资产收益序列相依下的多阶段投资博弈模型①

周忠宝[1]，任甜甜[1]，肖和录[2]，金倩颖[1]，吴士健[3*]
（1. 湖南大学工商管理学院，长沙 410082；2. 湖南师范大学商学院，长沙 410081；
3. 山东科技大学经济管理学院，青岛 266590）

摘要：现有投资组合优化研究普遍假设投资者之间相互独立，且假定标的资产在不同阶段的收益序列不具相关性. 然而在实际投资过程中，投资者往往是相互影响，资产收益序列也存在相依特征. 基于多阶段投资组合优化和纳什均衡理论，利用相对绩效来刻画投资者之间的博弈现象，以每个投资者的相对终端财富的期望效用水平为目标，构建多阶段投资组合博弈模型. 在资产收益序列相依情形下，给出了纳什均衡投资策略和相应值函数的解析表达式，以及纳什均衡投资策略与传统策略的关系. 采用累计经验分布函数和夏普比率等指标，对纳什均衡投资策略与传统策略进行仿真比较，分析了纳什均衡投资策略随投资者反应敏感系数的变化趋势. 结果表明：相比于传统的投资策略，当考虑竞争对手的相对绩效时，纳什均衡策略投资者更愿意冒高风险去追求高收益；并且投资者的反应敏感系数越大，其对风险的偏好程度也越高.

关键词：资产收益序列相依；多阶段投资组合博弈模型；纳什均衡；指数效用函数
中图分类号：F830.59　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－9807(2019)07－0066－23

0　引　言

动态投资组合优化问题一直都是金融领域的研究热点之一. 对于投资者来说，如何在选定的标的资产上进行财富分配，从而实现自身终端财富最大化，是他们所最为关注的问题. 针对投资组合优化问题的研究，目前常用的方法都是将其视为一个单独的动态优化问题，不考虑其他投资者的投资行为对自身所产生的影响. 然而在实际投资活动中，不同投资者之间的决策过程往往会存在某种联系. 很多研究也表明投资者制定策略不仅仅要考虑自身效用达到最大化，同时也要考虑其竞争对手的表现[1－4]，如果忽略其竞争对手的信息，在某种程度上是一种盲目行为. 针对已有研究所存在的局限性，将不同投资者之间的相互影响作用考虑到投资组合优化当中，并将彼此之间的这种影响视为一种博弈现象，在非零和博弈框架下讨论投资者如何制定相应的投资策略.

Espinosa 和 Touzi[4] 首次提出用相对绩效来刻画投资者之间的博弈关系，并在连续时间框架下，运用非零和随机微分博弈模型来解决多个相互作用的投资者最优投资决策问题. 自此之后，许多学者也对 Espinosa 和 Touzi[4] 的研究进行了推广，在不同的情形下讨论投资者之间的相对绩效问题，如：Bensoussan 等[5]，Guan 和 Liang[6]，Chi 和 Wong[7]，Chi 等[8]，Deng 等[9]，Wang 等[10] 以及 Sun 和 Yong[11]. 然而，上述关于投资组合博弈问题的研究都局限于连续时间优化问题，而离散时间的多阶段投资组合博弈的研究却甚少. 然而，在现实的金融市场中，投资者的决策过程和所能观测到的金融数据往往都是离散的，离散时间的投

① 收稿日期：2018－03－16；修订日期：2019－02－03.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(71771082；71801091)；湖南省杰出青年科学基金资助项目(2017JJ1012；山东省自然科学基金资助项目(ZR2019MG030).
通讯作者：吴士健(1977—)，男，山东齐河人，副教授. Email：everwsj@163.com

资组合模型能够更加有效地刻画实际投资过程、提供可供操作的投资建议. 因此,利用投资者之间的相对绩效来刻画其博弈关系,在离散时间框架下构建了多阶段投资组合博弈模型更具实践意义.

显而易见,投资市场中资产收益序列的相关特性假设将影响投资策略的制定. 然而,已有多阶段投资组合优化问题的研究多数假定资产收益序列在各阶段是相互独立的,如:Li 和 Ng[12],Zhu 等[13],郭文旌和胡奇英[14], Cui 等[15], Zhou 等[16],周忠宝等[17]. 然而很多学者对此种假设的合理性提出了质疑,认为该假设并不一定与金融市场的实际情况相符合. 为此,许多研究者对资产序列的统计特性做了大量的实证研究. 实证结果表明,资产收益序列在不同阶段往往存在某种相依关系,忽略这种相依关系往往会导致投资策略的无效性[18-22]. 此外,许多研究者也在理论上对资产序列相依情形下的投资组合优化问题进行了相应探讨[23-27]. 这表明传统的资产收益序列独立的前提假设过于苛刻,与实际投资情形是不符的. DeMiguel 等[28]假定资产收益序列满足一阶向量自回归过程(VAR(1)),并通过大量的实证分析阐述了资产收益序列相依性能够在很大程度上提高投资策略的实际绩效. 在 DeMiguel 等[28]的实证研究基础上,假定资产收益序列服从 VAR(1) 过程,结合所提出的多阶段投资组合博弈模型,进一步讨论资产收益序列的相依特征对投资策略所产生的影响.

基于上述研究思路,在 Espinosa 和 Touzi[4]的研究框架下,结合资产收益序列相依特征,讨论离散时间的多阶段投资组合优化博弈问题. 首先,在离散时间框架下,以相对绩效来刻画投资者之间的博弈关系,以实现每个投资者相对终端财富期望效用最大化为投资目标,构建多阶段投资组合博弈模型. 其次,在负指数效用理论框架下,利用动态规划方法分别求出投资者的纳什均衡投资策略和相应值函数的解析表达式,并进一步给出了纳什均衡投资策略与传统策略的关系. 最后,仿真分析部分选取了累计经验分布函数和夏普比率两个主要指标来评价策略的绩效,在考虑博弈与不考虑博弈两种情形下,分别比较了不同风险厌恶系数、反应敏感系数下纳什均衡策略和传统策略投资绩效的差异,并分析了纳什均衡投资策略下的收益——风险水平随反应敏感系数的变化趋势. 仿真结果表明:相比于传统的投资策略,当考虑竞争对手的相对绩效时,投资者更愿意冒高风险去追求高收益,进而拉大自身与对手之间的财富差距. 而且投资者的反应敏感系数越大,其对风险的偏好程度也越高. 区别于已有的动态投资组合博弈问题的研究,首次在离散时间框架下,将投资者之间的相对绩效融入投资博弈问题中,构建相应的多阶段投资组合博弈模型. 此外,在一个更弱的市场假设条件下,利用动态规划方法求得纳什均衡投资策略的解析表达式,在一定程度上,该研究拓展了动态投资组合博弈理论研究,对投资者的策略优化也具有指导作用.

1　市场假设与模型构建

1.1　金融市场假设

假设市场中存在 m 种风险资产和 1 种无风险资产,无风险资产的收益率在各个投资阶段是确定的,风险资产的收益率为随机变量. 投资者在投资期初以初始财富 W_0 参与投资,开始进行为期 T 个阶段的投资组合活动. 在每个阶段之初,投资者会将自身拥有的财富值重新分配于上述市场中的 $m+1$ 种资产,以实现终端财富水平的期望效用最大化的目标. 在第 t(时刻在 t 到 $t+1$)阶段,无风险资产收益率为常量,记为 r_t, m 只风险资产收益率所构成的随机向量记为 $\boldsymbol{X}_t = [X_{t1}, X_{t2}, \cdots, X_{ti}, \cdots, X_{tm}]'$. 假定 $\boldsymbol{X}_t$ 存在序列相关性,使得收益率 $\boldsymbol{X}_t$ 依赖于 t 阶段以前的收益率序列的历史信息. 运用向量自回归模型刻画风险资产收益率的序列相关性,即本期风险资产收益率会受其上期收益率的影响,表示形式如下

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为 m 维常数项向量, $\boldsymbol{\Phi}$ 为 $m \times m$ 维的变量参数矩阵,随机误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_t)$, $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 为 $m \times m$ 维的正定矩阵. 令 $\boldsymbol{\Gamma}_t$ 表示 X_t 时间可获得的影响风险资产收益的信息,则 $\boldsymbol{X}_t \mid \boldsymbol{\Gamma}_{t-1} \sim N(\boldsymbol{\mu}_t, \boldsymbol{\Sigma}_t)$,表示在给定 $\boldsymbol{\Gamma}_{t-1}$ 情况下, $\boldsymbol{X}_t$ 的条件概率分布服从 m 维的标准正态分布,其条件均值 $\boldsymbol{\mu}_t = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_t \mid \boldsymbol{\Gamma}_{t-1}) = \mathrm{E}_{t-1}(\boldsymbol{X}_t) = v + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{X}_{t-1}$,条件协方差矩阵 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_t \mid$

$\boldsymbol{\Gamma}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_t$.

1.2 资产收益序列相依投资组合双方博弈模型构建

基于上述市场假设,假设市场中存在两个相互影响的投资者 $k = 1,2$. 投资者 k 在投资期初以初始财富 W_0^k 参与投资,开始进行为期 T 个阶段的投资组合活动. 在每个阶段之初,投资者会将拥有的所有资产重新分配于市场上的 $m+1$ 种资产. 由于市场中的投资者对效用偏好是互不相同的,此处记投资者 k 的效用函数为 U_k,其中 $k = 1,2$. 进一步假设市场中投资者是已知博弈对手的特征、战略组合和支付水平等相关信息,通过动态调整投资策略,使得自身终端财富最大化的同时扩大与竞争者的终端财富的差距,从而实现终端相对财富水平所带来的期望效用最大化. 基于上述建模思路,投资者 k 会选择投资决策 u^k 来最大化如下形式的期望效用函数

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U_k((1-\alpha_k)W_T^{u^k} + \alpha_k(W_T^{u^k} - W_T^{u^m}))] = \\ \mathrm{E}[U_k(W_T^{u^k} - \alpha_k W_T^{u^m})] \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $W_T^{u^k}$ 表示投资者 k 在投资决策 $\boldsymbol{u}^k$ 下所得到的终端财富值, $m \neq k \in \{1,2\}$, $\alpha_k \in [0,1)$ 反映了投资者 k 对其他竞争者财富值变动的反应敏感程度. 博弈双方的投资策略 $\boldsymbol{u}^{1*}$ 和 $\boldsymbol{u}^{2*}$ 构成的纳什均衡 $\boldsymbol{\pi}^* = (\boldsymbol{u}^{1*}, \boldsymbol{u}^{2*})$ 应满足如下条件

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[U_1(W_T^{u^1} - \alpha_1 W_T^{u^{2*}})] \leqslant \mathrm{E}[U_1(W_T^{u^{1*}} - \alpha_1 W_T^{u^{2*}})] \\ \mathrm{E}[U_2(W_T^{u^2} - \alpha_2 W_T^{u^{1*}})] \leqslant \mathrm{E}[U_2(W_T^{u^{2*}} - \alpha_2 W_T^{u^{1*}})] \end{aligned} \tag{3}$$

记投资者 k 在 t 阶段初的财富为 W_t^k,令 $\boldsymbol{u}_t^k = (u_{t1}^k, u_{t2}^k, \cdots, u_{tm}^k)$,其中, u_{ti}^k 表示 t 阶段投资者投资于第 i 种风险资产的财富值, $i = 1, 2, \cdots, m$, $t = 0, 1, \cdots, T-1$. 在满足自融资的条件下,投资者 k 在 $t+1$ 时刻的绝对财富动态过程可以表示为如下形式

$$\begin{aligned} W_t^k &= (\boldsymbol{u}_{t-1}^k)' \boldsymbol{X}_t + (W_{t-1}^k - \boldsymbol{1}' \boldsymbol{u}_{t-1}^k) r_t \\ &= r_t W_{t-1}^k + (\boldsymbol{u}_{t-1}^k)' \breve{\boldsymbol{X}}_t \end{aligned}$$

由于投资者会考虑竞争对手的财富水平,此时可用自身财富和自身财富与竞争者财富差距的加权平均值来定义投资者的相对财富,其满足如下动态方程

$$\begin{aligned} W_t^k - \alpha_k W_t^m = (W_{t-1}^k - \alpha_k W_{t-1}^m)\ r_t + \\ \breve{\boldsymbol{X}}_t(\boldsymbol{u}_{t-1}^k - \alpha_k \boldsymbol{u}_{t-1}^m) \end{aligned}$$

这里, $\breve{\boldsymbol{X}}_t = \boldsymbol{X}_t - r_t \boldsymbol{1}$ 为超额收益率序列,则其条件均值记为

$$\begin{aligned} \breve{\boldsymbol{\mu}}_t &= \mathrm{E}_{t-1}(\breve{\boldsymbol{X}}_t | \boldsymbol{\Gamma}_{t-1}) = \mathrm{E}_{t-1}(\breve{\boldsymbol{X}}_t) \\ &= \mathrm{E}_{t-1}(X_t) - r_t \boldsymbol{1} = v + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{X}_{t-1} - r_t \boldsymbol{1} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{1} = [1,1,\cdots,1]'$ 为 $m \times 1$ 维的常数向量, $t = 0, 1, 2, \cdots, T-1$, $m \neq k \in \{1,2\}$, $\alpha_k \in [0,1)$.

据此,则可以构建如下考虑资产序列相依情形下的多阶段投资组合博弈模型.

投资者 1 的最优策略应满足

$$\begin{aligned} &\max_{u^1} \mathrm{E}[U_1((1-\alpha_1)W_T^1 + \alpha_1(W_T^1 - W_T^2))] \\ &\text{s.t.}\quad W_t^1 = W_{t-1}^1 r_t + (\boldsymbol{u}_{t-1}^1)' \breve{\boldsymbol{X}}_t \quad t = 1,2,\cdots,T \\ &\qquad\ W_t^2 = W_{t-1}^2 r_t + (\boldsymbol{u}_{t-1}^2)' \breve{\boldsymbol{X}}_t \quad t = 1,2,\cdots,T \\ &\qquad\ \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad t = 1,2,\cdots,T \end{aligned} \tag{4}$$

投资者 2 的最优策略应满足

$$\begin{aligned} &\max_{u^2} \mathrm{E}[U_2((1-\alpha_2)W_T^2 + \alpha_2(W_T^2 - W_T^1))] \\ &\text{s.t.}\quad W_t^2 = W_{t-1}^2 r_t + (\boldsymbol{u}_{t-1}^2)' \breve{\boldsymbol{X}}_t \quad t = 1,2,\cdots,T \\ &\qquad\ W_t^1 = W_{t-1}^1 r_t + (\boldsymbol{u}_{t-1}^1)' \breve{\boldsymbol{X}}_t \quad t = 1,2,\cdots,T \\ &\qquad\ \boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{X}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\cdots,T \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\alpha_k \in [0,1)$ 表示投资者 k $(k = 1,2)$ 对其竞争者财富值变动的敏感程度.

2 资产序列相依情形下的博弈模型求解

指数效用函数被广泛应用于效用理论框架下的投资组合研究,如 Soyer 和 Tanyeri[29],Çanakolu 和 Özekici[30],Bodnar 等[18]. 基于上述研究,假定投资者 k 的相对绩效满足如下负指数型效用函数

$$U_k(\tilde{W}_t^k) = -\exp(-\beta_k \tilde{W}_t^k) \tag{6}$$

这里，$t=0,1,\cdots,T-1$，$\beta_k>0$，表示投资者 k 的风险厌恶程度. $\tilde{W}_t^k$ 表示 t 时刻投资者 k 的相对财富，即投资者自身财富和自身财富与竞争者财富差距的加权平均，其数学表达形式如下

$$\tilde{W}_t^k=(1-\alpha_k)W_t^k+\alpha_k(W_t^k-W_t^m)$$

其中 $m\neq k\in\{1,2\}$，$\alpha_k\in[0,1)$ 表示投资者 k 对其他投资者财富值变动反应的敏感程度. 假设市场中投资者之间存在竞争与攀比关系时，其相对绩效不仅取决于各个投资者自身的财富水平，同时还取决于自身与其竞争者的财富差距. α_k 的值较大时，表明投资者 k 越为在意自身与其竞争者的财富差距.

记 $\tilde{W}_t^k=W_t^k-\alpha_kW_t^m$，$\tilde{\boldsymbol{u}}_t^k=\boldsymbol{u}_t^k-\alpha_k\boldsymbol{u}_t^{m*}$，$\tilde{\boldsymbol{u}}_t^{k*}=\boldsymbol{u}_t^{k*}-\alpha_k\boldsymbol{u}_t^{m*}$，状态转移过程可简化为 $\tilde{W}_{t+1}^1=\tilde{W}_t^1r_{t+1}+(\tilde{\boldsymbol{u}}_t^1)'\breve{\boldsymbol{X}}_{t+1}$. 则最优化问题转化为如下形式

$$\begin{aligned}V(0,\tilde{W}_0^k,\boldsymbol{\Gamma}_0)&=\max_{\{u_s^k\}_{s=0}^{T-1}}\mathrm{E}_t[U(\tilde{W}_T^k)]\\&=\max_{\{u_s^k\}_{s=0}^{T-1}}\mathrm{E}_t[-\exp(-\beta_k\tilde{W}_T^k)],\quad\beta_k>0\end{aligned}\tag{7}$$

令 $g(T-t,\tilde{W}_{T-t}^k,\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-t}^k,\boldsymbol{\Gamma}_{T-t})$ 表示投资者 k 在 $T-t$ 阶段选择投资组合策略 $\boldsymbol{u}_{T-t}^k$ 时的相对财富水平的期望效用，再定义

$$\begin{aligned}&V(T-t,\tilde{W}_{T-t}^k,\boldsymbol{\Gamma}_{T-t})\\&\quad=\max_{u_{T-t}^k}g(T-t,\tilde{W}_{T-t}^k,\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-t}^k,\boldsymbol{\Gamma}_{T-t})\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&g(T-t,\tilde{W}_{T-t}^k,\tilde{u}_{T-t}^k,\boldsymbol{\Gamma}_{T-t})=\\&\quad\mathrm{E}_{T-t}[V(T-t+1,\tilde{W}_{T-t+1}^k,\boldsymbol{\Gamma}_{T-t+1})]\end{aligned}$$

此时，根据动态规划原理则有

$$\begin{aligned}&V(T-t,\tilde{W}_{T-t}^k,\boldsymbol{\Gamma}_{T-t})=\\&\quad\max_{u_{T-t}^k}\mathrm{E}[V(T-t+1,\tilde{W}_{T-t+1}^k,\boldsymbol{\Gamma}_{T-t+1})]\end{aligned}\tag{8}$$

基于此，有如下定理 1 成立.

定理 1 假设市场中博弈的投资者 k（$k=1,2$）效用函数为负指数型，且在 $T-t$ 阶段时，风险资产收益率 $\boldsymbol{X}_{T-t}$ 服从 VAR(1) 过程，$\boldsymbol{X}_{T-t}|\boldsymbol{\Gamma}_{T-t-1}\sim N(\boldsymbol{\mu}_{T-t},\boldsymbol{\Sigma}_{T-t})$，无风险资产收益率为常数 r_{T-t}，其中 $t=0,1,\cdots,T-1$. 则纳什均衡投资策略 $\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*}$ 和纳什均衡值函数 Π_{T-t}^{k*} 可分别表示为

$$\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*}=\begin{cases}\dfrac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T,\ t=1,\\[2ex]\dfrac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\left(\prod\limits_{i=T-t+2}^{T}r_i\right)^{-1}\times\\[2ex]\left(\begin{array}{l}\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\mu}_{T-t+1}-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}\\\times(\breve{v}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\end{array}\right),\ t=2,3,\cdots,T.\end{cases}\tag{9}$$

$$\Pi_{T-t}^{k*}=\begin{cases}-\exp(-\beta_kr_T\tilde{W}_{T-1}^k-\dfrac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_T\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T),\\\mathrm{t}=1,\\-\left(\prod\limits_{i=T-t+1}^{T-1}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|\right)^{-\frac{1}{2}}\times\\\exp(-\beta_k\tilde{W}_{T-t}^k\prod\limits_{i=T-t+1}^{T}r_i-\sum\limits_{i=T-t+2}^{T}c_i)\times\\\exp(-\dfrac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-t+1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}),\\t=2,3,\cdots,T\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{T-t+2}=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}\boldsymbol{\Phi},\\&c_{T-t+2}=\frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})'\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{T}-t+2}^{-1}\times\\&\qquad(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}),\\&\qquad k\neq m\in\{1,2\},\\&\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}=\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+1}+\boldsymbol{\Phi}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-t}+r_{T-t}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1},\\&\qquad\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+1}=\boldsymbol{v}-r_{T-t+1}\boldsymbol{1}.\end{aligned}$$

证明 以投资者 1 为例，从模型的边界条件 $V(T,\tilde{W}_T^1,\boldsymbol{\Gamma}_T)=-\exp(-\beta_1\tilde{W}_T^1)$ 进行逆向递推，则求解 $T-1$ 阶段的最优决策，可得

$$\begin{aligned}&g(T-1,\tilde{W}_{T-1}^1,\tilde{u}_{T-1}^1,\boldsymbol{\Gamma}_{T-1})\\&\quad=\mathrm{E}_{T-1}[U(\tilde{W}_{T-1}^1r_T+(\tilde{u}_{T-1}^1)'\breve{X}_T)]\\&\quad=-\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-1}^1r_T)\mathrm{E}_{T-1}[\exp(-\beta_1(\tilde{u}_{T-1}^1)'\breve{X}_T)]\\&\quad=\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-1}^1r_T)\times(-\exp[-\beta_1((\tilde{u}_{T-1}^1)'\breve{\mu}_T-\end{aligned}$$

$$\frac{\beta_1}{2}(\tilde{u}_{T-1}^1)'\boldsymbol{\Sigma}_T\tilde{u}_{T-1}^1)]]) \tag{11}$$

此时,可得投资者 1 在 $T-1$ 阶段的最优决策应满足如下条件

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-1}^{1*} = \frac{1}{\beta_1}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T \tag{12}$$

同理,投资者 2 最优决策满足如下条件

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-1}^{2*} = \frac{1}{\beta_1}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T \tag{13}$$

联立方程(12)和方程(13)则有如下方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{T-1}^{1*} = \dfrac{1}{\beta_1}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T + \alpha_1\boldsymbol{u}_{T-1}^{2*}\\ \boldsymbol{u}_{T-1}^{2*} = \dfrac{1}{\beta_2}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T + \alpha_2\boldsymbol{u}_{T-1}^{1*}\end{cases} \tag{14}$$

通过求解方程组(14),则在 $T-1$ 阶段时,投资者 1 和投资者 2 的纳什均衡策略可以统一表示为

$$\boldsymbol{u}_{T-1}^{k*} = \frac{\beta_m + \alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T \tag{15}$$

其相应的纳什均衡值函数为

$$\Pi_{T-1}^{k*} = -\exp(-\beta_k\tilde{W}_{T-1}^k r_T - \frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_T\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T) \tag{16}$$

此处, $k \neq m \in \{1, 2\}$, $\breve{\boldsymbol{\mu}}_T = \breve{\boldsymbol{v}}_T + \boldsymbol{\Phi}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-1} + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}$, $\breve{\boldsymbol{v}}_T = \boldsymbol{v} - r_T\boldsymbol{1}$. 故可证明定理 1 在 $T-1$ 阶段成立.

运用数学归纳法证明定理 1 在 $T-t$ $(t = 2, \cdots T)$ 阶段成立,同样以投资者 1 为例.

1)逆推至 $T-2$ 阶段,可得

$$\begin{aligned}&g(T-2,\tilde{W}_{T-2}^1,\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1,\boldsymbol{\Gamma}_{T-2})\\&= \mathrm{E}_{T-2}[-\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-1}^1 r_T - \frac{1}{2}\breve{s}_T)]\\&= -\mathrm{E}_{T-2}[\exp(-\beta_1(\tilde{W}_{T-2}^1 r_{T-1} + (\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1)'\boldsymbol{X}_{T-1})r_T - \frac{1}{2}\breve{s}_T)]\\&= -\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-2}^1 r_T r_{T-1})\mathrm{E}_{T-2}\times\\&\quad[\exp(-\beta_1 r_T(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1)'\breve{\boldsymbol{X}}_{T-1} - \frac{1}{2}\breve{s}_T)]\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\breve{s}_T = \breve{\boldsymbol{\mu}}'_T\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T$,根据一阶自回归方程展开可得

$$\begin{aligned}\breve{s}_T =& \breve{\boldsymbol{X}}'_{T-1}\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\boldsymbol{\Phi}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-1} + 2\breve{\boldsymbol{X}}'_{T-1}\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}) + \\&(\breve{\boldsymbol{v}}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}(\breve{v}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\end{aligned}$$

进一步得

$$\begin{aligned}&g(T-2,\tilde{W}_{T-2}^1,\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1,\boldsymbol{\Gamma}_{T-2})\\&= -\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-2}^1 r_T r_{T-1})\mathrm{E}_{T-2}[\exp(-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{X}}'_{T-1}\boldsymbol{B}_T\breve{\boldsymbol{X}}_{T-1} - \\&\quad\boldsymbol{b}_T(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1)'\breve{\boldsymbol{X}}_{T-1} - c_T)]\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_T = \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\boldsymbol{\Phi}$$

$$\boldsymbol{b}_T(\boldsymbol{u}_{T-2}^1) = \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{v}}_T + \beta_1 r_T(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1)' + r_{T-1}\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{1}$$

$$c_T = \frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{v}}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}(\breve{v}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})$$

根据 Mathai 和 Provost[31] 中的结论,对上式的二次形式求期望可得

$$\begin{aligned}&g(T-2,\tilde{W}_{T-2}^1,\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1,\boldsymbol{\Gamma}_{T-2})\\&\quad= -\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-2}^1 r_T r_{T-1})\,|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}|^{-\frac{1}{2}}\times\\&\quad\exp[-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} - c_T - \\&\quad\frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} - \boldsymbol{\Sigma}_{T-1}\boldsymbol{b}_T(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1))'(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{\Sigma}_{T-1})^{-1}\times\\&\quad\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} - \boldsymbol{\Sigma}_{T-1}\boldsymbol{b}_T(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^1))]\end{aligned}$$

上式中的 $(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{T-1})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1} = (\boldsymbol{\Sigma}_{T-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{T-1}\boldsymbol{B}_T\times\boldsymbol{\Sigma}_{T-1})^{-1}$ 为正定矩阵. 此时可得投资者 1 的最优决策应该满足如下条件

$$\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} = \boldsymbol{\Sigma}_{T-1}\boldsymbol{b}_T(\boldsymbol{u}_{T-2}^{1*})$$

进一步可得投资者 1 在第 $T-2$ 阶段的最优决策满足条件如下

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^{1*} =& \frac{1}{\beta_1 r_T}(\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\times\\&(\breve{\boldsymbol{v}}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\end{aligned} \tag{18}$$

同理,投资者 2 在第 $T-2$ 阶段的最优决策满足条件为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-2}^{2*} =& \frac{1}{\beta_2 r_T}(\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\times\\&(\breve{\boldsymbol{v}}_T + \boldsymbol{r}_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\end{aligned} \tag{19}$$

联立方程(18)和方程(19)则有如下方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{T-2}^{1*} = \dfrac{1}{\beta_1 r_T}(\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})) + \alpha_1 u_{T-2}^{2*}\\ \boldsymbol{u}_{T-2}^{2*} = \dfrac{1}{\beta_2 r_T}(\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_T + r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})) + \alpha_2\boldsymbol{u}_{T-2}^{1*}\end{cases} \tag{20}$$

则在 $T-2$ 阶段,投资者 1 和投资者 2 的纳什均衡策略可以统一表示为

$$u_{T-2}^{k*}=\frac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)r_T}\times \left(\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1}-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_T+r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\right) \tag{21}$$

纳什均衡值函数为

$$\Pi_{T-2}^{k*}=-|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_T\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}|^{-\frac{1}{2}}\exp(-\beta_k\tilde{W}_{T-2}^k\prod_{i=T-1}^{T}r_i-c_T)\times \exp(-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1}) \tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_T=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\boldsymbol{\Phi},$$

$$c_T=\frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{v}}_T+r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})'\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_T+r_{T-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}),$$

此处, $k\neq m\in\{1,2\}$, $\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-1}=\breve{\boldsymbol{v}}_{T-1}+\boldsymbol{\Phi}\breve{X}_{T-2}+r_{T-2}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}$, $\breve{\boldsymbol{v}}_{T-1}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{r}_{T-1}\boldsymbol{1}$.

故可知定理 1 在 $t=T-2$ 时成立.

2)假设定理 1 在 $T-j$ $(j\geqslant 2)$ 阶段成立,则在第 $T-j$ 阶段的纳什均衡策略和纳什均衡值函数可表示为

$$u_{T-j}^{k*}=\frac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}(\prod_{i=T-j+2}^{T}r_i)^{-1}\times \left(\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}\breve{\mu}_{T-j+1}-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+2}^{-1}(\breve{v}_{T-j+2}+r_{T-j+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\right) \tag{23}$$

$$\Pi_{T-j}^{k*}=-(\prod_{i=T-j+1}^{T-1}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|)-\frac{1}{2}\times \exp(-\beta_k\tilde{W}_{T-j}^k\prod_{i=T-j+1}^{T}r_i-\sum_{i=T-j+2}^{T}c_i)\times \exp(-\frac{1}{2}\breve{\mu}'_{T-j+1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}\breve{\mu}_{T-j+1}) \tag{24}$$

其中

$$B_{T-j+2}=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+2}^{-1}\boldsymbol{\Phi},$$

$$c_{T-j+2}=\frac{1}{2}(\breve{v}_{T-j+2}+r_{T-j+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+2}^{-1}(\breve{v}_{T-j+2}+r_{T-j+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}),$$

此处,

$k\neq m\in\{1,2\}$, $\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j+1}=\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1}+\boldsymbol{\Phi}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-j}+r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}$, $\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1}=v-r_{T-j+1}\boldsymbol{1}$.

同样,以投资者 1 为例,逆推至 $T-j-1$ 阶段,可得

$$\begin{aligned}
&g(T-j-1,\tilde{W}_{T-j-1}^1,\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^1,\boldsymbol{\Gamma}_{T-j-1})\\
&=-(\prod_{i=T-j+1}^{T-1}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|)^{-\frac{1}{2}}\times\\
&\mathrm{E}_{T-j-1}[\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-j}^1\prod_{i=T-j+1}^{T}r_i-\sum_{i=T-j+2}^{T}c_i)\times\\
&\exp(-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-j+1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j+1})]\\
&=-(\prod_{i=T-j+1}^{T-1}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|)^{-\frac{1}{2}}\times\\
&\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-j-1}^1\prod_{i=T-j}^{T}r_i-\sum_{i=T-j+2}^{T}c_i)\times\\
&\exp(-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{X}}'_{T-j}\boldsymbol{B}_{T-j+1}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-j}-\\
&\boldsymbol{b}_{T-j+1}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^1)'\breve{\boldsymbol{X}}_{T-j}-c_{T-j+1})
\end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{T-j+1}=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$$

$$\boldsymbol{b}_{T-j+1}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^1)=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1}+\beta_1\prod_{i=T-j+1}^{T}r_i(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^1)'+r_{T-j}\boldsymbol{B}_{T-j+1}\boldsymbol{1}$$

$$c_{T-j+1}=\frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1}+r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1}+r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})$$

对上式展开可得

$$\begin{aligned}
&g(T-j-1,\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^1,\tilde{W}_{T-j-1}^1,\boldsymbol{\Gamma}_{T-j-1})\\
&=-(\prod_{i=T-j}^{T-1}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|)^{-\frac{1}{2}}\times\\
&\exp(-\beta_1\tilde{W}_{T-j-1}^1\prod_{i=T-j}^{T}r_i-\sum_{i=T-j+1}^{T}c_i)\times\\
&\exp[-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-j}\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-j}-\\
&\frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-j}-\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}b_{T-j+1}(\tilde{u}_{T-j-1}^1))'\times\\
&(I+B_{T-j+1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-j})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\times\\
&(\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-j}-\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}\boldsymbol{b}_{T-j+1}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^1))]
\end{aligned} \tag{26}$$

根据式(26)可知,投资者 1 在 $T-j-1$ 最优决策应该满足如下条件

$$\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j}=\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}\boldsymbol{b}_{T-j+1}(\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^{1*})$$

进一步,投资者 1 在 $T-j-1$ 的最优决策应该满足如下条件

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^{1*} = \frac{1}{\beta_1}\Big(\prod_{i=T-j+1}^{T} r_i\Big)^{-1}\big(\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}(\breve{v}_{T-j+1} + \boldsymbol{r}_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\big) \tag{27}$$

同理，投资者 2 在 $T-j-1$ 的最优决策应该满足如下条件

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{T-j-1}^{2*} = \frac{1}{\beta_2}\Big(\prod_{i=T-j+1}^{T} r_i\Big)^{-1}\big(\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1} + r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\big) \tag{28}$$

则可以联立式(27)和式(28)得以下方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{T-j-1}^{1*} = \frac{1}{\beta_1}\Big(\prod_{i=T-j+1}^{T} r_i\Big)^{-1}\big(\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j} - \\ \qquad \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1} + \boldsymbol{r}_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\big) + \alpha_1 u_{T-j-1}^{2*} \\ \boldsymbol{u}_{T-j-1}^{2*} = \frac{1}{\beta_2}\Big(\prod_{i=T-j+1}^{T} r_i\Big)^{-1}\big(\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\breve{\mu}_{T-j} - \\ \qquad \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1} + r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\big) + \alpha_2 \boldsymbol{u}_{T-j-1}^{1*} \end{cases} \tag{29}$$

通过求解方程组(29)，投资者 1 和投资者 2 在 $T-j-1$ 阶段纳什均衡策略为

$$\boldsymbol{u}_{T-j-1}^{k*} = \frac{\beta_m + \alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\Big(\prod_{i=T-j+1}^{T} r_i\Big)^{-1} \times \big(\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j} - \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1} + r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})\big) \tag{30}$$

纳什均衡值函数为

$$\Pi_{T-j-1}^{k*} = -\Big(\prod_{i=T-j}^{T-1} |\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|\Big)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\Big(-\beta_k \tilde{W}_{T-j-1}^{k}\prod_{i=T-j}^{T} r_i - \sum_{i=T-j+1}^{T} c_i\Big) \times \exp\Big(-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-j}\boldsymbol{\Sigma}_{T-j}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-j}\Big) \tag{31}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{T-j+1} = \boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-j+1}^{-1}\boldsymbol{\Phi},$$

$$c_{T-j+1} = \frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1} + r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})'\Sigma_{T-j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j+1} + r_{T-j}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1})$$

此处

$k \neq m \in \{1, 2\}$，$\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-j} = \breve{\boldsymbol{v}}_{T-j} + \boldsymbol{\Phi}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-j-1} + r_{T-j-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}$，$\breve{\boldsymbol{v}}_{T-j} = \boldsymbol{v} - r_{T-j}\boldsymbol{1}$.

因而定理1在 $T-j-1$ 阶段也成立. 由数学归纳法的原理可知，定理 1 对于投资阶段 $t = 0,1,\cdots,T-1$ 是成立的.

定理 1 是在资产序列相依框架下求得博弈模型的纳什均衡投资策略和相应值函数，对于资产序列不相依情形以及不存在竞争的传统市场，数学表达上只需对定理 1 中的参数做特殊假定则可以得到相应的最优投资策略和相应的值函数，其主要结论见推论 1 和推论 2.

推论 1 假设市场投资者的效用函数为负指数型，且在 $T-t(t = 0,1,\cdots,T-1)$ 阶段，风险资产收益率序列 $\boldsymbol{X}_{T-t}$ 阶段独立，$\boldsymbol{X}_{T-t} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{T-t}, \boldsymbol{\Sigma}_{T-t})$，无风险资产收益率为常数值 r_{T-t}. 则投资者纳什均衡投资策略 $\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*}$ 和纳什均衡值函数 $\hat{\Pi}_{T-t}^{k*}$ 分别为

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*} = \begin{cases} \frac{\beta_m + \alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T, \\ t = 1, \\ \frac{\beta_m + \alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\Big(\prod_{i=T-j+2}^{T} r_i\Big)-1\,\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}, \\ t = 2,3,\cdots,T. \end{cases} \tag{32}$$

$$\hat{\Pi}_{T-t}^{k*} = \begin{cases} -\exp\Big(-\beta_k r_T \tilde{W}_{T-1}^{k} - \frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_T\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T\Big), \\ t = 1, \\ -\exp\Big(-\beta_k \tilde{W}_{T-t}^{k}\prod_{i=T-t+1}^{T} r_i - \sum_{i=T-t+1}^{T} c_i\Big), \\ t = 2,\cdots,T. \end{cases} \tag{33}$$

其中

$k \neq m \in \{1, 2\}$，$c_{T-t+1} = \frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1})'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}$，$\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1} = \boldsymbol{\mu}_{T-t+1} - \boldsymbol{r}_{T-t+1}$.

通过比较定理 1 和推论 1，不难发现，当考虑资产收益序列相依时，纳什均衡投资策略的制定不仅依赖于资产当期的统计特性，资产收益的前期表现也会影响策略的制定；然而资产收益序列独立情形下的投资策略却只与资产当期的统计特性有关.

此外，在资产序列相依情形下的博弈模型中，只需将投资者 k 对其与竞争对手财富差距的反应敏感系数设置为 $\alpha_k = 0$（表明投资者仅考虑自身财富的期望效用最大化），这也与传统投资组合优化问题（不考虑博弈对手）是一致的. 接下来，从理论上分析纳什均衡投资策略与传统投资策略

之间的联系与区别. 为了方便两种策略之间的比较,此处将投资者 k 所对应的传统最优投资策略和最优值函数表示为如下的推论 2.

推论 2　假设市场中存在两个相互独立的投资者,投资者 $k(k=1,2)$ 效用函数为负指数型,且在 $T-t$ 阶段时,风险资产收益率 $\boldsymbol{X}_{T-t}$ 服从 VAR(1) 过程,$\boldsymbol{X}_{T-t}|\boldsymbol{\Gamma}_{T-t-1}\sim N(\boldsymbol{\mu}_{T-t},\boldsymbol{\Sigma}_{T-t})$,无风险资产收益率为常数 r_{T-t},其中 $t=1,\cdots,T$. 则最优投资策略 $\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*}$ 和最优值函数 V_{T-t}^{k*} 可分别表示为

$$\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*}=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta_k}\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\mu}_T,\\ t=1,\\ \dfrac{1}{\beta_k}\left(\prod\limits_{i=T-t+2}^{T}r_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\mu}_{T-t+1}-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}\times\right.\\ \qquad\left.\left(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}\right)\right),\\ t=2,3,\cdots,T.\end{cases}\tag{34}$$

$$V_{T-t}^{k*}=\begin{cases}-\exp\left(-\beta_k r_T W_{T-1}^{k}-\dfrac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_T\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T\right),\\ t=1,\\ -\left(\prod\limits_{i=T-t+1}^{T-1}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|\right)^{-\frac{1}{2}}\times\\ \exp\left(-\beta_k W_{T-t}^{k}\prod\limits_{i=T-t+1}^{T}r_i-\sum\limits_{i=T-t+2}^{T}c_i\right)\times\\ \exp\left(-\dfrac{1}{2}\breve{\mu}'_{T-t+1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\mu}_{T-t+1}\right),\\ t=2,3,\cdots,T.\end{cases}\tag{35}$$

其中

$$\boldsymbol{B}_{T-t+2}=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}\boldsymbol{\Phi},$$

$$c_{T-t+2}=\frac{1}{2}\left(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}\right)'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}$$

$$\left(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+\boldsymbol{r}_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}\right)\text{ 这里,}$$

$$k\in\{1,2\},\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}=\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+1}+\boldsymbol{\Phi}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-t}+r_{T-t}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1},$$

$$\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+1}=\boldsymbol{v}-r_{T-t+1}\boldsymbol{1}.$$

比较定理 1 和推论 2 中的结论,在资产序列相依情形下,投资者 k ($k\in\{1,2\}$) 纳什均衡投资策略 $\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*}$ 与传统策略 $\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*}$ 的具体关系可以表示为如下形式

$$\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*}=\frac{1}{1-\alpha_k\alpha_m}\left(1+\alpha_k\left(\frac{1}{\beta_m}\Big/\frac{1}{\beta_k}\right)\right)\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*}\tag{36}$$

特别地,假定市场中投资者对自身与其他竞争者的财富差距变动的反应敏感程度相同,则对于所有投资者 k ($k\in\{1,2\}$),其反应敏感系数 $\alpha_k=\alpha_m=\alpha$,则其纳什均衡投资策略 u_{T-t}^{k*} 可以表示为

$$\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*}=\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{1+\alpha}+\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta_m}\Big/\frac{1}{\beta_k}\right)\right]\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*}\tag{37}$$

其中 $k\neq m\in\{1,2\}$. 值得注意的是,资产序列相依情形下所得纳什均衡投资策略与传统投资策略之间的关系与 Espinosa 和 Touzi[4] 中所得结论是一致的.

结合定理 1、推论 1 和推论 2 中结论,可以发现,在资产序列相依情形下,纳什均衡策略与传统策略均受到资产收益当期以及前期表现的影响,而不考虑资产序列相依的投资策略则只与资产收益当期的表现有关,这也体现了资产序列相依特征对投资策略的影响. 但是相比于传统策略,投资者 k 在纳什均衡策略下的财富分配不仅受到自身风险厌恶程度 β_k 的影响,同时取决于其对于自身与对手财富差距的在意程度,即为反应敏感系数 α_k,故纳什均衡投资策略还会受到博弈参与者的投资决策的影响. 由于影响投资者 k 纳什均衡条件下最优策略的主观因素仅取决于 β_k 与 α_k 的取值,然而在上述博弈框架下,投资者可能更加关注于反应敏感系数 α_k 对自身策略的影响. 接下来,主要阐述 α_k 的取值对投资者 k 的纳什均衡策略与收益—风险偏好的影响. 一般而言,投资者的策略与偏好特征会随其反应敏感系数的变化而变化,若 α_k 取值较大时,表明投资者 k 较为在意自身与其竞争者的财富差距,竞争与攀比心理更为明显. 基于此,提出了如下定理 2.

定理 2　假设市场中互相博弈的投资者 k ($k=1,2$) 的效用函数为负指数型,且在 $T-t$ 阶段时,风险资产收益率 X_{T-t} 服从 VAR(1) 过程,$\boldsymbol{X}_{T-t}|\boldsymbol{\Gamma}_{T-t-1}\sim N(\boldsymbol{\mu}_{T-t},\boldsymbol{\Sigma}_{T-t})$,无风险资产收益率为常数 r_{T-t},其中 $t=0,1,\cdots,T-1$. 此时关于 $\alpha_k(k=1,2)$ 有如下结论

(i) 投资者 k ($k=1,2$) 在纳什均衡投资决策的绝对值是关于 $\alpha_k(k=1,2)$ 的递增函数;

(ii) 投资者 k ($k=1,2$) 所得终端财富值的夏普比率与 $\alpha_k(k=1,2)$ 无关;

(iii) 投资者 k ($k=1,2$) 所得终端财富值的

标准差是关于 $\alpha_k(k=1,2)$ 的递增函数；

(iv)若投资者 k $(k=1,2)$ 所得终端超额收益的期望值为正值,此时投资者 k $(k=1,2)$ 所得终端财富的期望值是关于 $\alpha_k(k=1,2)$ 的递增函数,反之则是关于 $\alpha_k(k=1,2)$ 的递减函数.

证明 对定理 1 中所得的投资者 k $(k=1,2)$ 的纳什均衡策略取绝对值表示为 $|\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*}|$,将其最优策略的系数记为 $M^k=\dfrac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}$,则只需证明系数 M^k 关于 α_k 的单调性即可证明结论(i)。对 M^k 关于 α_k 求偏导则有

$$\frac{\partial M^k}{\partial\alpha_k}=\frac{\beta_k+\alpha_m\beta_m}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)^2}>0 \tag{38}$$

由式(38)可得, M^k 关于 α_k 的递增函数,则投资者 k 在纳什均衡投资决策的绝对值 $|\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*}|$ 是关于 α_k 的递增函数;故(i)成立.

由定理 1 可知,对于任意博弈投资者 k $(k=1,2)$,其终端财富值可以表示为

$$\begin{aligned}W_T^k&=\Big(\prod_{i=1}^T r_i\Big)W_0^k+\sum_{j=1}^T\Big(\prod_{i=j+1}^T r_i\Big)\breve{X}_j\,u_{j-1}^{k*}\\&=\Big(\prod_{i=1}^T r_i\Big)W_0^k+\frac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\times\\&\quad\sum_{j=1}^T\breve{\boldsymbol{X}}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\end{aligned} \tag{39}$$

此时投资者 k $(k=1,2)$ 所得终端超额收益为

$$\begin{aligned}W_T^k-\Big(\prod_{i=1}^T r_i\Big)W_0^k&=\frac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\times\\&\quad\sum_{j=1}^T\breve{X}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\end{aligned} \tag{40}$$

则相应投资组合的夏普比率值可以表示为

$$\begin{aligned}SR^k(\alpha_k)&=\frac{\mathrm{E}\Big[W_T^k-\Big(\prod_{i=1}^T r_i\Big)W_0^k\Big]}{\sqrt{\mathrm{Var}\Big[W_T^k-\Big(\prod_{i=1}^T r_i\Big)W_0^k\Big]}}\\&=\frac{\dfrac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\mathrm{E}\Big[\sum_{j=1}^T\breve{\boldsymbol{X}}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\Big]}{\dfrac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\sqrt{\mathrm{Var}\Big[\sum_{j=1}^T\breve{\boldsymbol{X}}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\Big]}}\\&=\frac{E\Big[\sum_{j=1}^T\breve{\boldsymbol{X}}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}1))\Big]}{\sqrt{\mathrm{Var}\Big[\sum_{j=1}^T\breve{\boldsymbol{X}}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\Big]}}\end{aligned} \tag{41}$$

由式(41)可知,投资者 k $(k=1,2)$ 所得终端财富值的夏普比率与 $\alpha_k(k=1,2)$ 无关,故(ii)成立.

此外,由式(39)可知,投资者 k $(k=1,2)$ 终端财富值的标准差可以表示为

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha_k)&=\sqrt{\mathrm{Var}(W_T^k)}\\&=\frac{\beta_m+\alpha_k\beta_k}{\beta_k\beta_m(1-\alpha_k\alpha_m)}\times\\&\quad\sqrt{\mathrm{Var}\Big[\sum_{j=1}^T\breve{\boldsymbol{X}}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\Big]}\end{aligned} \tag{42}$$

由于 $\sqrt{\mathrm{Var}\Big[\sum_{j=1}^T\breve{\boldsymbol{X}}'_j(\boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_j-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{j+1}^{-1}(\breve{\boldsymbol{v}}_{j+1}+r_j\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{1}))\Big]}$ 大于零,结合式(38)和式(42),不难发现投资者 k $(k=1,2)$ 的终端财富值的标准差 $\sigma(\alpha_k)$ 是关于 $\alpha_k(k=1,2)$ 的递增函数,故(iii)成立.

结合(ii)和(iii)所得结论,易得(iv)也是成立的. 综上所述,定理 2 成立.

上述讨论主要是从理论上分析纳什均衡策略的相关特征. 接下来,通过一个简单的数值分析,以阐述纳什均衡策略与传统策略的演化过程. 此处仿真所用数据来源于第 5 节的仿真分析部分,其参数估计结果已列于第 5 节. 模型参数设置为 $\beta_1=1$, $\beta_2=1$, $\alpha_1=0.8$, $\alpha_2=0.2$,投资阶段 $T=10$,投资者 1 与投资者 2 具有相同的风险厌恶系数,这也表明两者的传统策略是相等的;此外,假定投资者 1 的反应敏感系数大于 0.5,投资者 2 的反应敏感系数小于 0.5,表明在多阶段投

资中投资者 1 更为关注两者之间的财富差距，而投资者 2 则更为关注自身的财富水平，关于参数取值的更为详细的解释列于下文的仿真分析中．基于上述模型参数设置，利用蒙塔卡罗方法，随机产生一组满足 VAR(1)过程的资产收益率序列，进而在给定投资路径下比较纳什均衡策略与传统策略的演化过程，两种策略在 6 种风险资产上的财富分配情况如图 1 和图 2 所示．

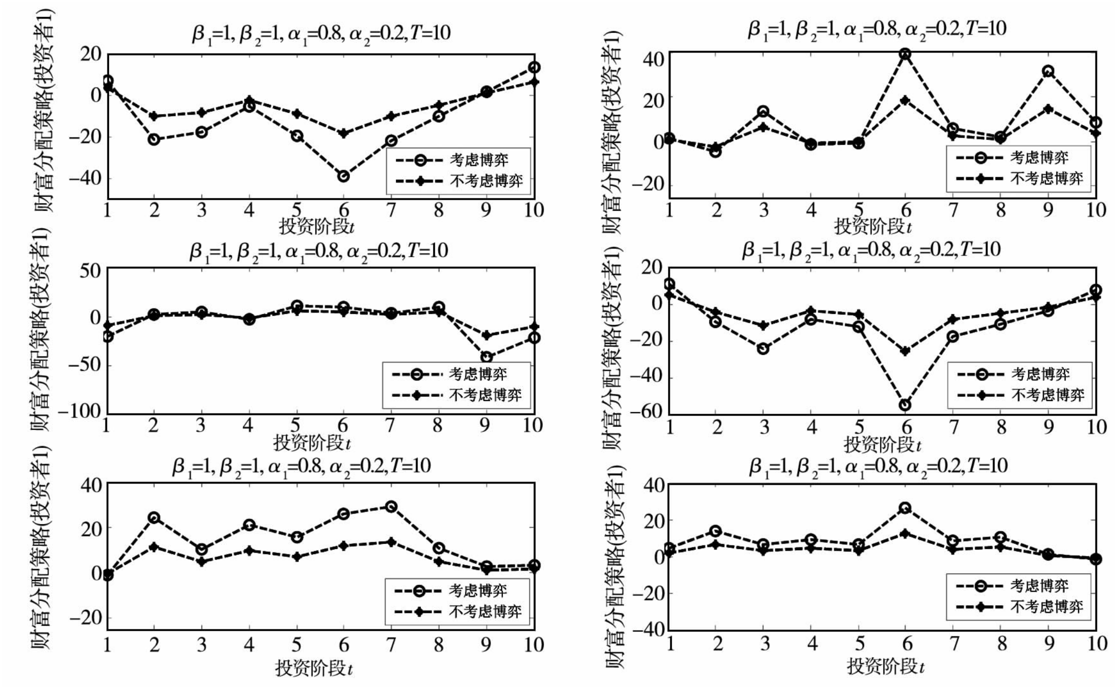

图 1　投资者 1 的财富分配策略

Fig. 1 Wealth distribution strategies of investor 1

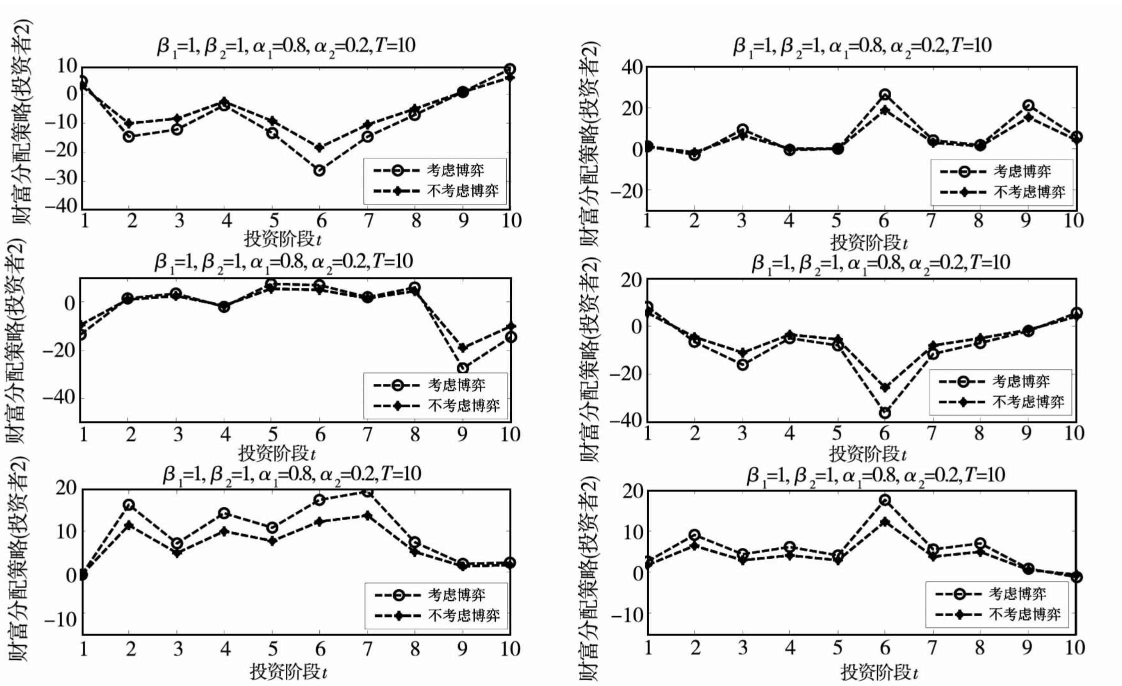

图 2　投资者 2 的财富分配策略

Fig. 2 Wealth distribution strategies of investor 2

结合图 1 与图 2 的数值结果,不难看出,纳什均衡策略与传统策略在各个资产上的财富分配调整方向大致是相同的,这主要是因为财富分配的调整方向主要取决于市场中资产在各个阶段的统计特性. 然而,纳什均衡投资策略下各资产财富分配的调整幅度相比于传统策略都更为明显,尤其是随着投资者的反应敏感系数的变大,相应投资策略在两期之间的调整量就会越大,以投资者 1 在风险资产 2 上的财富分配情况为例,当投资进行到第 5 期时,在纳什均衡投资策略下,投资者 1 在资产 2 上的财富分配增加了 40,而传统策略在资产 2 上的财富调整则只有 20. 由于投资者 2 的反应敏感系数较小,则其纳什均衡投资策略的演化过程与传统策略较为趋近,其相关结果如图 2 所示. 上述策略演化过程进一步验证了理论分析中所给出的纳什均衡投资策略与传统策略的关系.

上述研究主要假定金融市场中只存在两个博弈投资者,然而在实际投资情形中,投资者之间的攀比关系可能构成一个多方博弈问题. 基于此,接下来将对上述模型进行拓展,假定市场中存在 n 个博弈投资者,探讨纳什均衡投资策略的一般形式.

3 收益序列相依投资组合多方博弈模型构建

在资产序列相依框架下,将定理 1 的结论扩展为 n 人博弈的情形. 基于 2.1 节中关于金融市场的假设,假设上述 n 个投资者是相互影响的,且投资者 $k(k=1,\cdots,n)$ 在期初以初始财富 W_0^k 参与投资,开始进行为期 T 个阶段的投资组合活动. 同样在每个阶段之初,投资者会将拥有的所有资产重新分配于市场上的 $m+1$ 种资产. 此处记投资者 k 的相对财富水平下的效用函数为 U_k ,其中 $k=1,\cdots,n$. 此时,投资者 k 的最优化问题可以定义为如下形式

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\Big[U_k\Big(\big(1-\sum_{l\neq k}\alpha_l^k\big)W_T^{u^k}+\sum_{l\neq k}\alpha_l^k\big(W_T^{u^k}-W_T^{u^l}\big)\Big)\Big]=\\&\quad\mathrm{E}\Big[U_k\Big(W_T^{u^k}-\sum_{l\neq k}\alpha_l^kW_T^{u^l}\Big)\Big]\end{aligned}\tag{43}$$

其中 $W_T^{u^k}$ 表示投资者 k 在投资决策 u^k 下所得到的终端财富值, $l\neq k\in\{1,2,\cdots,n\}$, $\alpha_l^k\in[0,1)$,表示投资者 k 对投资者 l 财富变动的反应敏感程度.

上述博弈者所构成的纳什均衡定义为 $\boldsymbol{\pi}^*=(u_1^*,\cdots,u_k^*,\cdots,u_n^*)$,对于任意的投资者 k 皆满足如下的纳什均衡求解条件

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\Big[U_k\Big(W_T^{u^k}-\sum_{l\neq k}\alpha_l^kW_T^{u^{l*}}\Big)\Big]\leqslant\\&\mathrm{E}\Big[U_k\Big(W_T^{u^{k*}}-\sum_{l\neq k}\alpha_l^kW_T^{u^{l*}}\Big)\Big]\end{aligned}\tag{44}$$

记投资者 k 在 t 阶段初的财富为 W_t^k ,令 $u_t^k=(u_{t1}^k,\ u_{t2}^k,\ \cdots,\ u_{tm}^k)$,其中, u_{ti}^k 表示 t 阶段投资者投资于第 i 种风险资产的财富值, $k=1,\cdots,n$, $i=1,2,\cdots,m,t=0,1,\cdots,T-1$.

由于每个投资者都会考虑其他 $n-1$ 个竞争者的财富水平,在满足自融资的条件下,此时可定义存在多个竞争对手的情况下,投资者的相对财富满足如下动态方程

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{t+1}^k&=\big(1-\sum_{l\neq k}\alpha_l^k\big)W_{t+1}^k+\sum_{l\neq k}\alpha_l^k\big(W_{t+1}^k-W_{t+1}^l\big)\\&=W_{t+1}^k-\sum_{l\neq k}\alpha_l^kW_{t+1}^l\\&=r_t\big(W_t^k-\sum_{l\neq k}\alpha_l^kW_t^l\big)+\big(u_t^k-\sum_{l\neq k}\alpha_l^k u_t^l\big)\breve{X}_t\end{aligned}\tag{45}$$

相应地,记 $\tilde{W}_t^k=W_t^k-\sum_l\alpha_l^kW_t^l$, $\tilde{u}_t^k=u_t^k-\sum_l\alpha_l^k u_t^{l*}$, $\tilde{u}_t^{k*}=u_t^{k*}-\sum_l\alpha_l^k u_t^{m*}$,此时状态转移过程可简化为 $\tilde{W}_{t+1}^k=\tilde{W}_t^kr_{t+1}+(\tilde{u}_t^k)'\breve{X}_{t+1}$. 基于以上假设,有如下定理 3 成立.

定理 3 假设市场中博弈的 n 个投资者效用函数为负指数型. 且在 $T-t$ 阶段时,风险资产收益率 X_{T-t} 服从 VAR(1) 过程, $X_{T-t}\mid\boldsymbol{\Gamma}_{T-t-1}\sim N(\boldsymbol{\mu}_{T-t},\boldsymbol{\Sigma}_{T-t})$,无风险资产收益率为常数 r_{T-t} ,其中 $t=0,1,\cdots,T-1$. 则投资者 k ($k=1,2,\cdots,n$) 纳什均衡投资策略和纳什均衡值函数可分别表示为

$$\boldsymbol{\pi}_{T-t}^*=\begin{cases}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T,\\t=1,\\\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\Big(\prod_{i=T-t+2}^{T}r_i\Big)^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}\times\\(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{l})\end{pmatrix},\\t=2,3,\cdots,T.\end{cases}\tag{46}$$

$$\Pi_{T-t}^{k*}=\begin{cases}-\exp(-\beta_k r_T \tilde{W}_{T-1}^k-\frac{1}{2}\breve{\mu}'_T\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\mu}_T),\\ t=1,\\ -(\prod_{i=T-t+1}^{T-1}|I+B_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|)^{-\frac{1}{2}}\times\\ \exp(-\beta_k\tilde{W}_{T-t}^k\prod_{i=T-t+1}^{T}r_i-\sum_{i=T-t+2}^{T}c_i)\times\\ \exp(-\frac{1}{2}\breve{\mu}'_{T-t+1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\mu}_{T-t+1}),\\ t=2,\cdots,T\end{cases}\tag{47}$$

其中投资者 k 对其他 $n-1$ 个竞争者财富差距反应敏感系数构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和博弈投资者的风险厌恶系数构成的向量 $\boldsymbol{B}$ 表示如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -\alpha_2^1 & \cdots & -\alpha_k^1 & \cdots & -\alpha_n^1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\alpha_1^k & -\alpha_2^k & \cdots & 1 & \cdots & -\alpha_n^1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\alpha_1^n & -\alpha_2^n & \cdots & -\alpha_k^n & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{B}=[1/\beta_1,\cdots,1/\beta_k,\cdots,1/\beta_n]'$$

还有

$$\boldsymbol{B}_{T-t+2}=\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}\boldsymbol{\Phi},$$

$$c_{T-t+2}=\frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{l})'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}(\breve{v}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{l}),\ k\in\{1,2,\cdots,n\},\ \breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}=\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+1}+\boldsymbol{\Phi}\breve{\boldsymbol{X}}_{T-t}+r_{T-t}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{l},\ \breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+1}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{r}_{T-t+1}\boldsymbol{1}.$$

证明　由于 $\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$，都存在 $\sum_{l\neq k}|-\alpha_l^k|<1$ 成立，即矩阵中每个主对角元素的模都大于与它同行的其他元素的模的总和，则 $\boldsymbol{A}$ 严格对角占优矩阵. 根据严格对角占优矩阵的性质，$\boldsymbol{A}$ 的可逆矩阵存在. 余下证明过程与定理 1 的证明类似，就不在具体阐述.

参考 Espinosa 和 Touzi[4] 文中的参数设置，不失一般性，假定市场中，所有投资者对自身与其他竞争者的财富差距变动的反应敏感系数相同，则对于所有的 $k=1,\cdots,n$，其反应敏感系数可以简化为如下形式

$$\alpha_l^k=\frac{\alpha}{n-1}\in[0,1)\tag{48}$$

记 $\tilde{W}_t^k=W_t^k-\frac{\alpha}{n-1}\sum_{l\neq k}W_t^l$，$\tilde{\boldsymbol{u}}_t^k=\boldsymbol{u}_t^k-\frac{\alpha}{n-1}\sum_{l\neq k}\boldsymbol{u}_t^{l*}$，$\tilde{\boldsymbol{u}}_t^{k*}=u_t^{k*}-\frac{\alpha}{n-1}\sum_{l\neq k}\boldsymbol{u}_t^{l*}$，此时状态转移过程可简化为 $\tilde{W}_{t+1}^k=\tilde{W}_t^k r_{t+1}+(\tilde{\boldsymbol{u}}_t^k)'\breve{\boldsymbol{X}}_{t+1}$. 此时，投资者 k 对其他 $n-1$ 个竞争者财富差距反应敏感系数构成的矩阵可以简化为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \cdots & -\frac{\alpha}{n-1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{\alpha}{n-1} & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}\tag{49}$$

且 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵可以表示为如下形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)} & \cdots & -\frac{\alpha}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\alpha}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)} & \cdots & 1+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)}\end{bmatrix}_{n\times n}\tag{50}$$

在式(48)的假设下，上述纳什均衡策略可以进一步简化，其相关结论如推论 3 所示.

推论 3　基于上述多方博弈模型参数的设置，则纳什均衡投资策略和纳什均衡值函数可分别表示为

$$\pi_{T-t}^{k*}=\begin{cases}\left((\boldsymbol{A}^{-1})_{kk}\frac{1}{\beta_k}+\sum_{l\neq k}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}\frac{1}{\beta_l}\right)\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T,\\ t=1,\\ \left((\boldsymbol{A}^{-1})_{kk}\frac{1}{\beta_k}+\sum_{l\neq k}(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl}\frac{1}{\beta_l}\right)\times\\ (\prod_{i=T-t+1}^{T}r_i)^{-1}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}-\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1}\times\\ (\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2}+r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{l})\end{matrix}\right),\\ t=2,3,\cdots,T.\end{cases}\tag{51}$$

$$\Pi_{T-t}^{k*}=\begin{cases}-\exp(-\beta_k r_T\tilde{W}_{T-1}^k-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_T\boldsymbol{\Sigma}_T^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_T),\\ t=1,\\ -(\prod_{i=T-t+1}^{T-1}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{i+1}\boldsymbol{\Sigma}_i|)^{-\frac{1}{2}}\times\\ \exp(-\beta_k\tilde{W}_{T-t}^k\prod_{i=T-t+1}^{T}r_i-\sum_{i=T-t+2}^{T}c_i)\times\\ \exp(-\frac{1}{2}\breve{\boldsymbol{\mu}}'_{T-t+1}\boldsymbol{\Sigma}_{T-t+1}^{-1}\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1}),\\ t=2,\cdots,T.\end{cases}\tag{52}$$

其中

$$(\boldsymbol{A}^{-1})_{kk} = 1 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)},$$

$$(\boldsymbol{A}^{-1})_{kl} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)},$$

$$\boldsymbol{B}_{T-t+2} = \boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1} \boldsymbol{\Phi},$$

$$c_{T-t+2} = \frac{1}{2}(\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2} + r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi 1})' \boldsymbol{\Sigma}_{T-t+2}^{-1} \times (\breve{\boldsymbol{v}}_{T-t+2} + r_{T-t+1}\boldsymbol{\Phi 1}),$$

$$l \neq k \in \{1,2,\cdots,n\},$$

$$\breve{\boldsymbol{\mu}}_{T-t+1} = \breve{v}_{T-t+1} + \boldsymbol{\Phi}\breve{X}_{T-t} + r_{T-t}\boldsymbol{\Phi 1},\ \breve{v}_{T-t+1} = \boldsymbol{v} - r_{T-t+1}\boldsymbol{1}.$$

同样,在资产收益序列相依情形下,进一步给出 n 个投资者进行博弈时,在 $T-t\,(t=1,\cdots,T)$ 阶段,任意一个投资者 k 的纳什均衡投资策略与传统投资策略之间的关系如下式(53)所示

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*} &= \Big((\boldsymbol{A}^{-1})_{kk} + \beta_k \sum_{l\neq k} (A^{-1})_{kl}\frac{1}{\beta_l}\Big)\breve{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*} \\ &= \Big(1 + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)} + \frac{\alpha}{(1-\alpha)(n+\alpha-1)}\Big(\sum_{l\neq k}\frac{1}{\beta_l}\Big)\Big/\frac{1}{\beta_k}\Big)\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\Big(\Big(1-\frac{n\alpha}{n+\alpha-1}\Big) + \Big(\frac{\alpha}{n+\alpha-1}\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\beta_l}\Big)\Big/\frac{1}{\beta_k}\Big)\hat{u}_{T-t}^{k*} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\Big(\Big(1-\frac{n\alpha}{n+\alpha-1}\Big) + \Big(\frac{n\alpha}{n+\alpha-1}\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\beta_l}\Big)\Big/\frac{1}{\beta_k}\Big)\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*}\end{aligned} \tag{53}$$

基于上述结论,若假设市场中存在无穷个博弈投资者,即 $n\to+\infty$,并假定$\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\beta_l}\right)\to\frac{1}{\beta}$,则投资者 k 的两种策略满足如下关系

$$\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*} = \frac{1}{1-\alpha}\Big(\frac{1}{\beta}\Big/\frac{1}{\beta_k}\Big)\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*} \tag{54}$$

特别地,若假定上述无穷多个参与博弈的投资者具有相同的风险厌恶系数,即 $\beta_k=\beta>0$ 时,则对于任意投资者 k 的两种策略之间的关系式(54)可以简化为

$$\boldsymbol{u}_{T-t}^{k*} = \frac{1}{1-\alpha}\hat{\boldsymbol{u}}_{T-t}^{k*} \tag{55}$$

定理 3 主要给出了多人博弈情况下的纳什均衡策略,这是一种更为广义的博弈情形. 由于多方博弈的求解较为复杂,所以此处所讨论多人博弈情形下的纳什均衡策略与传统策略的关系均是基于某些特定情况. 由上述理论分析可知,假定市场中投资者对自身与其他竞争者的财富差距变动的反应敏感系数相同,当博弈参与者数 n 趋于无穷时,投资者在纳什均衡下的最优策略的绝对值都是随着 α 的增大而呈现递增趋势,且逐渐收敛于一个定值,这与 Espinosa 和 Touzi[4] 连续时间下的讨论是具有一致性的.

4 仿真分析

在资产收益序列相依框架下通过数值比较来着重分析上述博弈模型的内在机理,从相对绩效角度来分析金融市场中存在的某些竞争现象,进而验证所构建的博弈的合理性. 首先,从中国证券市场选取 6 个较为具有代表性的股票行业指数,分别为能源指数,材料指数,工业指数,日常消费指数,医疗保健指数,金融指数. 选取其数据区间 2001 年 1 月 ~2018 年 8 月作为参数估计数据,数据来源于 Wind 金融数据库. 基于极大似然估计方法,则可以估计出资产收益所服从 VAR(1) 过程的各个参数,其具体数值如下所述

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} -0.2978 & 0.3639 & -0.3256 & -0.1473 & 0.0464 & 0.4526 \\ -0.3628 & 0.0861 & 0.1932 & -0.3023 & 0.0038 & 0.4639 \\ -0.3600 & 0.0917 & 0.3366 & -0.3020 & -0.0863 & 0.3670 \\ -0.2265 & 0.2081 & 0.0560 & -0.1374 & -0.1145 & 0.2856 \\ -0.2621 & 0.0130 & 0.4520 & -0.2968 & -0.1216 & 0.2637 \\ -0.3073 & 0.1856 & 0.0743 & -0.2230 & -0.1255 & 0.3964 \end{bmatrix} \tag{56}$$

以及

$$\boldsymbol{\nu}=\begin{bmatrix}0.9132\\0.9271\\0.9611\\0.9391\\0.9647\\1.0089\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Sigma}_t=\begin{bmatrix}0.0070&0.0066&0.0059&0.0047&0.0045&0.0057\\0.0066&0.0085&0.0075&0.0063&0.0064&0.0060\\0.0059&0.0075&0.0073&0.0060&0.0063&0.0055\\0.0047&0.0063&0.0060&0.0062&0.0058&0.0047\\0.0045&0.0064&0.0063&0.0058&0.0070&0.0041\\0.0057&0.0060&0.0055&0.0047&0.0041&0.0071\end{bmatrix}\tag{57}$$

基于上述所得资产收益相依序列的参数估计值,利用蒙塔卡罗方法,随机产生 10 000 组满足 VAR(1)过程的收益率序列,进而在序列相依框架下比较投资者的传统策略与纳什均衡策略的投资绩效.采用投资者终端财富的累积经验分布函数和夏普比率作为主要评价指标,并在不同博弈模型参数设定下比较两种策略,从而进一步探讨纳什均衡投资策略的具体特征.

假定市场中存在两个相互博弈的投资者,且投资者 k $(k=1,2)$ 的风险厌恶系数 β_k 与其对于竞争投资者财富变动的反应敏感系数 α_k,这两者都取决于投资者自身的风险厌恶态度与对其与竞争者财富水平差距的在意程度.根据理性人假定,所有投资者都为风险厌恶型(即 $\beta_k>0$),参数 β_k 的取值越大表明投资者 k 越厌恶风险.由于市场中投资者的偏好各异,因此较难从理论上确定最优 β_k 与 α_k 的取值.此处,对于模型参数 α_k 的取值主要分为以下三种情况

1) $0<\alpha_k<0.5$,表示投资者 k 相对于自身财富水平,更为关注其与竞争者财富差距;

2) $\alpha_k=0.5$,表示投资者 k 对自身财富水平及其与竞争者财富差距同等重视;

3) $\alpha_k>0.5$,表示投资者 k 相对于与其竞争者财富差距,更为关注自身财富水平.

基于上述参数假设,仿真分析首先假定投资者 1 与投资者 2 风险厌恶系数相同,在反应敏感系数不同的情形下比较传统策略与纳什均衡策略的投资绩效.进而,假定投资者 1 与投资者 2 具有相同的反应敏感系数以及不同的风险厌恶系数,比较上述两种策略的投资绩效.因此,数值仿真分析设置了如下五组模型参数情形,具体数值如下所示

1) $\beta_1=1,\beta_2=1,\alpha_1=0.8,\alpha_2=0.5,T\in\{5,10,15,20\}$;

2) $\beta_1=1,\beta_2=1,\alpha_1=0.5,\alpha_2=0.5,T\in\{5,10,15,20\}$;

3) $\beta_1=1,\beta_2=1,\alpha_1=0.2,\alpha_2=0.5,T\in\{5,10,15,20\}$;

4) $\beta_1=0.7,\beta_2=1,\alpha_1=0.5,\alpha_2=0.5,T\in\{5,10,15,20\}$;

5) $\beta_1=2,\beta_2=1,\alpha_1=0.5,\alpha_2=0.5,T\in\{5,10,15,20\}$.

假定投资者 k $(k=1,2)$ 的初始财富均为 1.当投资阶段 T 取不同的值时,上述三种不同情况下的仿真结果如图 3 和图 7 所示.

由图 3 ~ 图 7 中投资者终端财富值的累计经验分布函数可知,当考虑资产收益序列相依结构时,纳什均衡策略对应的终端财富累积经验分布均位于传统策略对应的终端财富累积经验分布的右方.这说明对于任意给定的终端财富水平,纳什均衡策略的终端收益超过该水平的概率均大于传统策略.以情况 1 的模型参数为例,当 $T=10$ 时,投资者 1 在纳什均衡投资策略下可获得在区间 $[10,30]$ 的终端收益的概率为 50%,投资者 2 在纳什均衡投资策略下获得在区间 $[10,30]$ 的终端收益的概率为 40%,而在传统投资策略下,投资者获得该区间收益的概率几乎都为 0.最重要的是,这两种策略发生破产的概率几乎持平.这也表明,投资者在纳什均衡投资策略下能获得较高的收益,同时也不会带来较高的破产概率.

此外,通过比较图 3 ~ 图 5 的投资者累计经验分布函数,可以发现,当投资者的风险厌恶系数相同时,其反应敏感系数越大,对应的纳什均衡策略所获得的终端收益水平越高.此处以情形 3 为例,假定投资者 1 的反应敏感系数 $\alpha_1=0.2$,投资

者 2 的反应敏感系数 $\alpha_1 = 0.5$，当 $T = 20$ 时，投资者 1 在纳什均衡投资策略下获得在区间［10, 30］的终端收益的概率为 50%，投资者 2 在纳什均衡投资策略下获得在区间［10, 30］的终端收益的概率为 70%. 并且综合比较情形 1 至情形 3，不难发现，当投资阶段相同时，自身反应敏感系数越大的情况下，其在纳什均衡策略下所得终端财富收益越大. 与此同时，通过比较情形 4 与情形 5 的仿真结果可知，当投资者的反应敏感系数相同时，其风险厌恶系数越小，对应的纳什均衡策略所获得的终端收益水平越高. 例如：投资者 1 的风险厌恶系数 $\beta_1 = 0.7$，投资者 2 的风险厌恶系数 $\beta_2 = 1$，当 $T = 20$ 时，投资者 1 在纳什均衡投资策略下获得在区间［20, 40］的终端收益的概率为 50%，投资者 2 在纳什均衡投资策略下获得在该区间终端收益的概率为 30%.

由图 3 与图 6 的结果可知，投资者的反应敏感系数变动对纳什均衡策略的投资效果影响更为显著，以情形 1、情形 4 分别与情形 3 的累积经验分布函数对比为例，当 $T = 20$ 时，投资者 1 的风险厌恶系数 $\beta_1 = 1$，反应敏感系数 $\alpha_1 = 0.5$，其纳什均衡投资策略获得在区间［20,40］的终端收益的概率为 20%；当增大反应敏感系数为 $\alpha_1 = 0.8$，其他参数与情形 3 保持一致，此时纳什均衡投资策略获得在该区间终端收益的概率为 60%；当减小风险厌恶系数为 $\beta_1 = 0.7$，其他参数不变，在纳什均衡投资策略下，投资者获得该收益区间的概率约为 50%.

此外，由上述仿真结果可得，随着投资周期数的不断增加，相比于传统策略，纳什均衡策略所得终端收益水平变化更为明显，且二者之间的差距也随之增大. 其原因主要在于，投资者在纳什均衡策略下的各个阶段都存在与对手的竞争行为，因为攀比心理的存在使得投资者在各个投资阶段都甘愿承受更大的风险，从而倾向于投资高收益资产以拉大自身与竞争者的财富差距. 最重要的是，这种财富的相对差距会累计到投资的下一阶段，进而使得二者的终端财富值随着投资阶段的增加而进一步拉大. 故相对而言，随着投资阶段的不断增加，纳什均衡策略表现的更具优势.

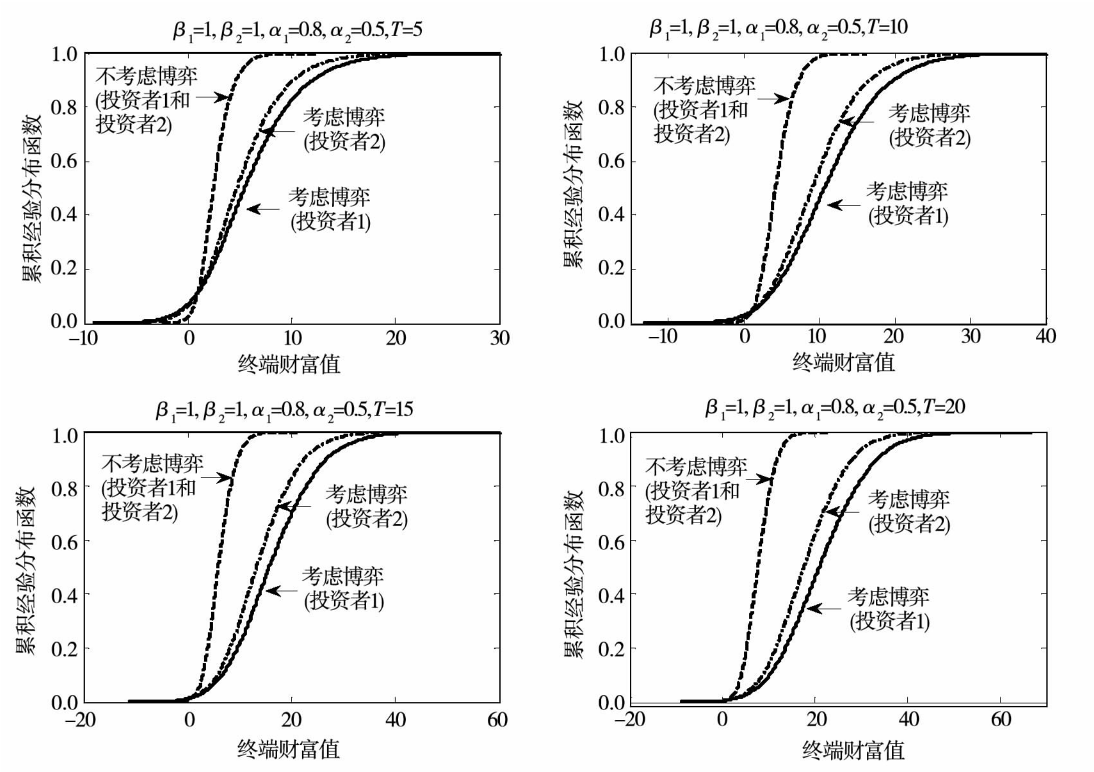

图 3　投资者 1 与投资者 2 终端财富值的累积经验分布函数（情形 1）

Fig. 3 Empirical cumulative distribution function of terminal wealth for investor 1 and investor 2 (case 1)

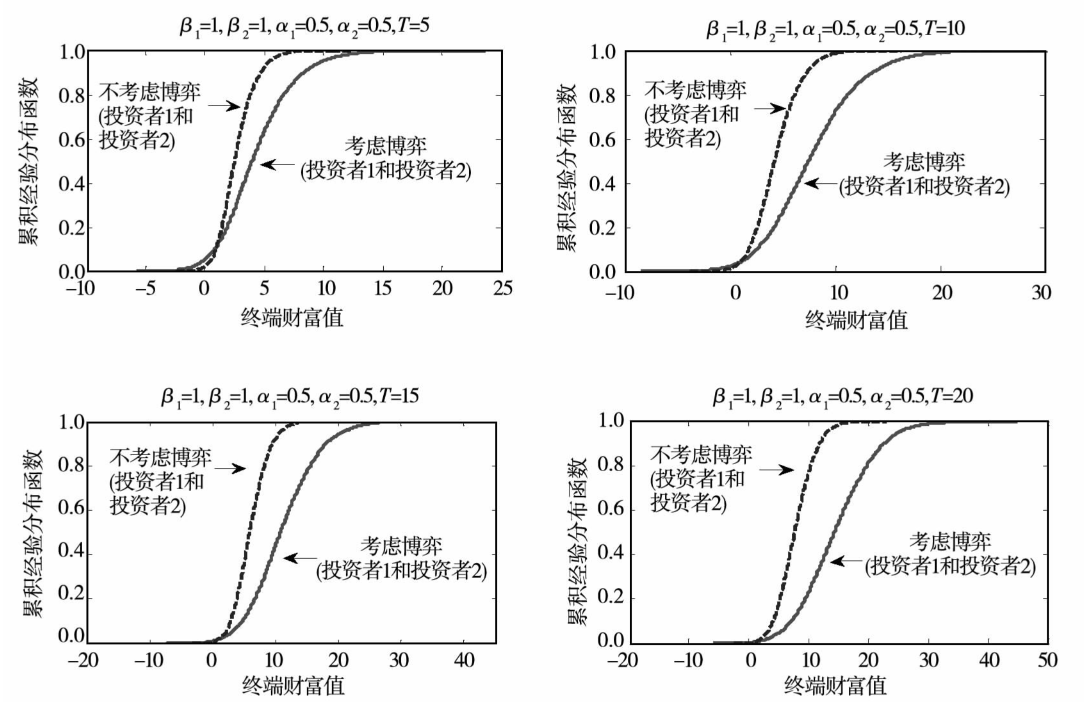

图 4　投资者 1 与投资者 2 终端财富值的累积经验分布函数(情形 2)

Fig. 4 Empirical cumulative distribution function of terminal wealth for investor 1 and investor 2 (case 2)

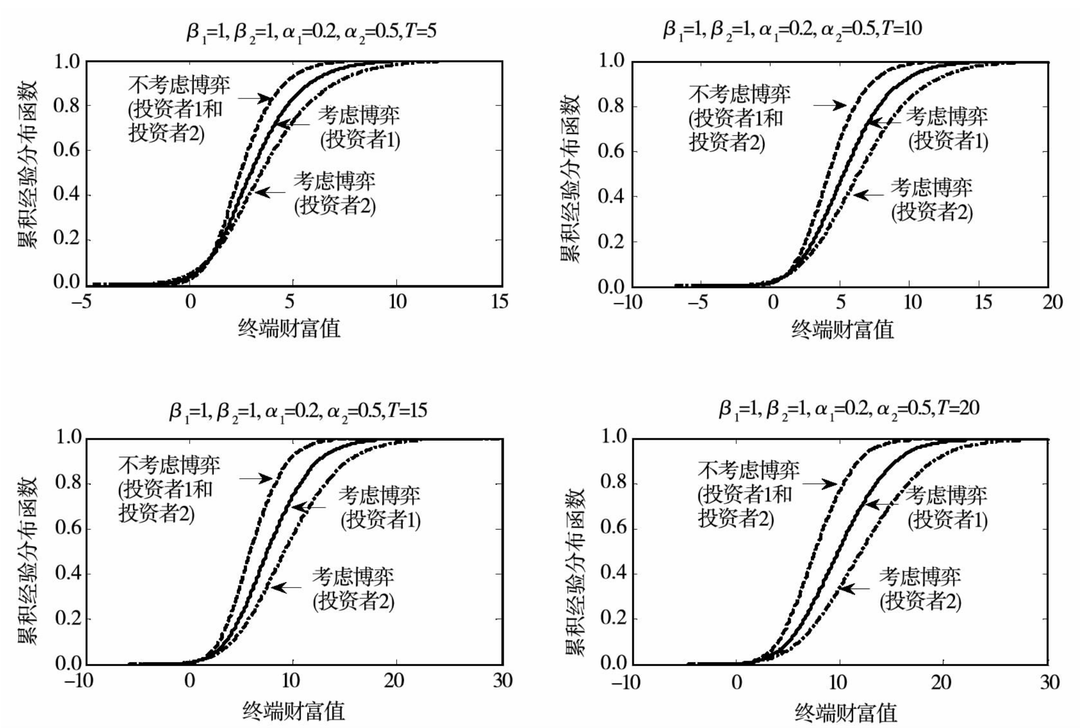

图 5　投资者 1 与投资者 2 终端财富值的累积经验分布函数(情形 3)

Fig. 5 Empirical cumulative distribution function of terminal wealth for investor 1 and investor 2 (case 3)

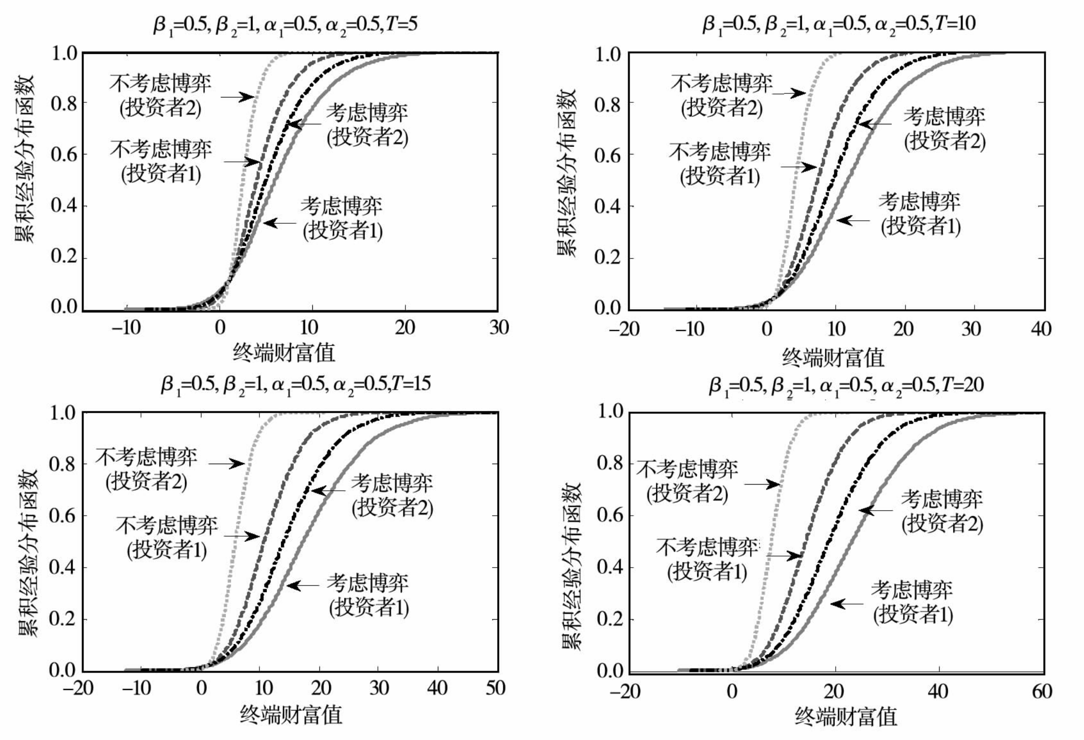

图 6　投资者 1 与投资者 2 终端财富值的累积经验分布函数(情形 4)

Fig. 6 Empirical cumulative distribution function of terminal wealth for investor 1 and investor 2 (case 4)

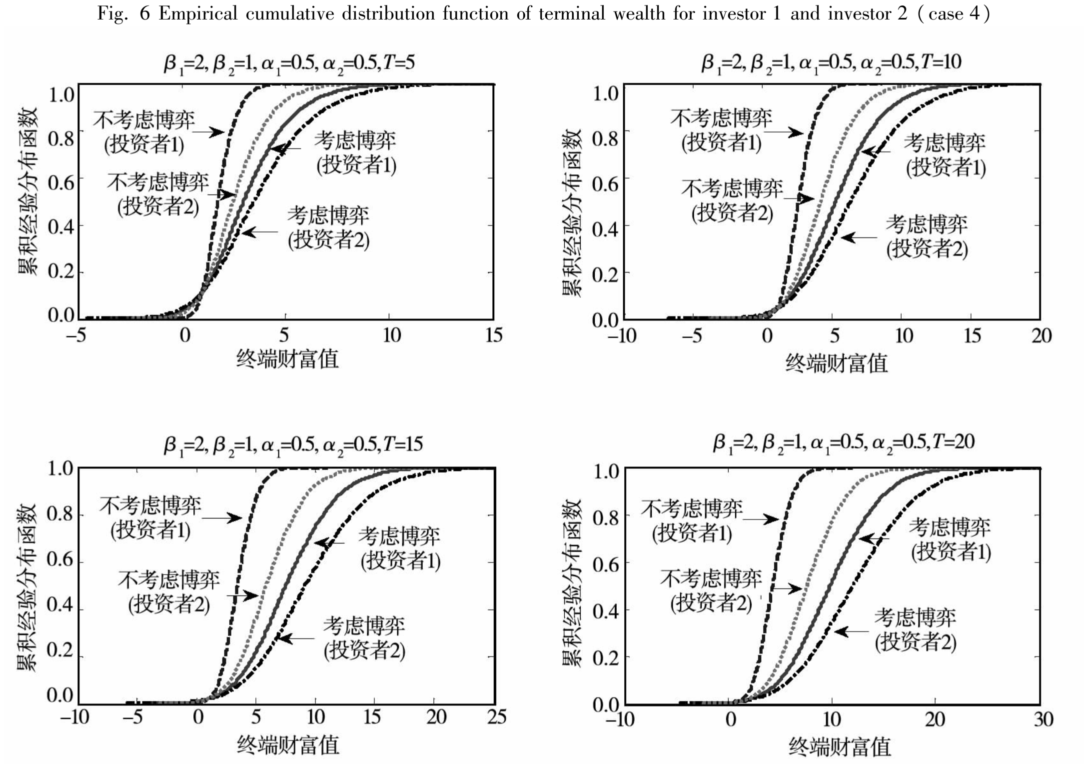

图 7　投资者 1 与投资者 2 终端财富值的累积经验分布函数(情形 5)

Fig. 7 Empirical cumulative distribution function of terminal wealth for investor 1 and investor 2 (case 5)

以上主要是从投资者终端财富值分布特征的角度来比较纳什均衡投资策略和传统策略之间的差异性,并没有对风险做直观的量化比较. 接下来将运用夏普指数,综合评价上述投资策略的收益和风险情

况. 在上述给定参数设置下,可得相应投资策略在不同阶段的夏普指数值,其具体变化情况如图 8 所示.

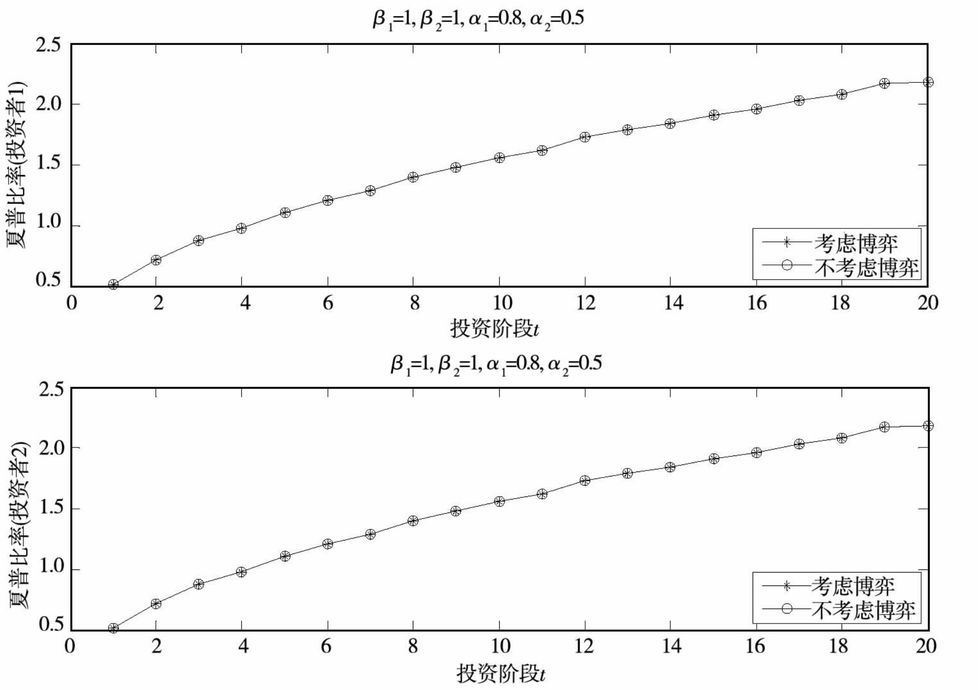

图 8　投资者终端财富值的夏普比率值

Fig. 8 The Sharpe ratio of the terminal wealth

如图 8 所示,随着投资阶段 T 的变化,对于投资 1 和投资 2 来说,其相应纳什均衡投资策略和传统策略所对应的夏普比率值是相等的,因此仅以一组参数设置下的结果为例进行分析,这与上述定理 2 中的“投资者 k ($k = 1,2$) 所得终端财富值的夏普比率与 α_k($k = 1,2$) 无关”这一结论相符. 也就是说,从夏普比率的角度来讲,纳什均衡投资策略和传统策略二者之间是不存在差异的,其都可以作为投资者选择的策略. 尽管这两种策略所对应的夏普比率值是一致的,但是其投资策略所对应的收益 – 风险水平还是存在差异的. 接下来,针对图 8 中的现象,对上两种策略的收益 – 风险值做具体分析,其结果如表 1 所示.

结合图 8 和表 1,不难发现,尽管纳什均衡投资策略和传统策略的夏普比率值是相同的,但是其对应的收益 – 风险水平是不一样的. 例如:当 T =1 时,对于投资 1 来说,传统策略的收益 – 风险值为(1.336 8, 0.647 6),而在博弈情形下,其收益 – 风险值为(2.010 4, 1.942 8). 也就是说,纳什均衡投资策略和传统策略的差异主要体现在投资者对风险的偏好程度,纳什均衡投资策略下的投资者更愿意去追求高收益 – 高风险的投资组合,而传统策略下的投资者则相对保守些,更愿意追求较低收益 – 较低风险的投资组合,这也与博弈模型的构建机理是一致的. 导致这一有趣现象的原因主要在于,投资组合博弈模型的内在机理在于投资者之间存在某种竞争或者攀比的投资行为,博弈双方在已知对方策略的前提下,都希望通过自身投资策略的调整来拉大与竞争对手之间的差距,导致博弈双方都愿意冒高风险来追求高收益的投资策略,最终实现博弈双方策略的均衡,从而导致图 8 和表 1 中的有趣结论. 图 8 和表 1 的结论也表明,投资组合博弈模型能够较好的刻画投资者之间的这种攀比心态,同时该模型在很大程度上还能够为投资者有效模拟对手策略上提供理论和方法指导,通过自身策略的调整实现个人财富超越竞争对手.

同样,对于不同的模型参数 α_k($k = 1,2$) 设置下,其相应的纳什均衡策略所得的夏普比率值是也都是与传统策略对应的夏普比率值相等,限于文章篇幅,此处不再陈列. 上述数值仿真结果,也验证了上述定理 2 中的“(i) 投资者 k ($k = 1$, 2) 所得终端财富值的夏普比率与 α_k($k = 1,2$) 无

关”这一结论. 由表 1 的仿真结果可知,虽然不同反应敏感系数对应的纳什均衡投资策略的夏普比率值相同,但其收益 – 风险水平与反应敏感系数 α_k 存在相关性. 接下来,通过改变 α_k 的取值,得到对应纳什均衡投资策略的收益与风险在不同阶段 T 下的变动情况如图 9 与图 10 所示.

根据图 9 ~ 图 10 的仿真结果,可以发现投资者 k 的终端财富值的期望与方差都是随着 α_k 的增加而呈现递增趋势. 一般而言,投资者都希望所构造投资组合的期望收益都是大于无风险资产收益率,故从理论上来讲,其超额收益的期望值通常为正值,上述仿真结果也进一步验证了定理 2 的相关结论. 图 9 ~ 图 10 更为全面描述了攀比心理对市场上两个投资者的投资策略的影响. 当投资者对于自身与其竞争者的财富差距变动越为敏感,其投资行为可能更为激进,投资者越趋向于选择高收益 – 高风险的投资策略,以此来增加自身的财富水平,进而进一步拉大与竞争差距. 显然,投资者 1 和投资者 2 也会选择相应改变自身的风险厌恶水平,以追求更高收益. 市场中的投资者(如基金公司、保险公司等机构投资者)在面对竞争时,都降低了自身风险厌恶水平,以致于投资组合获得高收益的同时也面临高风险,其原因是博弈双方投资者在攀比心理的驱动下,为追求更高的终端财富,从而获得更好的排名,以吸引更多的投资者来购买该类投资产品.

不难发现,投资组合博弈模型构建、模型求解以及上述仿真分析都没有考虑投资过程中会产生交易成本,然而在实际投资情形中,交易成本往往是不可忽略的重要因素. 为了进一步验证文中所得纳什均衡投资策略的优越性,将上述纳什均衡策略和传统策略应用于存在交易成本的投资市场中,检验所得结论是否与无交易成本投资市场保持一致,其相关结果如图 11 和表 2 所示.

表 1 投资者终端财富值的收益 – 风险值

Table 1 The expected return and risk of the terminal wealth

T	投资者 1				投资者 2			
	不考虑博弈		考虑博弈		不考虑博弈		考虑博弈	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
1	1.336 8	0.647 6	2.010 4	1.942 8	1.336 8	0.647 6	1.842 0	1.619 0
2	1.682 3	0.953 4	3.046 9	2.860 3	1.682 3	0.953 4	2.705 7	2.383 5
3	2.032 4	1.177 9	4.097 2	3.533 6	2.032 4	1.177 9	3.581 0	2.944 6
4	2.334 7	1.372 3	5.004 2	4.117 0	2.334 7	1.372 3	4.336 8	3.430 9
5	2.711 3	1.538 4	6.134 0	4.615 1	2.711 3	1.538 4	5.278 3	3.845 9
6	3.047 5	1.691 2	7.142 4	5.073 5	3.047 5	1.691 2	6.118 7	4.227 9
7	3.383 9	1.846 4	8.151 8	5.539 3	3.383 9	1.846 4	6.959 9	4.616 1
8	3.735 6	1.952 9	9.206 7	5.858 7	3.735 6	1.952 9	7.838 9	4.882 2
9	4.071 0	2.072 9	10.213 0	6.218 8	4.071 0	2.072 9	8.677 5	5.182 4
10	4.380 7	2.170 7	11.142 0	6.512 0	4.380 7	2.170 7	9.451 7	5.426 7
11	4.696 7	2.282 2	12.090 0	6.846 5	4.696 7	2.282 2	10.241 7	5.705 4
12	5.093 7	2.361 7	13.281 2	7.085 1	5.093 7	2.361 7	11.234 3	5.904 2
13	5.450 5	2.482 5	14.351 4	7.447 4	5.450 5	2.482 5	12.126 1	6.206 2
14	5.764 7	2.581 6	15.294 1	7.744 7	5.764 7	2.581 6	12.911 7	6.453 9
15	6.127 8	2.678 0	16.383 5	8.033 9	6.127 8	2.678 0	13.819 6	6.694 9
16	6.478 3	2.795 6	17.434 9	8.386 7	6.478 3	2.795 6	14.695 7	6.988 9
17	6.761 8	2.832 0	18.285 4	8.496 1	6.761 8	2.832 0	15.404 5	7.080 1
18	7.163 3	2.963 1	19.490 0	8.889 3	7.163 3	2.963 1	16.408 4	7.407 7
19	7.513 5	3.002 8	20.540 5	9.008 5	7.513 5	3.002 8	17.283 8	7.507 1
20	7.799 2	3.120 2	21.397 7	9.360 5	7.799 2	3.120 2	17.998 1	7.800 5

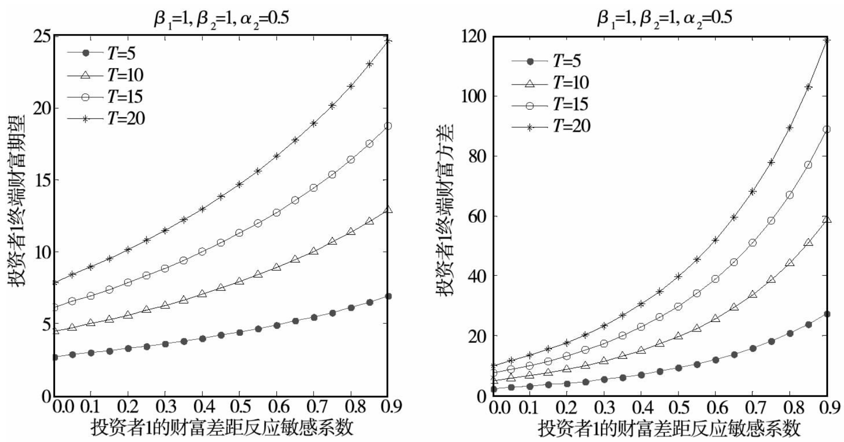

图 9　投资者 1 随 α_1 变动的收益与风险变动情况

Fig. 9 The change of expected return and risk of the terminal wealth for investor 1 with the value of α_1

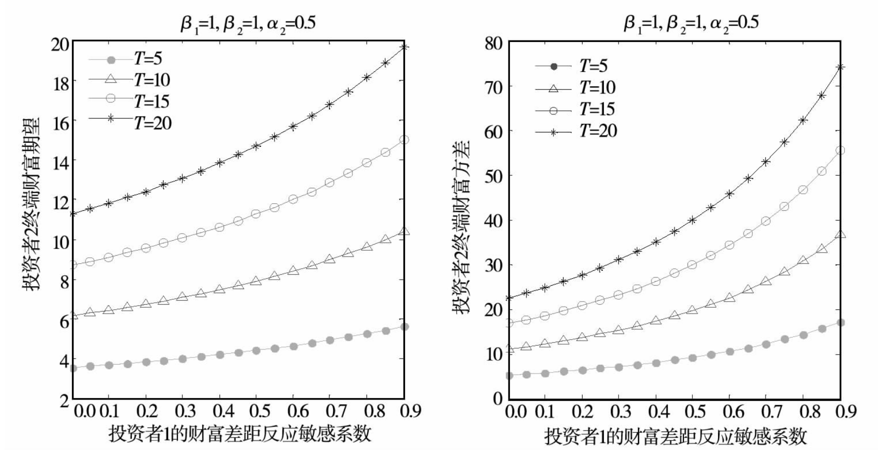

图 10　投资者 2 随 α_1 变动的收益与风险变动情况

Fig. 10 The change of expected return and risk of the terminal wealth for investor 2 with the value of α_1

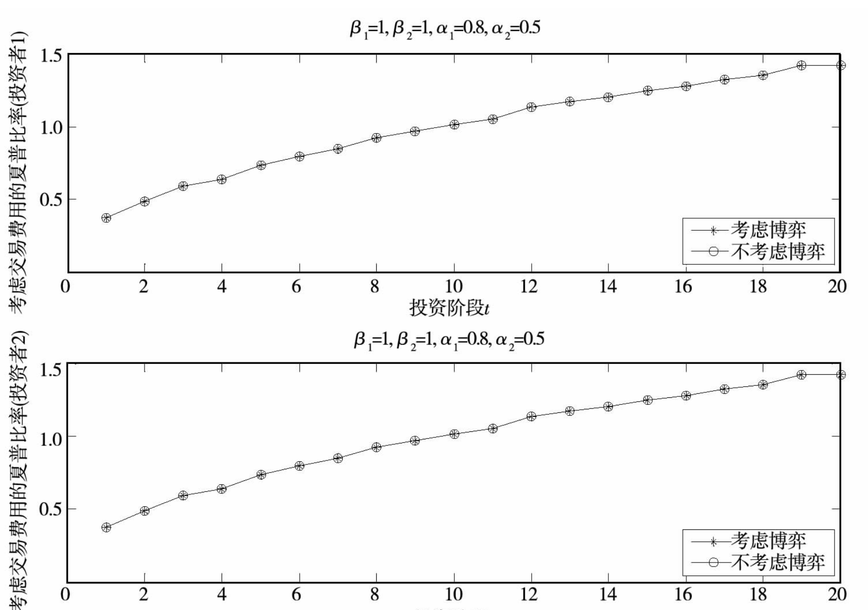

图 11　考虑交易费用情形下投资者终端财富值的夏普比率值

Fig. 11 The Sharpe ratio of the terminal wealth with considering transaction cost

表 2 考虑交易费用情形下投资者终端财富值的收益 – 风险值

Table 2 The expected return and risk of the terminal wealth with considering transaction cost

T	投资者 1				投资者 2			
	不考虑博弈		考虑博弈		不考虑博弈		考虑博弈	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
1	1.236 6	0.633 4	1.709 8	1.900 3	1.236 6	0.633 4	1.591 5	1.583 6
2	1.457 8	0.941 0	2.373 5	2.822 9	1.457 8	0.941 0	2.144 6	2.352 4
3	1.684 3	1.159 3	3.052 9	3.477 9	1.684 3	1.159 3	2.710 8	2.898 3
4	1.864 1	1.355 9	3.592 3	4.067 7	1.864 1	1.355 9	3.160 3	3.389 8
5	2.116 1	1.517 9	4.348 4	4.553 6	2.116 1	1.517 9	3.790 3	3.794 7
6	2.328 6	1.671 3	4.985 8	5.014 0	2.328 6	1.671 3	4.321 5	4.178 3
7	2.542 6	1.819 9	5.627 9	5.459 7	2.542 6	1.819 9	4.856 6	4.549 8
8	2.773 2	1.927 7	6.319 6	5.783 0	2.773 2	1.927 7	5.433 0	4.819 2
9	2.985 1	2.047 4	6.955 3	6.142 3	2.985 1	2.047 4	5.962 8	5.118 6
10	3.172 8	2.141 6	7.518 5	6.424 9	3.172 8	2.141 6	6.432 1	5.354 1
11	3.361 9	2.252 1	8.085 6	6.756 3	3.361 9	2.252 1	6.904 7	5.630 3
12	3.640 1	2.334 5	8.920 3	7.003 6	3.640 1	2.334 5	7.600 2	5.836 4
13	3.872 4	2.451 1	9.617 2	7.353 4	3.872 4	2.451 1	8.181 0	6.127 9
14	4.067 4	2.545 1	10.202 1	7.635 3	4.067 4	2.545 1	8.668 4	6.362 8
15	4.307 5	2.644 6	10.922 5	7.933 7	4.307 5	2.644 6	9.268 8	6.611 4
16	4.531 5	2.760 4	11.594 4	8.281 1	4.531 5	2.760 4	9.828 7	6.900 9
17	4.695 6	2.796 3	12.086 8	8.388 9	4.695 6	2.796 3	10.239 0	6.990 7
18	4.970 0	2.926 3	12.909 9	8.778 8	4.970 0	2.926 3	10.924 9	7.315 7
19	5.202 1	2.963 2	13.606 3	8.889 7	5.202 1	2.963 2	11.505 2	7.408 1
20	5.365 4	3.073 2	14.096 2	9.219 5	5.365 4	3.073 2	11.913 5	7.682 9

由图 11 和表 2 所得仿真结果可知，当投资市场存在交易成本时，纳什均衡投资策略和传统策略所对应的夏普比率值是相等的，纳什均衡投资策略下的投资者更愿意去追求高收益 – 高风险的投资组合，而传统策略下的投资者则相对保守些，更愿意追求较低收益 – 较低风险的投资组合，这与图 8 和表 1 是保持一致的. 此外，对比图 8 与图 11 和表 1 与表 2 的结果，可知相比于不考虑交易费用情形，考虑交易费用情形下的投资者 1 与投资者 2 所得终端收益对应的夏普比率值与期望值都较低，而方差是相近的. 其原因主要在于，当存在市场摩擦时，投资策略在两个周期之间的调整需要付出成本，从而导致投资者的实际收益降低.

5 结束语

在资产收益序列相依结构下考虑了投资者存在相互影响的关系，基于多阶段投资组合优化理论和纳什均衡博弈理论，利用相对绩效来刻画投资者之间的竞争和攀比现象，以投资者的相对终端财富的期望效用水平为优化目标，构建多阶段投资组合博弈模型，利用动态规划方法，求出了纳什均衡投资策略和相应值函数的解析表达式. 此外，采用累计经验分布函数和夏普比率等评价指标，对纳什均衡投资策略与传统策略进行了仿真比较，进一步阐述了多阶段投资组合博弈模型的内在机理，并给出了纳什均衡投资策略的表现随投资者的反应敏感系数的变化趋势. 仿真结果表明，传统的投资策略和纳什均衡投资策略具有相同的夏普比率值，但是当考虑竞争对手的相对绩效时，出于攀比的心态，投资者更愿意冒高风险去追求高收益的投资组合，进而拉大自身与对手之间的财富差距；投资者的反应敏感系数越大，这一竞争投资行为越为明显. 从理论上来讲，多阶段博弈模型突破了传统的资产收益序列独立的前提假设，得到了相应投资策略的精确表达式，并且给出了纳什均衡投资策略与传统投资策略的关系；从实际角度来讲，多阶段投

资组合博弈模型有效地刻画了投资者之间的攀比心态，能够较好的反映金融市场中投资者之间的竞争关系，为投资者指定投资策略提供策略指导. 拓展研究可以做如下几方面：首先，在多方博弈情形下，允许各个投资阶段都有新的参与者或者退出者，此时投资者的攀比参照物也会随之发生动态变化. 另外，可以从市场出清的角度来构建博弈模型，以此反映投资市场的供求关系. 以上拓展不仅对多阶段投资组合博弈研究有理论意义，也可以为投资者提供更为切实可行的多阶段投资策略.

参 考 文 献：

[1] Browne S. Stochastic differential portfolio games[J]. Journal of Applied Probability, 2000, 37(1): 126 – 147.
[2] Bensoussan A, Frehse J. Stochastic games for n players[J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 2000, 105(3): 543 – 565.
[3] Basu A, Ghosh M K. Stochastic differential games with multiple modes and applications to portfolio optimization[J]. Stochastic Analysis & Applications, 2007, 25(4): 845 – 867.
[4] Espinosa G E, Touzi N. Optimal investment under relative performance concerns[J]. Mathematical Finance, 2013, 25(2): 221 – 257.
[5] Bensoussan A, Chi C S, Yam S C P, et al. A class of non-zero-sum stochastic differential investment and reinsurance games[J]. Automatica, 2014, 50(8): 2025 – 2037.
[6] Guan G, Liang Z. A stochastic Nash equilibrium portfolio game between two DC pension funds[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2016, 70: 237 – 244.
[7] Chi S P, Wong H Y. Robust non-zero-sum stochastic differential reinsurance game[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2016, 68: 169 – 177.
[8] Chi S P, Chi C S, Wong H Y. Non-zero-sum reinsurance games subject to ambiguous correlations[J]. Operations Research Letters, 2016, 44(5): 578 – 586.
[9] Deng C, Zeng X, Zhu H. Non-zero-sum stochastic differential reinsurance and investment games with default risk[J]. European Journal of Operational Research, 2018, 264(3): 1144 – 1158.
[10] Wang G, Xiao H, Xiong J. A kind of LQ non-zero sum differential game of backward stochastic differential equation with asymmetric information[J]. Automatic, 2018, 97: 346 – 352.
[11] Sun J, Yong J. Linear-quadratic stochastic two-person nonzero-sum differential games: Open-loop and closed-loop nash equilibria[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2019, 129(2): 381 – 418.
[12] Li D, Ng W. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387 – 406.
[13] Zhu S S, Li D, Wang S Y. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(3): 447 – 457.
[14] 郭文旌，胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优投资组合[J]. 管理科学学报，2005, 8(2): 13 – 19.
Guo Wenjing, Hu qiying. Multi-period portfolio optimization when exit time is uncertain[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(2): 13 – 19. (in Chinese)
[15] Cui X, Gao J, Li X, et al. Optimal multi-period mean-variance policy under no-shorting constraint[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 234(2): 459 – 468.
[16] Zhou Z, Xiao H, Yin J, et al. Pre-commitment vs. time-consistent strategies for the generalized multi-period portfolio optimization with stochastic cash flows[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2016, 68: 187 – 202.
[17] 周忠宝，肖和录，任甜甜，等. 全链接分散化多阶段投资组合评价研究[J]. 管理科学学报，2017, 20(6): 89 – 100.
Zhou Zhongbao, Xiao Helu, Ren Tiantian, et al. Performance evaluation of multi-period portfolios via the fully linked diversification model[J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(6): 89 – 100. (in Chinese)
[18] Bodnar T, Parolya N, Schmid W. On the exact solution of the multi-period portfolio choice problem for an exponential utility under return predictability[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 246(2): 528 – 542.
[19] Bodnar T, Parolya N, Schmid W. A closed-form solution of the multi-period portfolio choice problem for a quadratic utility function[J]. Annals of Operations Research, 2015, 229(1): 121 – 158.
[20] Dokuchaev N. Discrete time market with serial correlations and optimal myopic strategies[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 177(2): 1090 – 1104.
[21] Hakansson N H. On optimal myopic portfolio policies, with and without serial correlation of yields[J]. Stochastic Optimiza-

tion Models in Finance, 1971, 44(3): 324 – 334.

[22]许云辉, 李仲飞. 基于收益序列相关的动态投资组合选择 – 动态均值 – 方差模型[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(8): 123 – 131.

Xu Yunhui, Li Zhongfei. Dynamic portfolio selection based on serially correlated return: Dynamic mean-variance formulation[J]. System Engineering: Theory & Practice, 2008, 28(8): 123 – 131. (in Chinese)

[23]Brandt M W, Goyal A, Santaclara P, et al. A simulation approach to dynamic portfolio choice with an application to learning about return predictability[J]. Nber Working Papers, 2005, 18(3): 831 – 873.

[24]Brandt M W, Santa-Clara P. Dynamic portfolio selection by augmenting the asset space[J]. Journal of Finance, 2006, 61(5): 2187 – 2217.

[25]Gülpinar N, Pachamanova D. A robust optimization approach to asset-liability management under time-varying investment opportunities[J]. Journal of Banking & Finance, 2013, 37(6): 2031 – 2041.

[26]Gülpinar N, Canakoglu E, Pachamanova D. Robust investment decisions under supply disruption in petroleum markets[J]. Computers & Operations Research, 2014, 44(4): 75 – 91.

[27]Gülpinar N, Pachamanova D, çanakoglu E. A robust asset-liability management framework for investment products with guarantees[J]. OR Spectrum, 2016, 38(4): 1007 – 1041.

[28]Demiguel V, Nogales F J, Uppal R. Stock return serial dependence and out-of-sample portfolio performance[J]. Review of Financial Studies, 2014, 27(4): 1031 – 1073.

[29]Soyera R, Tanyerib K. Bayesian portfolio selection with multi-variate random variance models[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 171(3): 977 – 990.

[30]Çanakoglu E, özekici S. Portfolio selection in stochastic markets with exponential utility functions[J]. Annals of Operations Research, 2009, 166(1): 281 – 297.

[31]Mathai A M, Provost S B. Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications[M]. New York: Marcel Dekker Press, 1992.

Multi-period portfolio game model with serially correlated returns

ZHOU Zhong-bao[1], *REN Tian-tian*[1], *XIAO He-lu*[2], *JIN Qian-ying*[1], *WU Shi-jian*[3*]

1. School of Business Administration, Hunan University, Changsha 410082, China;
2. School of Business, Hunan Normal University, Changsha 410081, China;
3. College of Economics and Management, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China

Abstract: The existing literature on portfolio optimization generally assumes that investors are independent, and the returns of underlying assets are not correlated among different periods. In reality, however, investors often relate to each other, and the return series always have some dependencies among different time periods. Under the framework of the multi-period portfolio optimization and Nash equilibrium theories, using the relative performance of investors to describe their game behaviors, a multi-period portfolio game model is constructed which maximizes the expected utility of the relative terminal wealth of each investor. With the assumption of correlated return series, the analytical solutions of Nash equilibrium investment strategy and the corresponding value function are derived, and the relationship between the strategies derived from Nash equilibrium and the traditional ones is described. Finally, a simulation analysis of the two investment strategies, by using cumulative empirical distribution function and Sharpe index to compare the performance of the two strategies' is conducted, and how Nash equilibrium investment strategies change with the different coefficients of the investors' response sensitivity is analyzed. Results show that, when considering the relative performance of competitors, investors of Nash equilibrium, with respect to traditional investors, are more willing to tolerate higher risks to pursue higher profits, and the greater the response sensitivity coefficients, the higher risk they prefer.

Key words: serially correlated returns; multi-period portfolio game model; Nash equilibrium; exponential utility function