第 3.3 小节).

⑤ 这里相同的次线性期望假设意味着委托人与代理人对随机事件不确定测度集是一样的,尽管对同一个随机事件看法不尽一致.

空间 H 上的满足以下性质的非线性泛函 \hat{E} :

(1) 保常数性: $\hat{E}[c] = c$;

(2) 次可加性: 对每一个 $X, Y \in H$

$$\hat{E}[X + Y] \leq \hat{E}[X] + \hat{E}[Y];$$

(3) 单调性: 当 $X \geq Y$ 时, $\hat{E}[X] \geq \hat{E}[Y]$;

(4) 正齐次性: 当 $\eta \geq 0$ 时, $\hat{E}[\eta X] = \eta \hat{E}[X]$.

$$\text{令 } \mathcal{E}[X] = -\hat{E}[-X].$$

一般而言,委托人与代理人通过签订契约形成合作关系,契约里会有一个委托人要求代理人执行、管理的项目. 由于项目收益具有 Knight 不确定,所以用 G -布朗运动 $B = \{B(t)\}_{t \geq 0}$ 驱动契约项目的盈利过程. 项目总盈利过程 $Y(t)$ 满足下列随机微分方程

$$dY(t) = a(t)dt + \lambda dB(t)$$

式中 $a(t)$ 是代理人选择的努力水平; λ 是常数,代表市场波动率. 可行努力水平集合 \mathcal{A} 是一个二元组 $\mathcal{A} = \{0, a_M\}$. 努力水平与代理人瞬时效用损失函数 $g(a)$ 有关系,即 $g(a_M) > g(0) = 0$.

假设委托人和代理人在零时刻签订契约. 受到约定,委托人将会支付给代理人 $c = \{c(t)\}_{t \geq 0}$ 的即期支付,代理人获得的支付效用函数为 $\theta u(c(t))$. 其中, $u(\cdot)$ 是递增、凹的. 即期支付只能在紧集 $C = [0, c_M]$ 中取值. 参数 θ 表示代理人的类型. 假设在劳动市场上仅存在两个道德类型的代理人 θ_i , 她们分别是道德优秀或高道德水平代理人 (θ_g) 和道德差或低道德水平代理人 (θ_b), 从实际情况出发,我们认为道德优秀的代理人比道德差的代理人较为容易获得满足感,其效用获取相对更多,因此令 $\theta_b < \theta_g$. 除此之外,两个类型代理人 θ_i 在劳动市场上的比例 p_i 是已知的, $i = g, b$.

项目盈利过程 $Y(t)$ 是可以被委托人和代理人双方所共同观测到的. σ -代数 \mathcal{A}^t 是由 $\{Y(s)\}_{s \leq t}$ 产生的信息流. 然而,委托人无法观测

到代理人的努力水平,也不能知悉代理人的类型,这两点只有代理人自己清楚. 正因为如此,道德风险是我们在研究契约问题时不得不考虑的一个因素.

在对项目盈利和代理人类型观测分析的基础上,委托人将提供一个契约菜单 (contract menu) $\Psi_i = \{c_i, a_i\}$, $i = g, b$, 其中 $c_i = \{c_i(t)\}_{t \geq 0}$ 是一个有界的支付流, $a_i = \{a_i(t)\}_{t \geq 0}$ 是其满意的努力水平. 假设代理人和委托人双方的利润和效用以相同的利率 r 折现,而且她们都是 Knight 不确定厌恶的,这意味着委托人和代理人效用与收益的期望取得是下期望算子 \mathcal{E} . 此时,委托人和代理人的决策是稳健的决策. 如果一个代理人的类型为 θ_i , 其获得的支付流为 c_i , 选择的努力水平为 a_i , 那么她的期望效用为

$$V(\theta_i, c_i, a_i) = r \mathcal{E} \left\{ \int_0^\infty e^{-rs} [\theta_i u(c_i(s)) - g(a_i(s))] ds \right\}$$

而 Knight 不确定厌恶委托人的期望效用为

$$r \mathcal{E} \left[\sum_{i=g,b} p_i \int_0^\infty e^{-rs} [dY(s) - c_i(s)] ds \right] = \quad (1)$$

$$r \mathcal{E} \left[\sum_{i=g,b} p_i \int_0^\infty e^{-rs} [a_i(s) - c_i(s)] ds \right]$$

其中 r 标准化累积支付以形成支付流.

假设两种代理人的保留效用 (reservation utility) 都为 L . 这里,保留效用指在零时刻代理人对自己劳动价值的预判,如果委托人提供的支付折现值比 L 小,那么代理人不会接受这样一个契约. 所以,一方面委托人将会提供一个使得式(1)取得最大值的契约菜单^⑥,另一方面,这个契约菜单又必须满足代理人要求的初始效用价值最小为 L , 所以有如下的约束条件

$$V(\theta_i, c_i, a_i) \geq L, i = g, b$$

2 纯道德风险下的最优动态契约

现在在纯道德风险下讨论最优契约^⑦. 从代理人延续价值 (continuation value) (即当代理人选

⑥ 本文的优化问题是最优支付与努力水平策略使得委托人预期收益最大化,并且该策略要确保代理人效用不低于预留效用. 按照 Sannikov^[8] 中激励相容定义,代理人会依据委托人的支付水平选择使其预期效用最大化的努力水平. 所以,本文所得最优策略确保委托人和代理人都处于最优状态,是纳什均衡解.

⑦ 本文讨论的是委托人基于市场上存在道德好和道德差的代理人契约设计,并未研究委托人本身可能有道德风险问题,类似的框架见文献[9]. 如果考虑委托人和代理人同时具有道德风险模型将需要进一步研究. 另外,本文的效用与项目利润用统一货币单位度量.

择一个努力水平时她的未来预期收益)角度来研究. 其延续价值动力学为^⑧

$$W_i(t) = r \mathcal{E}_t \left\{ \int_t^\infty e^{-r(s-t)} [\theta_i u(c_i(s)) - g(a_i(s))] ds \right\},$$

$$i = g, b$$

将运用非线性动态规划方法^[37]得到最优契约. 在代理人类型是 θ_i 时, 记委托人的期望收益为 $F^i(W_i(t))$, $i = g, b$. 类似 Sannikov^[8] 中 Lemma 1 讨论 HJB 方程解的凹性 (concavity) 的思路, 知道 $F^i(W_i(t))$, $i = g, b$ 是凹函数^⑨. 并且设代理人的延续价值是有界的.

令 $W_i(t) = 0$ 的唯一方法是委托人在 t 时刻提供零支付, 且代理人努力水平为零, 相应的, 委托人的预期收益 $F^i(0) = 0$; 令 $W_i(t) = \theta_i u(c_M)$ 的唯一方法是提供给代理人常值支付 $c_i(s) = c_M$, 而在此时 (纯道德风险下), 代理人的最优努力水平是 $a_i(s) = 0$. 这些边界条件在寻找最优契约时是必要的. 现在, 类似 Sannikov^[8] 讨论, 给出如下的引理.

引理 1 给定支付过程 c_i 和努力过程 a_i , 那么存在一个 \mathcal{N}^X 适应过程 (adapted process) β_i 使得代理人延续价值的动态方程为

$$dW_i(t) = r[W_i(t) + g(a_i(t)) - \theta_i u(c_i(t))] dt + r\beta_i(t)(dY(t) - a_i(t)dt) - dK(t), \quad (2)$$

$$i = g, b$$

其中 $(-K(t))$ 是下降 G -鞅.

除此以外, θ_i 类型的代理人会选择委托人推荐的努力水平 a_i 以满足下列激励相容条件 (incentive compatibility condition)^⑩

$$-g(a_i) + \beta_i a_i \geq -g(\hat{a}) + \beta_i \hat{a}, \forall \hat{a} \in A \quad (3)$$

注意到, 如果 (a_i, β_i) 满足瞬时激励相容条件(3), 那么认为 β_i 依赖于努力水平 a_i . 之所以给出激励相容条件, 是因为式(2)中代理人延续

价值的漂移项依赖于 $\beta_i a_i - g(a_i)$, θ_i 类型代理人的最好选择是使 $-g(a_i) + \beta_i a_i$ 最大化. 在这里, 作者认为 β_i 是委托人对代理人的激励比例. 给定一个努力水平 a_i , 委托人将会选择一个有最小绝对值的 β_i 过程. 这种选择是由委托人价值函数的凹性 (concavity) 决定的. 因此, 在如下关于委托人值函数的命题中, 可以用 $\kappa(a_i)$ 来记 β_i .

命题 1 最优契约 $\{c_i(W_i(t)), a_i(W_i(t))\}$ 将由委托人值函数的最优性方程 (HJB 方程) 的最大化结果给出

$$F^i(W) = \max_{a_i, c_i} \left\{ a_i - c_i + [W + g(a_i) - \theta_i u(c_i)] F_W^i(W) + \frac{1}{2} r \lambda^2 \sigma^2 \kappa^2(a_i) F_{WW}^i(W) \right\} \quad (4)$$

其边界条件为 $F^i(0) = 0, F^i(\theta_i u(c_M)) = -c_M$. 这里, $W_i(t)$ 是动态方程式(2)中 θ_i 类型代理人的延续价值过程, 它的初始值满足

$$W_i(0) \in \underset{\hat{w} \geq L_i, \in [0, \theta_i u(c_M)]}{\text{argmax}} F^i(\hat{w})$$

证明 利用 Peng^[24] G -伊藤公式和引理 1, 可得

$$dF^i(W) = r\lambda\beta_i(t)F_W^i(W)dB_t + r[W + g(a_i(t)) - \theta_i(c_i(t))]F_W^i(W)dt + \frac{1}{2}r^2\lambda^2\beta_i^2(t)F_{WW}^i(W)d\langle B_t \rangle - F_W^i(W)dK(t)$$

进而, 注意到函数 $F^i(W)$, $i = g, b$ 的凹性, 类似 Fei 和 Fei^[37] 定理 3.10 的证明可证得本命题^⑪.

证毕.

以下, 为了便于探讨最优契约经济学意义, 特别地, 令 $\kappa(a_i) = \sqrt{a_i} + 1$, $g(a) = \frac{1}{3}(2^a - 1)$, 以及令 $u(c) = \sqrt{c}, u(0) = 0$, 则 HJB 方程式(4)简化为

⑧ 式中数学期望算子是基于代理人不确定测度集取下期望计算, 原因是本文假设委托人和代理人不确定测度集是一样的, 且是模糊或含糊厌恶 (ambiguity aversion), 也称 Knight 不确定厌恶. 如果我们假设委托人和代理人是模糊或含糊喜好 (ambiguity loving), 期望算子就是基于不确定测度集取上期望.

⑨ 此处, 函数的凹性为获得命题 1 式(4)提供了重要的作用. 原因是次线性期望只有次可加性和正齐次性. 从项目收益动力学可知代理人努力水平影响项目收益价值, 而代理人努力和委托人的支付决定代理人的延续价值, 所以委托人的期望收益受项目收益的间接影响.

⑩ 类似的激励相容条件由 Sannikov^[5] 在 Proposition 2 中给出, 条件(3)表明代理人偏离委托人推荐的努力水平是不能获利的.

⑪ 本定理的证明需要先证明次线性期望下的动态规划原理 (非线性动态规划原理), 然后基于该原理证明委托人的值函数满足的最优性方程 (HJB 方程), 限于篇幅, 我们略去详细验证过程.

$$F^i(W) = \max_{a_i, c_i} \{ a_i - c_i + [W + g(a_i) - \theta_i u(c_i)] F_w^i(W) + \frac{1}{2} r \lambda^2 \bar{\sigma}^2 (\sqrt{a_i} + 1)^2 F_{ww}^i(W) \} \quad (5)$$

设式(5)的最优努力与支付解 (a_i^*, c_i^*) 满足

$$a_i^* - c_i^* + [W + g(a_i^*) - \theta_i u(c_i^*)] F_w^i(W) + \frac{1}{2} r \lambda^2 \bar{\sigma}^2 (\sqrt{a_i^*} + 1)^2 F_{ww}^i(W) = F^i(W) \quad (6)$$

需要指出的是, 本文的模型是在纯道德风险框架下进行的, 假设代理人的努力水平只有两个可行解, 即 $\mathcal{A} = \{0, a_M\}$. 因此, 对式(6)进行分情况讨论.

(i) 道德优秀代理人将会选择努力水平

$$a_g^* = a_M \quad (7)$$

根据式(6), 有

$$F^g(W) = a_M - c_g^* + [W + g(a_M) - \theta_g u(c_g^*)] F_w^g(W) + \frac{1}{2} r \lambda^2 \bar{\sigma}^2 (\sqrt{a_M} + 1)^2 F_{ww}^g(W) \quad (8)$$

对式(8)求偏微分 $\partial F^g / \partial c_g = 0$, 可得到

$$c_g^*(W) = \frac{1}{4} \theta_g^2 (F_w^g(W))^2 \quad (9)$$

(ii) 道德差代理人将会选择努力水平

$$a_b^* = 0 \quad (10)$$

根据式(6), 有

$$F^b(W) = -c_b^* + [W - \theta_b u(c_b^*)] F_w^b(W) + \frac{1}{2} r \lambda^2 \bar{\sigma}^2 F_{ww}^b(W) \quad (11)$$

对式(11)求偏微分 $\partial F^b / \partial c_b = 0$, 可得到

$$c_b^*(W) = \frac{1}{4} \theta_b^2 (F_w^b(W))^2 \quad (12)$$

现在将式(7)和式(9)代入式(8)及式(10)和式(12)代入式(11), 分别得到

$$a_M - \frac{3}{4} \theta_g^2 (F_w^g(W))^2 + [W + \frac{1}{3}(2^{a_M} - 1)] F_w^g(W) + \frac{1}{2} r \lambda^2 \bar{\sigma}^2 (\sqrt{a_M} + 1)^2 F_{ww}^g(W) = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{3}{4} \theta_b^2 (F_w^b(W))^2 + W F_w^b(W) + \frac{1}{2} r \lambda^2 \bar{\sigma}^2 F_{ww}^b(W) = 0 \quad (14)$$

命题 2 最优努力水平和支付契约 $\{a_i^*, c_i^*\}$ 在纯道德风险下有如下结果:

1) 当 $a_g^* = a_M$ 时, 有 $c_g^*(W) = \frac{1}{4} \theta_g^2 (F_w^g(W))^2$;

2) 当 $a_b^* = 0$ 时, 有 $c_b^*(W) = \frac{1}{4} \theta_b^2 (F_w^b(W))^2$.

其中 $F_w^g(W), F_{ww}^g(W)$ 由式(13)和式(14)解出, 而边界条件为 $F^i(0) = 0, F^i(\theta_i \sqrt{c_M}) = -c_M$.

通过计算分析发现, 式(13)、式(14)的微分方程无法解出 F^g 和 F^b 的解析解, 因此将通过 Matlab 模拟给出 F^g 和 F^b 的数值解, 从而求出最优支付 $c_g^*(W)$ 和 $c_b^*(W)$ 的数值解.

3 数值模拟与经济学解释

现在给出相关参数设置. 参数 $c_M = 4, a_M = 2, r = 2, \lambda = 1, g(a_M) = 1, \theta_g = 2, \theta_b = 1$. (这里参数的选取自文献[9]). $\bar{\sigma}$ 将作为变量, 分别取 1、1.5 和 2, 研究其对 F^i, c_i 的影响. 将上述参数代入式(9)、式(12)、式(13)、式(14), 得到

$$\begin{cases} 2 - 3(F_w^g(W))^2 + [W + 1] F_w^g(W) + (\sqrt{2} + 1)^2 \bar{\sigma}^2 F_{ww}^g(W) = 0, \\ -\frac{3}{4} (F_w^b(W))^2 + W F_w^b(W) + \bar{\sigma}^2 F_{ww}^b(W) = 0 \end{cases}$$

其边界条件 $F^i(0) = 0, F^i(2\theta_i) = -4$. 进而, 解上述常微分方程并利用命题 2 可算得最优支付

$$\begin{cases} c_g^*(W) = (F_w^g(W))^2, \\ c_b^*(W) = \frac{1}{4} (F_w^b(W))^2 \end{cases}$$

对上述结果通过 Matlab 模拟, 得到以下结论.

1) 图 1 与图 2 分别描述了 Knight 不确定下道德优秀代理人的延续价值对其委托人总效用的影响以及自身报酬的变化趋势. 从图中可以看出, 随着 Knight 不确定度 ($\bar{\sigma}$) 的增大, 委托人的总效用函数曲线变得更加陡峭, 并且图形峰值增大, 这说明, 委托人的效用增加更快, 且能获得更大效用. 我们认为这是因为, 随着 Knight 不确定度的增大, 契约菜单所运行项目的收益不确定性也将增大, Knight 不确定厌恶的代理人会对未来行业发展产生不确定的担忧, 这种担忧将会使得他尽力专注于当下的契约 (即所谓的“十鸟在林不如一鸟在手”), 并竭尽全力执行契约. 代理人的这种高强度投入将会给委托人带来更快的效用积累; 另外, 结合图 2 可以看出, 随着 Knight 不确定度的增大, 代理人获得的报酬峰值也在降低, 即委

托人的支出在减少,这说明由于未来不确定性的增加,使得 Knight 不确定厌恶的委托人将会采取审慎的策略,减少代理人报酬支出来增强抗风险能力. 双方这种由于 Knight 不确定性增加引起的决策转变共同促成了委托人总效用的增加. 除此之外还可以看出,3 种不同的 Knight 不确定取值下,委托人总是分别在代理人延续价值为 w_1, w_2, w_3 处取得最大效用,相应的,代理人也将在其延续价值分别为 w_1, w_2, w_3 处取得最低收益. 当代理人延续价值超过最低收益点后,由于激励原则的存在,代理人的报酬将增加,相应的委托人的总效用由于激励支出开始降低. 在代理人获得最高收益后,其获得的收益开始减少,这是因为,代理人效用的增加已经在很大程度上对委托人的利益造成损害,激励原则需要适时调整.

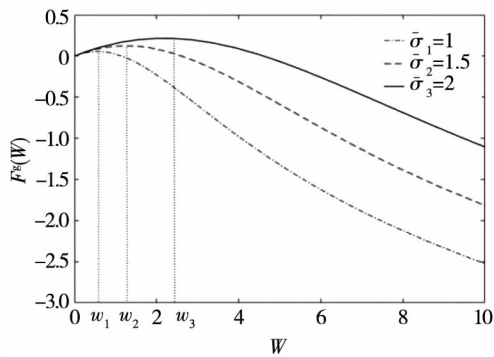


图 1 当 $\bar{\sigma}$ 分别取 1、1.5 和 2 时,委托人效用 (F^g) 随着道德优秀代理人的延续价值 (W) 的变化情况(见式(13))

Fig. 1 For $\bar{\sigma} = 1, 1.5$ and 2, respectively, the effect of the good agent's continuation value (W) on the total utility (F^g) of the principal (see(13))

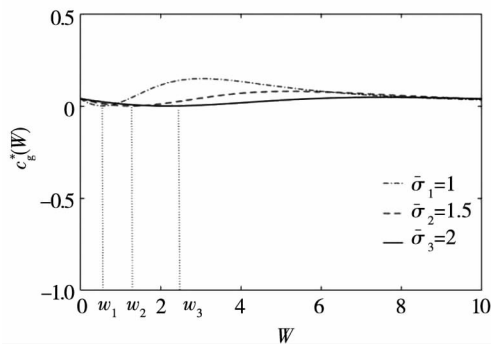


图 2 当 $\bar{\sigma}$ 分别取 1、1.5 和 2 时,最优支付 ($c_g^*(W)$) 随着道德优秀代理人的延续价值 (W) 的变化情况(见式(9))

Fig. 2 For $\bar{\sigma} = 1, 1.5$ and 2, respectively, the effect of the good agent's continuation value (W) on payment ($c_g^*(W)$) (see(9))

2) 图 3 与图 4 分别描述了 Knight 不确定下道德差代理人的延续价值对其委托人总效用的影

响以及自身报酬的变化趋势. 从图 3 可以发现,随着 Knight 不确定度的增大,委托人的总效用函数曲线随着道德差代理人的延续价值的增加上升更加迅速,并且图形峰值增大,表明道德差代理人同样具有这种因对未来的不确定性而产生的专注,道德差代理人也会竭尽全力努力工作,使得委托人总效用快速累积. 可以看出,委托人的总效用在达到峰值后不再增加,与此同时,如图 4 所示,代理人的报酬变为 0. 这说明道德差代理人的这种投机(见图 8 所示)并不会长久,契约在执行过程中将会适时终止. 这里隐含的是,契约精神或者说契约原则对道德差代理人具有天然的自动排斥,即在契约执行过程中,道德差代理人将会被筛选并剔除出局.

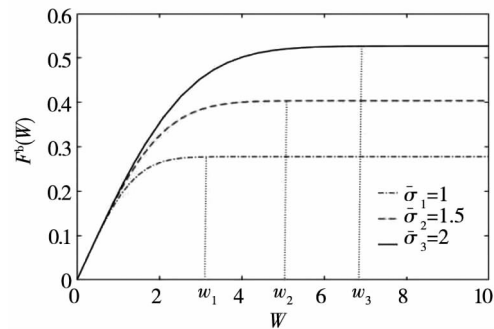


图 3 当 $\bar{\sigma}$ 分别取 1、1.5 和 2 时,委托人效用 (F^b) 随着道德差代理人的延续价值 (W) 的变化情况(见式(14))

Fig. 3 For $\bar{\sigma} = 1, 1.5$ and 2, respectively, the effect of the bad agent's continuation value (W) on the total utility (F^b) of the principal (see(14))

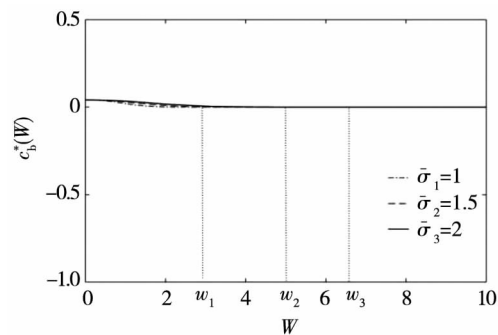


图 4 当 $\bar{\sigma}$ 分别取 1、1.5 和 2 时,最优支付 ($c_b^*(W)$) 随着道德差代理人的延续价值 (W) 的变化情况(见式(12))

Fig. 4 For $\bar{\sigma} = 1, 1.5$ and 2, respectively, the effect of the bad agent's continuation value (W) on payment ($c_b^*(W)$) (see(12))

3) 图 5 与图 6 分别描述了在同一个 Knight 不确定下,不同道德水平代理人的延续价值对委托人总效用的影响情况和代理人所获报酬随自身

延续价值增加的变化情况. 如图所示, 道德差代理人给委托人带来更高的效用, 这是因为委托人支付给道德差代理人的报酬一直处于递减状态, 直至契约终止; 而对于道德优秀代理人来说, 在委托人效用达到最大后, 由于激励原则发挥作用, 委托人支付给道德优秀代理人的报酬开始递增, 委托人效用开始递减. 图 5 和图 6 表明, 短期来看, 道德差的代理人会给委托人带来较大的利益, 但是这种利益无法持久, 契约不能长期执行下去, 道德优秀代理人才能保证契约的可持续性.

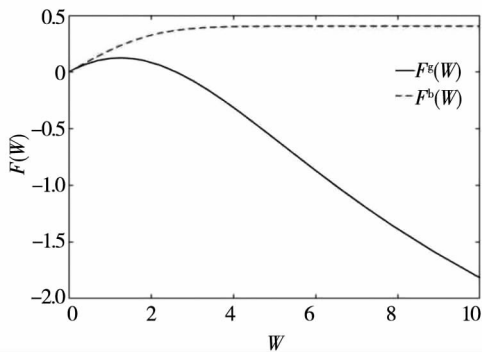


图 5 $\bar{\sigma} = 1.5$ 时, 委托人效用 (F) 随着道德差和道德优秀代理人的延续价值 (W) 的变化情况

Fig. 5 For $\bar{\sigma} = 1.5$, the effect of the good and bad agents' continuation value (W) on the total utility (F) of the principals

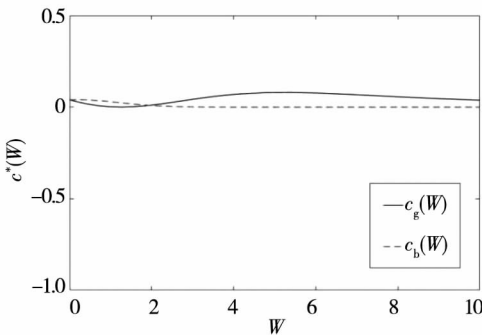


图 6 $\bar{\sigma} = 1.5$ 时, 最优支付 ($c^*(W)$) 随着道德差和道德优秀代理人的延续价值 (W) 的变化情况

Fig. 6 For $\bar{\sigma} = 1.5$, the effect of the good and bad agents' continuation value (W) on payments ($c^*(W)$)

4) 图 7 与图 8 分别描述了道德水平不同的代理人其努力水平与个人延续价值之间的关系. 从图 7 与图 8 可以看出, 在纯道德风险的框架下, 道德优秀或者说有优良职业操守的代理人在其契约存续期的努力水平与其延续价值的获得没有相关性, 道德优秀代理人将一直选择最优努力水平; 然而, 随着自身总效用的增加, 道德差或者说有不良

职业操守的代理人将会在契约执行过程中选择投机, 在持续获得委托人报酬的前提下, 道德差的代理人将会选择不再努力, 努力水平减为 0. 因此, 我们建议, 当委托人与代理人签订一份契约时, 应加强对代理人道德水平、职业操守甚至过往工作记录的调查, 在契约执行过程中, 采取措施对代理人进行适当监察, 以维护自身利益.

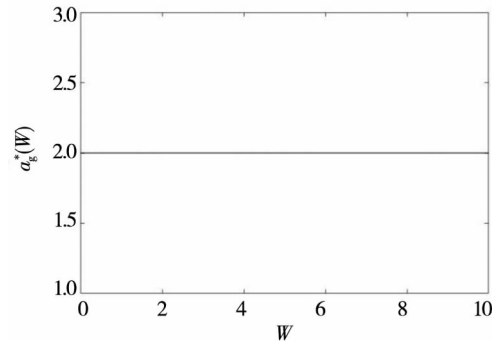


图 7 道德优秀代理人的努力水平 (a_g^*) 与其自身延续价值 (W) 之间的关系

Fig. 7 The effect of the good agent's continuation value (W) on the effort level (a_g^*)

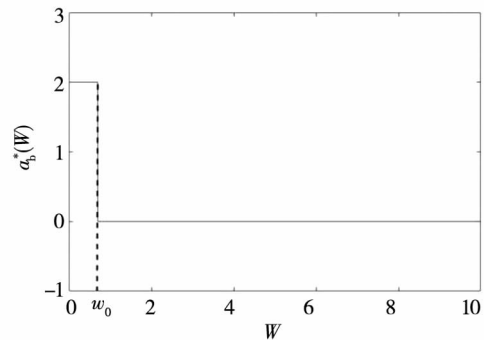


图 8 道德差代理人的努力水平 (a_b^*) 与其自身延续价值 (W) 之间的关系

Fig. 8 The effect of the bad agent's continuation value (W) on the effort level (a_b^*)

4 结束语

本文研究了纯道德风险下带有 Knight 不确定的最优契约问题. 基于彭实戈次线性期望理论框架和文献 [38] 在次线性期望下的随机最优性原理, 推导出代理人的延续价值动力学方程以及在此基础上委托人的效用价值方程, 并对模型进行了数值模拟. 分析表明, 委托人的预期效用不仅受代理人的道德水平影响, 而且还受 Knight 不确

定程度的影响。从文献[9,35,36]中发现,契约中代理人不仅存在道德风险还存在逆向选择,为此作者将本文纯道德风险框架下的结论进一步推广到逆向选择和道德风险共存下基于 Knight 不确

定最优契约设计问题。另外,随着经济的发展,通胀因素对经济合同的双方签订契约会产生影响,为此,我们将进一步探讨通胀风险如何影响委托人和代理人最优动态契约设计。

参 考 文 献:

- [1] Holmström B R. Moral hazard of observability[J]. *Bell Journal of Economics*, 1979, 10(1): 74-91.
- [2] Grossman S J, Hart O. The costs and benefits of ownership: A theory of vertical and lateral integration[J]. *Journal of Political Economy*, 1986, 94(4): 691-719.
- [3] Hart O, Moore J. Property rights and the nature of the firm[J]. *Journal of Political Economy*, 1990, 98(6): 1119-1158.
- [4] Sung J. Optimal contracts under adverse selection and moral hazard: A continuous-time approach[J]. *Review of Financial Studies*, 2005, 18(3): 1021-1073.
- [5] Sannikov Y. Games with imperfectly observable actions in continuous time[J]. *Econometrica*, 2007, 75(5): 1285-1329.
- [6] Zhang Y. Dynamic contracting with persistent shocks[J]. *Journal of Economic Theory*, 2009, 144(2): 635-675.
- [7] Spear S E, Srivastava S. On repeated moral hazard with discounting[J]. *Review of Economic Studies*, 1987, 54(4): 599-617.
- [8] Sannikov Y. A continuous-time version of the principal-agent problem[J]. *Review of Economic Studies*, 2008, 75(3): 957-984.
- [9] Cvitanic J, Wan X, Yang H. Dynamics of contract design with screening[J]. *Management Science*, 2013, 59(5): 1229-1244.
- [10] 聂辉华. 契约理论的起源、发展和分歧[J]. *经济社会体制比较*, 2017, (1): 1-13.
Nie Huihua. Contract theory: Original, development, and divergence[J]. *Comparative Economic & Social Systems*, 2017, (1): 1-13. (in Chinese)
- [11] 朱 琪, 王柳清, 王满四. 不完全契约的行为逻辑和动态阐释[J]. *经济学动态*, 2018, (1): 135-145.
Zhu Qi, Wang Liuqing, Wang Mansi. Behavioral logic and dynamic interpretation of incomplete contract[J]. *Economics Perspective*, 2018, (1): 135-145. (in Chinese)
- [12] 常 亮, 刘凤朝, 杨春薇. 基于市场机制的流域管理 PPP 模式项目契约研究[J]. *管理评论*, 2017, 29(3): 197-206.
Chang Liang, Liu Fengchao, Yang Chunwei. Research of watershed management PPP project contract based on the market mechanism[J]. *Management Review*, 2017, 29(3): 197-206. (in Chinese)
- [13] 刘宏英, 吴能全. 人力资源管理与人力资本管理的纵向差异分析—基于企业契约理论视角[J]. *经济管理*, 2012, 34(7): 193-199.
Liu Hongying, Wu Nengquan. Longitudinal analysis of the difference between human resource management and human capital management: Based on the enterprise contract theory perspective[J]. *Economic Management*, 2012, 34(7): 193-199. (in Chinese)
- [14] 马国旺, 孟卫东, 代建生. 基于公平偏好与学习效应的委托代理契约设计[J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(6): 1548-1556.
Ma Guowang, Meng Weidong, Dai Jiansheng. The principal-agent contract design based on fairness preference and learning effect[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2017, 37(6): 1548-1556. (in Chinese)
- [15] 王 云, 李延喜, 宋金波, 等. 企业生命周期视角下盈余管理方式研究—基于债务契约理论[J]. *管理评论*, 2016, 28(12): 75-91.
Wang Yun, Li Yanxi, Song Jinbo, et al. Study on earning management under the corporate life cycle: Based on the debt covenants theory[J]. *Management Review*, 2016, 28(12): 75-91. (in Chinese)
- [16] 张照忱, 吴彦龙. 企业契约理论视角下的税务筹划动因分析[J]. *改革与战略*, 2012, 28(6): 70-72.

- Zhang Zhaochen, Wu Yanlong. Motive analysis of tax planning based on the contracting theories[J]. *Reformation & Strategy*, 2012, 28(6): 70–72. (in Chinese)
- [17] 钱勇, 曹志来. 煤炭、电力企业与政府博弈: 契约机制与市场界别[J]. *改革*, 2010, (9): 98–106.
Qian Yong, Cao Zhilai. The game between coal, electric power enterprises and the government: Contract mechanism and market sector[J]. *Reform*, 2010, (9): 98–106. (in Chinese)
- [18] 王健, 庄新田. 基于心理契约的基金经理激励机制分类设计[J]. *中国管理科学*, 2011, 19(3): 174–181.
Wang Jian, Zhuang Xintian. Research on the classification of incentive mechanism about money managers based on psychological contract[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2011, 19(3): 174–181. (in Chinese)
- [19] 陈闯, 张岩, 吴晓晖. 风险投资、创始人与高管薪酬——多边代理视角[J]. *管理科学学报*, 2017, 20(6): 78–88.
Chen Chuang, Zhang Yan, Wu Xiaohui. Venture capital, founder and top management compensation: A view from multiple agency theory[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(6): 78–88. (in Chinese)
- [20] 吴昊旻, 墨沈微, 孟庆玺. 公司战略可以解释高管与员工的薪酬差距吗? [J]. *管理科学学报*, 2018, 21(9): 105–117.
Wu Haomin, Mo Shenwei, Meng Qingxi. Is the corporate strategy responsible for the CEO-employee pay gap? [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(9): 105–117. (in Chinese)
- [21] DeMarzo P M, Fishman M J, He Z, et al. Dynamic agency and the Q theory of investment[J]. *Journal of Finance*, 2012, 67: 2295–2340.
- [22] 甘柳, 杨招军, 罗鹏飞. 基于跳风险的动态代理与托宾 Q 理论[J]. *系统工程理论与实践*, 2017, 37(8): 2033–2042.
Gan Liu, Yang Zhaojun, Luo Pengfei. Dynamic agency and Tobin's Q theory based on jump risk[J]. *Systems Engineering: Theory and Practice*, 2017, 37(8): 2033–2042. (in Chinese)
- [23] Knight F H. *Risk, Uncertainty and Profit*[M]. Houghton Mifflin Company, 1921.
- [24] 彭实戈. 非线性期望的理论、方法及意义[J]. *中国科学: 数学*, 2017, 47(10): 1223–1254.
Peng Shige. Theory, methods and meaning of nonlinear expectation theory. *Scientia Sinica Mathematica*, 2017, 47(10): 1223–1254. (in Chinese)
- [25] Chen Z J, Epstein L G. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time[J]. *Econometrica*, 2002, 70: 1403–1443.
- [26] Fei W Y. Optimal portfolio choice based on α -MEU under ambiguity[J]. *Stochastic Models*, 2009, 25: 455–482.
- [27] 费为银, 费晨, 夏登峰, 等. 模型不确定下带通胀的最优消费和投资组合问题研究[J]. *管理工程学报*, 2017, 31(2): 177–184.
Fei Weiyin, Fei Chen, Xia Dengfeng, et al. Optimal consumption and portfolio under inflation and model uncertainty[J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2017, 31(2): 177–184. (in Chinese)
- [28] 李伟, 韩立岩. Knight 不确定条件下的模糊二叉树期权定价模型[J]. *中国管理科学*, 2009, 17(6): 9–16.
Li Wei, Han Liyan. The fuzzy binomial option pricing model under Knightian uncertainty[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2009, 17(6): 9–16. (in Chinese)
- [29] 费为银, 夏登峰, 唐仕冰. Knight 不确定与随机汇率下外商投资决策[J]. *管理科学学报*, 2016, 19(6): 125–135.
Fei Weiyin, Xia Dengfeng, Tang Shibing. On study of a foreign investor's investment with random exchange rate under Knightian uncertainty[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(6): 125–135. (in Chinese)
- [30] 王春峰, 余思婧, 房振明, 等. 中国证券市场 Knight 不确定性度量及资产定价研[J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(5): 1116–1122.
Wang Chunfeng, Yu Sijing, Fang Zhenming, et al. Measuring Chinese stock Knightian uncertainty and its asset pricing analysis[J]. *Systems Engineering: Theory and Practice*, 2015, 35(5): 1116–1122. (in Chinese)
- [31] Koufopoulos K, Kozhan R. Optimal insurance under adverse selection and ambiguity aversion[J]. *Economic Theory*, 2016, 62: 659–687.
- [32] 程红, 汪贤裕, 郭红梅, 等. 道德风险和逆向选择共存下的双向激励契约[J]. *管理科学学报*, 2016, 19(12): 36–45.

- Cheng Hong, Wang Xianyu, Guo Hongmei, et al. Bilateral incentive contract with both moral hazard and adverse selection [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2016, 19(12): 36–45. (in Chinese)
- [33] Chang H, Cvitanić J, Zhou X Y. Optimal contracting with moral hazard and behavioral preferences[J]. *J. Math. Anal. Appl.* 2015, 428: 959–981.
- [34] Piskorskia T, Westerfield M. Optimal dynamic contracts with moral hazard and costly monitoring[J]. *Journal of Economic Theory*, 2016, 166: 242–281.
- [35] Maréchal F, Thomas L. The optimal contract under adverse selection in a moral-hazard model with a risk-averse agent[J]. *Games*, 2018, 9/article 12: 1–22.
- [36] Packham M. Optimal contracts under competition when uncertainty from adverse selection and moral hazard are present[J]. *Statistics and Probability Letters*, 2018, 137: 99–104.
- [37] Fei W Y, Fei C. Optimal stochastic control and optimal consumption and portfolio with G-Brownian motion[EB/OL]. arXiv:1309.0209v1, 2013.

Dynamics of contract design with moral hazards under Knightian uncertainty

*FEI Chen*², *YU Peng*¹, *FEI Wei-yin*^{1*}, *YAN Li-tan*²

1. Department of Financial Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China;
2. Glorious Sun School of Business and Management, Donghua University, Shanghai 200051, China

Abstract: This paper studies a principal-agent problem in continuous time with ambiguity, an uncertainty except probabilistic uncertainty with the known probability distribution. The effects of an agent's moral hazard on the execution and lasting of a contract are studied. Firstly, the dynamic equations of the agent's continuation value as well as the principal's expected profit are established. Then, according to the theory of stochastic optimal control and Peng's sublinear expectation theory, the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation of the principal's value function, as well as the expression of the principal's optimal payment and the agent's optimal effort level, is constructed. Finally, numerical simulations are provided to explain the effects of Knightian uncertainty on the optimal dynamic contract and the two parties' optimal strategies.

Key words: principal-agent; sublinear expectation; pure moral hazard; incomplete contract theory; nonlinear dynamic programming principle