

考虑下偏矩约束的增强指数模型^①

黄金波¹, 李仲飞^{2*}, 邹新月¹

(1. 广东财经大学金融学院, 广州 510320; 2. 中山大学管理学院, 广州 510275)

摘要: 增强指数模型旨在用少量的成份股构建指数跟踪组合, 以期在跟踪指数趋势的同时获取高于指数平均收益的超额收益. 当市场指数下跳时, 跟踪组合会跟随指数趋势而产生巨额损失, 因此有必要在传统的增强指数模型中加入下端风险约束, 以阻止跟踪组合随指数下跳的风险. 下偏矩(lower partial moment, LPM)作为下端风险度量工具, 具有良好的理论性质且涵盖了损失概率、期望损失、下半方差等经典度量方法, 因此本文构建 LPM 约束下的增强指数模型. 该模型有三个特点: 第一, 具有更加一般的目标函数且允许投资者根据自身的目标设置参数, 通过调节模型中的权衡参数, 模型可以退化到传统的指数复制模型和超额收益最大化模型; 第二, 加入非参数 LPM 约束, 以控制跟踪组合的下端风险; 第三, 得到目标函数和非参数 1-阶 LPM 的凸性, 证明了基于非参数 1-阶 LPM 约束的增强指数模型是凸优化问题. 模拟和实证结果表明, 本文的模型能够控制下端风险并获得超额收益.

关键词: 增强指数; 下偏矩; 非参数估计; 凸优化

中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2019)12-0056-14

0 引言

近年来, 随着我国私募基金的迅速崛起和金融衍生类产品的推出, 量化投资成为业界和学术界关注的热点, 而量化投资策略构建是量化投资的关键. 主动管理和被动管理是两类最主要的量化投资策略. 主动管理投资策略灵活运用各种选股技术挑选出价值被低估的资产, 最终目标是获得超过市场平均收益的超额收益. 而被动管理策略严格遵从事先约定的规则 and 标准, 严格按照规则跟踪市场的走势, 获取市场的平均收益^[1]. 大量的实证研究发现, 由于积极型投资组合的风险没有被充分分散化, 再加上频繁交易产生的管理成本和交易费用等原因, 在长期内主动投资者并不能通过积极管理投资组合来战胜市场; 从长期

来看, 经济总是向上发展, 证券市场及其指数都有长期的上涨趋势, 被动管理策略可以通过充分的分散化投资来合理地控制风险, 同时随着市场的上涨能够获得市场平均水平的收益. 因此越来越多的投资者放弃了纯粹积极的投资管理模式, 更多地采用被动的或混合的投资管理模式.

指数化投资是被动投资管理领域中的重要方法, 在共同基金、对冲基金和养老基金的资产管理中被广泛运用^[2]. 使用该策略的投资者既不需要通过证券分析来发现被错误定价的股票, 也不试图预测市场的未来走势, 而是希望能够通过构建投资组合跟踪目标指数的业绩, 获取与目标指数相同的收益. 使用指数化投资策略进行投资组合管理, 不仅管理成本和费用较低, 更重要的是投资组合仅仅承担市场系统性风险, 其它额外的风险

① 收稿日期: 2017-01-16; 修订日期: 2018-08-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71721001; 71603058; 71971068); 教育部人文社会科学研究项目(16YJC790033); 广东省自然科学基金资助项目(2016A030313656; 2014A030310428; 2014A030310305; 2014A030312003); 广东省哲学社会科学规划项目(GD15YYJ06; GD15XYJ03).

通讯作者: 李仲飞(1963—), 男, 内蒙古鄂尔多斯人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: lnslzf@mail.sysu.edu.cn

都通过分散化投资加以分散甚至消除^[1]. 指数化投资策略大致可以分为完全复制策略和优化复制策略^[3]. 完全复制策略是完全根据目标指数的所有成份股及对应的权重构建跟踪组合, 但是易见该方法有如下的缺点: 首先, 目标指数某些成份股比例低且流动性差, 交易不方便; 其次, 若指数包含成份股较多, 完全复制指数的交易成本较大; 最后, 当成份股遭遇停牌、涨跌停时, 会积累较大的跟踪误差^[1,4]. 优化复制策略是指利用部分成份股并由一定的算法构建组合来跟踪指数, 且允许有一定的跟踪误差^[5]. 优化复制策略可以降低复制指数的交易频率和交易成本, 并且可避免或剔除某些出现特殊情况的成份股. 因此, 优化复制策略比完全复制策略更具优势. 增强指数模型是优化复制策略的一种, 增强指数模型旨在运用少量的成份股构建指数跟踪组合, 以期在跟踪指数趋势的同时, 获取超出指数平均收益的超额收益^[6,7]. 同为追求超额收益, 增强指数策略与主动管理策略的不同在于, 增强指数策略以目标指数为参考点, 在跟踪目标指数趋势的基础上获得超过指数的收益; 而主动管理策略并不必然以某指数为基础, 也并不跟踪指数的趋势.

虽然指数化投资策略及相关模型已经得到广泛而深入的研究^[1,2,8,9], 但增强指数模型却是近年来新兴的研究领域^[6,7]. Roman 等^[6]基于二阶随机占优理论构建增强指数模型并运用割平面法 (cutting plane approach) 进行求解^[10]. Valle 等^[11]提出三阶段方法 (three-stage solution approach) 来选择绝对收益组合, 并且展示该方法可以拓展到增强指数模型. Guastaroba 等^[12]基于 Omega ratio 提出两个新的增强指数模型, 并且展示每个模型都可以转化为线性规划问题, 当加入基数约束和头寸约束后, 该模型可转化为混合整数线性规划问题. Filippi 等^[7]将增强指数模型的目标定义为最大化超额收益且最小化跟踪误差, 并将其转化为双目标混合整数线性规划问题, 进而运用双目标启发式算法来求解. 目前增强指数模型研究的差别主要在于构建不同的目标函数和约束条件. 不同于已有的研究, 本文通过权衡参数将跟踪误差和超额收益统一起来, 将目标函数定义为二者的加权平均. 在理论上, 本文构建的目标函数是组

合头寸的凸函数, 便于优化问题求解; 且通过参数调整, 建立的模型可以退化为传统的指数复制模型和超额收益最大化模型. 在实践应用上, 当前完全的指数复制和纯粹追求超额收益的模型已经逐渐被投资者放弃, 而混合策略, 即以部分资金用以跟踪指数, 剩余部分资金用以获取超额收益是当前实践中更常用的方法. 本文构建的目标函数允许投资者根据自身的风险收益偏好调节权衡参数灵活使用这种混合策略.

虽然当前的指数化投资模型考虑了许多现实约束, 例如交易成本和投资比率约束^[13,14], 但绝大部分研究没有对跟踪组合的下端风险进行约束, 从而忽视了跟踪组合随目标指数下跳的风险. Wang 等^[3]指出, 利用指数化投资策略进行投资管理, 当目标指数下跌时, 跟踪组合也会随目标指数下跌而遭受损失, 因此有必要在增强指数模型中加入下端风险约束. Alexander 和 Baptista^[15]、Palomba 和 Riccetti^[16]在 Roll^[8]基础上加入 VaR 约束下端风险, 但为了得到模型的解析解, 他们的研究在正态分布假设下进行, 显然正态分布假设不符合实现市场数据特征. Wang 等^[3]首次将 CVaR 约束嵌入到指数化投资模型, 以控制跟踪组合的下端风险; 但该模型的缺陷在于, 约束条件和决策变量不仅随着资产数量的增加而增加, 而且会随着样本容量的增加而成倍增加, 从而增加了模型求解的难度, 很难适用于大规模资产配置问题. 与 Ling 等^[17]基于 LPM 构建跟踪误差最小化模型不同, 本文将非参数 LPM 作为约束条件嵌入增强指数模型, 以控制跟踪组合的下端风险. 运用非参数方法得到 LPM 的估计式, 证明 1 - 阶 LPM 的估计式是组合头寸的凸函数, 进而证明基于 1 - 阶 LPM 的增强指数模型是凸优化问题, 可以运用现有的凸优化算法进行求解, 解决了 Wang 等^[3]提出的线性规划方法中决策变量和约束条件随样本容量倍增的难题. 模拟和实证结果表明本文的模型是有效的.

1 下偏矩的非参数估计

Markowitz^[18]提出的方差指标开启了风险量化分析的研究. 但经典的方差指标是对称风险度

量工具, 既把偏离均值的下端损失看作风险, 也把偏离均值的上端收益看作风险, 显然不符合人们仅把损失视为风险的心理认知. 鉴于方差指标的缺陷, Bawa^[19, 20] 和 Fishburn^[21] 提出下偏矩来度量风险. 设资产的收益率是随机变量 X , α 是预先确定的目标收益, 通常根据投资者自身的风险态度或者财富水平进行设定, 常用的取值为 0, 无风险利率或者期望收益, τ 是固定的正整数, τ - 阶 LPM 可定义为

$$\begin{aligned} LPM_{\tau, \alpha}(X) &= E[\max(\alpha - X, 0)]^\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\max(\alpha - x, 0)]^\tau f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} (\alpha - x)^\tau f(x) dx \end{aligned} \quad (1)$$

$E[\cdot]$ 表示数学期望, $f(x)$ 为 X 的密度函数. 与方差相比, LPM 仅把 α 以下的损失看作风险, 而不把 α 以上的收益看作风险, 所以 LPM 是下端风险测度; 基于 LPM 的最优组合不仅能有效控制投资组合的损失, 而且具有不限制组合收益的特点^[22]; 通过设定参数 α 和 τ , LPM 指标可以退化为其它的下端风险度量指标^[23]. 例如设定 $\tau = 0$, 则 LPM 表示损失概率, 设定 $\tau = 1$, 则 LPM 表示期望损失, 设定 $\tau = 2$ 且 $\alpha = E[X]$ 时, 则 LPM 表示下半方差.

根据式(1)可知, 如果要得到 LPM 的解析表达式, 需要给出密度函数的具体形式, 但在实际中事先并不知道资产收益率的密度函数, 只能根据资产收益率的历史信息来对其进行估计. 收益率分布的估计方法有参数法、半参数法和非参数法. 参数法和半参数法事先设定收益率服从某一个分布或者模型, 估计出其中的参数, 进而得到收益率的分布. 相对参数法和半参数法, 非参数法不需要对收益率分布做任何形式的事前设定, 直接用数据对收益率的后验分布进行估计, 避免人为的模型设定风险和参数估计偏差, 能够给出更为准确的实际分布的估计^[24]. 设 $x_t, t = 1, 2, \dots, T$ 为 X 的样本, 则 $f(x)$ 的非参数核估计式为^[24]

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{Th} \sum_{t=1}^T k\left(\frac{x - x_t}{h}\right) \quad (2)$$

$k(y)$ 为核函数, h 为窗宽, 根据 Yao 等^[25], 可以取 Gauss 核函数 $k(y) = (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2}$, 窗宽可以根据拇指法则选取

$$h = c_0 \hat{\sigma}(X) = c_0 \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x})^2} \quad (3)$$

其中 $c_0 = 1.06 \times T^{-1/5}$ 是常数, $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T x_i$. 那么, 将式(2)代入式(1), 可以得到下偏矩的非参数估计量为

$$\begin{aligned} \widehat{LPM}_{\tau, \alpha}(X) &= \int_{-\infty}^{\alpha} (\alpha - x)^\tau \hat{f}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} (\alpha - x)^\tau \frac{1}{Th} \sum_{i=1}^T k\left(\frac{x - x_i}{h}\right) dx \\ &= \frac{1}{Th} \sum_{i=1}^T \int_{-\infty}^{\alpha} (\alpha - x)^\tau k\left(\frac{x - x_i}{h}\right) dx \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_{-\infty}^{\alpha - x_i} (\alpha - x_i - hy)^\tau k(y) dy \end{aligned} \quad (4)$$

显然如果给定 τ 值, 可以得到 LPM 的解析表达式, 所以理论上可以根据式(4)得到任意正整数 τ - 阶 LPM 的表达式. 但本文主要考虑 $\tau = 1$ 时的情形, 主要原因有两点: 第一, $\tau = 1$ 时, LPM 代表预期损失, 经济含义明确且最贴近人们对风险的心理感受; 第二, 1 - 阶 LPM 具有二阶随机占优单调性. 在不确定性决策理论中, 随机占优被广泛用来对随机变量进行排序, 是公认的研究随机序的标准方法^[6]; 而二阶随机占优对应着具有凹效用函数的风险规避型投资者的行为^[6], 在金融决策中具有广泛的应用. Aumann 和 Serrano^[26] 认为良好的风险测度指标测算出来的结果应该与随机占优标准是一致的, 他们将这一性质定义为随机占优单调性 (monotonicity with respect to stochastic dominance). 具体地, 当随机变量 g 一阶 (或二阶) 随机占优随机变量 g_* 时, 如果有 $Q(g) < Q(g_*)$, 就称风险测度 Q 具有一阶 (或二阶) 随机占优单调性. Fishburn^[21] 指出: 1 - 阶 LPM 与二阶随机占优保持一致, 即 1 - 阶 LPM 具有二阶随机占优单调性. 举例来说: 如果资产 A 的收益率二阶随机占优资产 B 的收益率, 则具有凹效用函数的风险规避型投资者更偏好 A ; 如果用 1 - 阶 LPM 测算二者的风险, 则资产 A 的 1 - 阶 LPM 小于资产 B 的 1 - 阶 LPM, 即资产 A 的风险小于资产 B ; 从风险的角度看, 资产 A 优于资产 B , 这与二阶随机占优的排序是一致的. 此外, 经过适当的变化, 本文

的研究可以很容易推广到其它 τ - 阶 LPM.

取 $\tau = 1$, 可得到 1 - 阶 LPM 的解析表达式

$$\begin{aligned} \widehat{LPM}_{1,\alpha}(X) &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_{-\infty}^{\frac{\alpha-x_i}{h}} (\alpha - x_i - hy)k(y)dy \\ &= -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T ((x_i - \alpha)\Phi_0(\xi_i) + h\Phi_1(\xi_i)) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\xi_i = \frac{\alpha - x_i}{h}$, $\Phi_0(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} k(y) dy$, $\Phi_1(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} yk(y) dy$.

假设市场上存在某个股票指数, 指数收益率为随机变量 r_t . 该指数包含了 N 支成份股, 用其中 n ($n \leq N$) 支成份股来构建跟踪组合. 假设 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ 为 n 支成份股的收益率向量, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ 是投资在 n 支成份股上的组合头寸, 则跟踪组合的收益率为 $\mathbf{a}'\mathbf{r}$. 假设 $\{r_t\}_{t=1}^T$ 和 $\{r_{t,i}\}_{t=1}^T$ 分别为 n 支成份股和指数的收益率样本, 其中 $\mathbf{r}_t = (r_{t1}, r_{t2}, \dots, r_{tn})'$, 则跟踪组合的收益率样本为 $\mathbf{a}'\mathbf{r}_t, t = 1, 2, \dots, T$.

令 $X = \mathbf{a}'\mathbf{r}$ 且 $x_i = \mathbf{a}'\mathbf{r}_i$, 则根据式(4), 可得到跟踪组合的 τ - 阶 LPM 的非参数估计量为

$$\widehat{LPM}_{\tau,\alpha}(\mathbf{a}'\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \int_{-\infty}^{\frac{\alpha - \mathbf{a}'\mathbf{r}_i}{h}} (\alpha - \mathbf{a}'\mathbf{r}_i - hy)^\tau \times k(y) dy \quad (6)$$

根据式(5), 可以得到跟踪组合的 1 - 阶 LPM 的非参数估计量为

$$\begin{aligned} \widehat{LPM}_{1,\alpha}(\mathbf{a}'\mathbf{r}) \\ = -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T ((\mathbf{a}'\mathbf{r}_i - \alpha)\Phi_0(\xi_i) + h\Phi_1(\xi_i)) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\xi_i = \frac{\alpha - \mathbf{a}'\mathbf{r}_i}{h}$, 窗宽根据式(3)确定

$$\begin{aligned} h &= c_0 \hat{\sigma}(\mathbf{a}'\mathbf{r}) = c_0 \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (\mathbf{a}'\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{a}'\mathbf{r}})^2} \\ &= c_0 \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T \mathbf{a}'(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})' \mathbf{a}} \\ &= c_0 \sqrt{\mathbf{a}' \hat{\Sigma} \mathbf{a}} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\hat{\Sigma} = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})(\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}})', \bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{r}_i$.

引理 1^[25] 窗宽 $h = c_0 \sqrt{\mathbf{a}' \hat{\Sigma} \mathbf{a}}$ 是组合头寸 \mathbf{a} 的凸函数.

定理 1 1 - 阶 LPM 的非参数估计量 $\widehat{LPM}_{1,\alpha}(\mathbf{a}'\mathbf{r})$ 是组合头寸 \mathbf{a} 的凸函数.

证明 根据式(7), 可设

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}) &= \widehat{LPM}_{1,\alpha}(\mathbf{a}'\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T ((\mathbf{a}'\mathbf{r}_i - \alpha)\Phi_0(\xi_i) + h\Phi_1(\xi_i)) \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\xi_i = \frac{\alpha - \mathbf{a}'\mathbf{r}_i}{h}$, $h = c_0 \sqrt{\mathbf{a}' \hat{\Sigma} \mathbf{a}}$, $c_0 = 1.06T^{-1/5}$, $\Phi_0(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} k(y) dy$, $\Phi_1(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} yk(y) dy$, 核函数 $k(y)$ 取标准正态分布的密度函数. 式(9)两边对 ξ_i 求导, 并根据 ξ_i 的定义, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial \xi_i} &= -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T ((\mathbf{a}'\mathbf{r}_i - \alpha)k(\xi_i) + h\xi_i k(\xi_i)) \\ &= -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T k(\xi_i)(\mathbf{a}'\mathbf{r}_i - \alpha + h\xi_i) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ξ_i 对 \mathbf{a} 求导并根据 ξ_i 的定义, 可得

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{1}{h} \mathbf{r}_i - \frac{\alpha - \mathbf{a}'\mathbf{r}_i}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{1}{h} \mathbf{r}_i - \frac{\xi_i}{h} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}} \quad (11)$$

式(9)两边对 \mathbf{a} 求导, 并利用式(10), 可得

$$\frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (\Phi_0(\xi_i)\mathbf{r}_i + \Phi_1(\xi_i) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}}) \quad (12)$$

进一步地, 式(12)对 \mathbf{a}' 求导并运用式(11), 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}'} &= -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(k(\xi_i)\mathbf{r}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}} + \xi_i k(\xi_i) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}} + \Phi_1(\xi_i) \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}'} \right) \\ &= -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T k(\xi_i) \left(\mathbf{r}_i + \xi_i \frac{\partial h}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}'} \sum_{i=1}^T (\Phi_1(\xi_i)) \right) \\ &= \frac{h}{T} \sum_{i=1}^T k(\xi_i) \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}'} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}'} \sum_{i=1}^T (\Phi_1(\xi_i)) \end{aligned} \quad (13)$$

因为核函数 $k(\xi_i) \geq 0$, 样本量 $T > 0$ 且窗宽 $h > 0$, 所以 $\frac{h}{T} \sum_{i=1}^T k(\xi_i) \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{a}'}$ 是半正定矩阵. $k(y)$ 是

标准正态分布的密度函数,经过简单推到可知

$$\Phi_1(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\xi_i} yk(y)dy = -k(\xi_i) \leq 0 \quad (14)$$

因为 $-\frac{1}{T} < 0$, $\Phi_1(\xi_i) \leq 0$, 并且根据引理 1, $\frac{\partial^2 h}{\partial a \partial a}$

是半正定矩阵,因此 $-\frac{1}{T} \frac{\partial^2 h}{\partial a \partial a} \sum_{i=1}^T (\Phi_1(\xi_i))$ 是半正

定矩阵. 综合起来可得 $\frac{\partial^2 F(a)}{\partial a \partial a}$ 是半正定矩阵,即

$F(a)$ 是 a 的凸函数. 证毕.

2 增强指数模型

本节构建增强指数模型,分别讨论模型的目标函数和约束条件. 本文强调传统的增强指数模型没有加入下端风险约束,容易产生跟踪组合随指数下跌的风险,而指数大幅涨跌是我国当前市场急需关注的热点问题,所以在模型中加入非参数 1-阶 LPM 约束. 并证明了加入非参数 1-阶 LPM 约束的增强指数模型是一个凸优化问题.

增强指数模型的目标是寻找最优的组合头寸使得跟踪组合的收益率尽可能接近目标指数的收益率,同时获得超额收益. 目前增强指数模型的主流目标函数是最小化跟踪误差而最大化超额收益,参考 Beasley 等^[1] 和 Filippi 等^[7] 中的目标函数设定,根据第 1 节定义的符号,定义增强指数模型的目标为最小化跟踪误差 TE 和超额收益 ΔR 的线性组合

$$\lambda TE - (1-\lambda)\Delta R = \lambda \left(\sum_{i=1}^T \omega_i |a' r_i - r_{i,t}|^\gamma \right)^{1/\gamma} - (1-\lambda) \sum_{i=1}^T \omega_i (a' r_i - r_{i,t}) \quad (15)$$

其中 ω_i 表示第 t 种结果发生的概率,根据 Wang 等^[3],通常取等概率,即 $\omega_i = 1/T$. 式(15)中, γ 为大于零的任意正整数,设置不同的 γ 值,本文定义的跟踪误差 TE 可以退化为文献中其他作者的经典跟踪误差测度. 特别地当 $\gamma = 1$ 时,跟踪误差就退化为 Clarke 等^[27] 和 Konno 和 Yamazaki^[28]

等定义的平均绝对离差;当 $\gamma = 2$ 时,跟踪误差就是均方误差的开方,即为 Roll^[8]、Palomba 和 Ricchetti^[16] 以及 Alexander 和 Baptista^[29] 使用的跟踪误差定义. 跟踪误差中开 γ 次方是为了去量纲的影响,保证跟踪误差和超额收益的单位是一致的. 此外,式(15)中, $\lambda \in [0,1]$ 表示投资者的态度,如果投资者是保守型被动指数跟踪者,那么可以取 $\lambda = 1$,表示投资者仅关心跟踪误差而不关心超额收益;如果投资者是相对激进的,目标是获得超过指数收益率的超额收益,那么可以取 $\lambda = 0$;一般情况下 $0 < \lambda < 1$,表示投资者采取混合策略,在跟踪指数的同时,获取超额收益.

假设 $a_0 = (a_{1,0}, a_{2,0}, \dots, a_{n,0})'$ 为当前投资在 n 支成份股上的份额. 为达到最优的投资组合,需要进行调整的份额为 $\Delta a = (\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n)'$,其中 $\Delta a_i = a_i - a_{i,0}$, $\Delta a_i > 0$ 表示买入, $\Delta a_i < 0$ 表示卖出, $\Delta a_i = 0$ 表示不调整头寸. 交易成本是投资管理的一项重要考虑因素,研究表明交易费用的确对投资组合收益和风险产生影响^[30]. 在现实投资中,交易成本主要包括佣金、买卖差价、市场冲击和税收等. 本文假设资产 i 的交易成本 TC_i 是如下的线性形式^[30],并且投资者希望控制资产 i 的交易成本不超过 c_i

$$TC_i = \delta_i^+ \Delta a_i^+ + \delta_i^- \Delta a_i^- \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$\text{其中} \begin{cases} \Delta a_i^+ = \max(a_i - a_{i,0}, 0), \\ \Delta a_i^- = \max(a_{i,0} - a_i, 0), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

δ_i^+ 和 δ_i^- 分别表示资产 i 的单位买入和卖出成本. 投资者希望控制总的交易成本 TC 不超过 c

$$TC = \sum_{i=1}^n TC_i = \sum_{i=1}^n (\delta_i^+ \Delta a_i^+ + \delta_i^- \Delta a_i^-) \leq c \quad (18)$$

$\delta_i^+ = \delta_i^- = 0$ 对应着不存在交易成本的特殊情况. 在实际的金融市场上,卖空股票能通过融券手段或者买卖衍生产品实现,但这种方式有时会在限制,特别是在金融危机爆发时期,金融监管部门会通过限制过度买空或卖空来控制风险. 另外在一些金融产品比较匮乏的金融市场,不允许进行卖空行为,因此有必要对卖空进行限制. 假设每个

资产的持有份额由于规则或者交易成本考虑, 有最低的持有份额 l_i , 同时为了更有效的分散风险, 也存在最高持有份额限制 u_i , 所以资产持有份额需要满足以下边界条件

$$l_i \leq a_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

假设总的财富被标准化为 1, 那么投资者在 n 种资产的投资总额和交易成本满足如下的财富约束

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n (\delta_i^+ \Delta a_i^+ + \delta_i^- \Delta a_i^-) \leq 1 \quad (20)$$

综上, 可以得到增强指数优化模型

$$(P_0) \begin{cases} \min_{a \in R^n} \lambda TE - (1 - \lambda) \Delta R, \\ \text{s. t. 式(16) ~ 式(20)} \end{cases}$$

为使得该模型容易处理, 引入辅助变量 Δa_i^+ 和 Δa_i^- , $i = 1, 2, \dots, n$, 受约束于以下线性约束^[31]

$$\begin{aligned} \Delta a_i^+ + \Delta a_i^- &= |a_i - a_{i,0}|, \\ \Delta a_i^+ - \Delta a_i^- &= a_i - a_{i,0}, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (21)$$

$$P(\gamma, \lambda) \begin{cases} \min_{a, \Delta a^+, \Delta a^- \in R^n} \lambda \left(\sum_{i=1}^T \omega_i |a' r_i - r_{i,t}|^\gamma \right)^{1/\gamma} - (1 - \lambda) \sum_{i=1}^T \omega_i (a' r_i - r_{i,t}), \\ \text{s. t. 式(16), 式(18) ~ 式(21),} \\ \widehat{LPM}_{1,\alpha}(a' r) = -\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T ((a' r_i - \alpha) \Phi_0(\xi_i) + h \Phi_1(\xi_i)) \leq v \end{cases}$$

定义可行集

$$\Omega = \left\{ a, \Delta a^+, \Delta a^- \in R^n \mid \begin{array}{l} \text{式(16), 式(18) ~ 式(21),} \\ \widehat{LPM}_{1,\alpha}(a' r) \leq v \end{array} \right\}$$

定理 2 对于任意的正整数 $\gamma \geq 1$, 如果可行集 Ω 非空, 基于非参数 1-阶 LPM 的增强指数模型 $P(\gamma, \lambda)$ 是一个凸优化问题.

证明 模型 $P(\gamma, \lambda)$ 中, 除了非参数 1-阶 LPM 约束之外, 其它的约束条件都是线性的, 线性的约束集必然是凸集. 根据定理 1 可知, $\widehat{LPM}_{1,\alpha}(a' r)$ 是组合头寸 a 的凸函数, 根据最优化理论, 凸函数的下等值集是凸集, 即非参数 1-阶 LPM 的约束集 $\widehat{LPM}_{1,\alpha}(a' r) \leq v$ 是凸集. 凸集的交集必为凸集, 故模型 $P(\gamma, \lambda)$ 的可行集 Ω 是凸

模型可以化为以下仅含有线性约束的优化问题

$$(P_1) \begin{cases} \min_{a, \Delta a^+, \Delta a^- \in R^n} \lambda TE - (1 - \lambda) \Delta R, \\ \text{s. t. 式(16), 式(18) ~ 式(21)} \end{cases}$$

其中 $\Delta a^+ = (\Delta a_1^+, \Delta a_2^+, \dots, \Delta a_n^+)$,
 $\Delta a^- = (\Delta a_1^-, \Delta a_2^-, \dots, \Delta a_n^-)$

虽然模型 (P_1) 的目标函数中包含了最小化跟踪误差, 但也并不能保证跟踪组合不会承担较大损失. 特别是当所跟踪的指数出现较大的下跳风险时, 跟踪组合会随指数一起大幅下跌而导致巨大损失, 此时与目标指数跟踪得越紧, 跟踪组合承受的损失越大. 因此需要在增强指数模型中控制跟踪组合自身的下端风险. 以下引入跟踪组合的 1-阶 LPM 来控制下端风险. 把 1-阶 LPM 的非参数估计式(7)嵌入模型 (P_1) , 并假设投资人能够承担的最大下端风险为 v , 可以得到基于非参数 1-阶 LPM 的增强指数模型

集. 接下来, 只需要证明 $P(\gamma, \lambda)$ 的目标函数是凸函数. 目标函数包含两部分, 后半部分为决策变量 a 的线性函数, 从而也是 a 的凸函数. 所以下重点证明 $f(a) = \left(\sum_{i=1}^T \omega_i |a' r_i - r_{i,t}|^\gamma \right)^{1/\gamma}$ 是 a 的凸函数. 为此, 先给出引理 2 和引理 3.

引理 2(闵可夫斯基不等式) 如果 $x_t, y_t > 0, t = 1, 2, \dots, T$ 且 $\gamma \geq 1$, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^T (x_i + y_i)^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \left(\sum_{i=1}^T x_i^\gamma \right)^{1/\gamma} + \left(\sum_{i=1}^T y_i^\gamma \right)^{1/\gamma}$$

引理 3(三角不等式) 如果 $x, y \in R$ 则有 $|x + y| \leq |x| + |y|$

对于任意的两个决策向量 a_1 和 a_2 , 以及任意实数 $\kappa \in [0, 1]$, 根据引理 2 和引理 3, 可得

$$\begin{aligned}
f(\kappa a_1 + (1-\kappa)a_2) &= \left(\sum_{i=1}^T \omega_i \left| (\kappa a_1 + (1-\kappa)a_2)' r_i - r_{i,t} \right|^\gamma \right)^{1/\gamma} = \left(\sum_{i=1}^T \omega_i \left| \kappa(a_1' r_i - r_{i,t}) + (1-\kappa)(a_2' r_i - r_{i,t}) \right|^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \\
&\left(\sum_{i=1}^T \omega_i \left(\left| \kappa(a_1' r_i - r_{i,t}) \right| + \left| (1-\kappa)(a_2' r_i - r_{i,t}) \right| \right)^\gamma \right)^{1/\gamma} = \left(\sum_{i=1}^T \left(\left| \sqrt[\gamma]{\omega_i} \kappa(a_1' r_i - r_{i,t}) \right| + \left| \sqrt[\gamma]{\omega_i} (1-\kappa)(a_2' r_i - r_{i,t}) \right| \right)^\gamma \right)^{1/\gamma} \leq \\
&\left(\sum_{i=1}^T \left(\left| \sqrt[\gamma]{\omega_i} \kappa(a_1' r_i - r_{i,t}) \right| \right)^\gamma \right)^{1/\gamma} + \left(\sum_{i=1}^T \left(\left| \sqrt[\gamma]{\omega_i} (1-\kappa)(a_2' r_i - r_{i,t}) \right| \right)^\gamma \right)^{1/\gamma} = \kappa f(a_1) + (1-\kappa)f(a_2)
\end{aligned}$$

因此 $f(a)$ 以及 $\lambda f(a)$ 是组合头寸 a 的凸函数.

证毕.

3 算例分析

本节运用模拟数据和实际金融市场数据, 检验前文建立的增强指数模型的表现. 首先运用 Monte Carlo 模拟方法生成市场下跌时的模拟样本, 检验模型在不同的参数设置下的表现, 然后基于上证 50 指数及其成份股的历史样本进行实证分析.

3.1 Monte Carlo 模拟

本小节运用 Monte Carlo 模拟方法生成股票的收益率数据进行数值分析. 假设市场上存在 100 支股票, 这 100 支股票的收益率服从 100 维的非对称拉普拉斯分布 (Asymmetric Laplace Distribution, ALD). 相对于正态分布和 t 分布等椭圆分布, ALD 不仅可以刻画实际金融市场数据的尖峰厚尾性, 还可以刻画实际金融市场数据的非对称性, 而且其密度函数具有性质良好的解析表达式, 是近年来常被学者用来拟合实际金融市场数据的一类分布^[32,33]. 假设 100 支股票收益率的联合分布为 $AL_n(\mu, \Sigma)$, 其中 $n = 100$ 为维数, μ 为非对称参数, 是 n 维列向量, Σ 为规模参数, 是 $n \times n$ 的方阵. 基于均匀分布生成 μ 和 Σ 里的数值 (限于篇幅, 这些数值不再列出), 以此作为 100 支股票收益率的真实联合分布. 然后, 基于 $AL_n(\mu, \Sigma)$ 生成这 100 支股票收益率的样本, 关于多维 ALD 的样本生成过程可参考 Kotz 等^[32]. 为了控制抽样误差, 以集中关注模型在指数跟踪和风险控制方面的表现, 生成了尽可能大的样本

量. 具体地, 生成 100 支股票的 $T = 10\,000$ 个样本, 并将前 5 000 个样本作为估计子样本, 后 5 000 个样本作为检验子样本. 基于这 100 支股票的样本, 构造出一个虚拟的指数, 指数中的权重通过均匀分布生成. 步骤如下:

(1) 运用均匀分布 $U(0,1)$ 生成 100 个随机数 $W_i, i = 1, 2, \dots, 100$;

(2) 将 100 个随机数除以它们的和, 以保证权重之和为 1, 即 $w_i = W_i / \sum_{i=1}^{100} W_i, i = 1, 2, \dots, 100$;

(3) 基于权重 $w_i, i = 1, 2, \dots, 100$ 和 100 支股票的收益率样本 $\{r_i\}_{i=1}^T$, 其中 $r_i = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{100t})'$, 构造指数的收益率样本 $r_{i,t} = \sum_{i=1}^{100} w_i r_{it}, t = 1, 2, \dots, T$.

得到了 100 支成份股的收益率样本和指数的收益率样本之后, 就可以将样本数据代入模型 $P(\gamma, \lambda)$ 并设定模型中的相关参数 γ, λ, v , 求解模型得到最优的投资策略. 将最优投资策略运用估计子样本 (样本内) 和检验子样本 (样本外), 并假设投资者的初始投资为 1 元, 来检验各种参数设置下最优投资策略的累积收益率表现. 本文主要关心的模型参数是 λ 和 v , 所以设定不同 λ, v 值, 而固定其它的参数不变. 交易成本参数设定 $\delta_i^+ = \delta_i^- = 0.01, c_i = 0.01, c = 0.1$ 主要参考 Brown 和 Smith^[30] 的研究; 等概率设定 $\omega_i = 1/T$ 主要参考 Beasley 等^[1] 和 Wang 等^[3] 的思想; $l_i = 0, u_i = 1$ 表示不可卖空, $a_{i,0} = 0$ 是指投资者的初始头寸为零, $\alpha = 0$ 为 LPM 中的目标收益, 这些都是常见设定. 另外, 取不同的 γ 值发现结果类似, 限于篇幅以下仅报告 $\gamma = 1$ 的模拟结果^②. 结果见图 1 ~ 图 3.

② γ 为其它值时的模拟结果, 读者可来信索取.

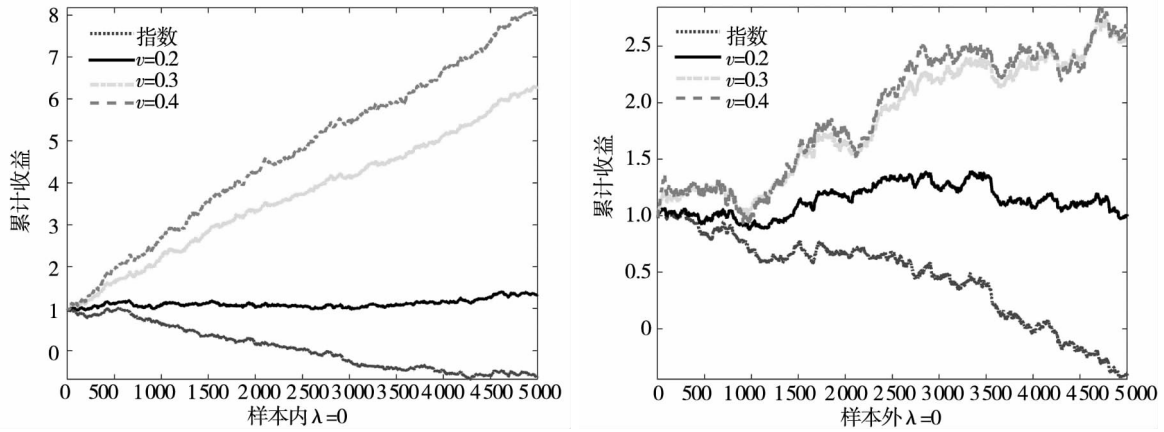


图1 超额收益最大化模型的表现 ($\lambda = 0$)

Fig. 1 The performance of excess return maximization model ($\lambda = 0$)

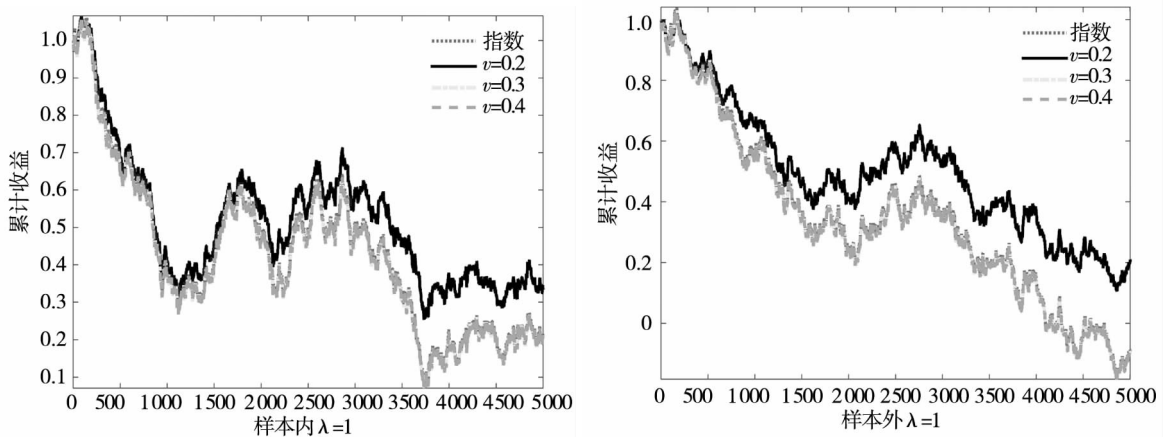


图2 指数复制模型的表现 ($\lambda = 1$)

Fig. 2 The performance of the index replication model ($\lambda = 1$)

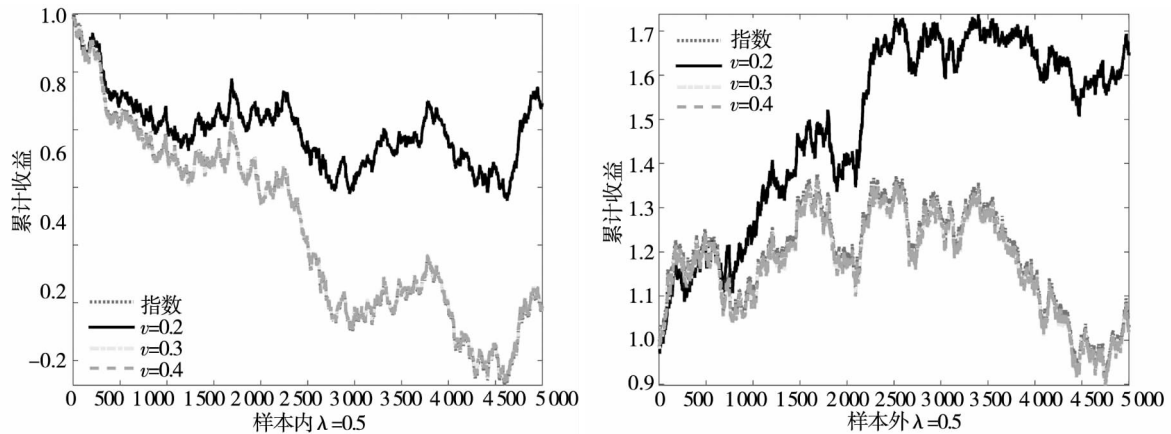


图3 增强指数模型的表现 ($\lambda = 0.5$)

Fig. 3 The performance of the enhanced indexation model ($\lambda = 0.5$)

图 1 展示了超额收益最大化模型的样本内 (左图) 和样本外 (右图) 表现, 即 $\lambda = 0$. 此时优化问题的目标函数是最小化负的超额收益, 即最大化超额收益. 从图上可以看出, 由于 v 的不同取

值会导致可行集变化, 进而导致最优策略和目标函数值发生变化. 具体来说, 随着 v 的增加, 优化问题 $P(\gamma, \lambda)$ 的可行集扩大, 从而可以得到更优的目标函数值, 即样本内和样本外都显示, 随着 v

的增加,超额收益会增加.图中表现为 $v = 0.4$ 的累计收益率最大,而 $v = 0.2$ 累计收益率最小, $v = 0.3$ 的累计收益率居中,三者的累计收益率都优于指数,而且随时时间的推移,与指数累计收益率之间的距离越来越大,表明超额收益率在累积.另外,虽然 $v = 0.2$ 时的累计收益率小于 $v = 0.3$ 和 $v = 0.4$ 时的累计收益率,但从样本外表现可以发现, $v = 0.2$ 时的累计收益率更加平稳,没有出现较大的回撤,而 $v = 0.3$ 和 $v = 0.4$ 时的累计收益有几处较大的回撤.如果将这些策略运用到开放式基金的投资管理,较大的回撤会导致基金投资者大量赎回本金,从而使得基金管理者陷于被动,被迫以较低的价格卖出资产以应付基金投资者的赎回需求,这进一步恶化基金的表现,如此恶性循环是基金管理者和基金投资者都不愿意看到的,所以,对于机构投资者,赚取平稳的较小的超额收益要远比冒较大风险获得较大超额收益更有吸引力. $v = 0.2$ 时的累计收益率更为平稳的原因是 $v = 0.2$ 对优化模型施加了更紧的下端风险约束,从而导致其在优化过程中,把下端风险较大的股票都剔除在外,只留下下端风险较小的资产,从而使得跟踪组合的下端风险较小,累计收益率表现得更为平稳.

图2展示了指数复制模型的样本内(左图)和样本外(右图)表现,即模型的目标函数是最小化跟踪误差.由图可以看出, $v = 0.3$ 和 $v = 0.4$ 时的累计收益率与指数累计收益率重合,说明二者都完美复制指数,但也说明, $v = 0.3$ 和 $v = 0.4$ 对优化模型施加的约束不是紧的,即下偏矩约束不起作用,这相当于不施加LPM约束.而 $v = 0.2$ 时的累计收益率明显高于 $v = 0.3$ 、 $v = 0.4$ 及指数的累计收益率,说明 $v = 0.2$ 对模型施加的约束是紧的,下偏矩约束是起作用的.由于 $v = 0.2$ 时的下偏矩约束约束是紧的,导致优化问题的可行集变小,进而导致优化模型得到的最优目标函数值不如 $v = 0.3$ 、 $v = 0.4$,即加入 $v = 0.2$ 约束的跟踪误差要大于 $v = 0.3$ 、 $v = 0.4$.但正是因为 $v = 0.2$ 约束控制了跟踪组合随着指数下跌的风险,才能获取超过指数收益的超额收益,而这必然会导致跟踪误差变大.

图3展示了增强指数模型的样本内(左图)

和样本外(右图)表现,即 $\lambda = 0.5$,投资者既关心跟踪误差,也希望获得超额收益.从模型的表现来看, $v = 0.3$ 和 $v = 0.4$ 时的累计收益率几乎与指数重合,并没有实现投资者追求超额收益的目标,而 $v = 0.2$ 时的累计收益率才表现出既能跟踪指数的趋势,还能获得超过指数收益的超额收益.原因仍然在于 $v = 0.3$ 和 $v = 0.4$ 施加的下偏矩约束是不起作用的,所以施加约束与不施加约束的结果是一样的,而且设定 $v = 0.3$ 与设定 $v = 0.4$ 所得的结果也是一样的,而 $v = 0.2$ 施加的约束是紧的,从而能够更好地控制下端风险,使得跟踪组合既能跟踪指数的趋势,还能避免随指数一起大幅下跌的风险,从而获取超额收益,但是代价是跟踪误差要比 $v = 0.3$ 和 $v = 0.4$ 时的跟踪误差大.

对比图1~图3,还可以发现,图1中的超额收益是最高的,但跟踪误差也是最大的;图2中的超额收益是最低的,但跟踪误差也是最小的;图3介于二者其间,是图1和图2的混合,这符合本文模型的应有之意.因为图1是基于超额收益最大化模型($\lambda = 0$)的累计收益率,其目标函数仅关心超额收益而不关心跟踪误差;图2是基于指数复制模型($\lambda = 1$)的累计收益率,其目标函数仅关心跟踪误差而不关心超额收益;图3是基于增强指数模型($\lambda = 0.5$)的累计收益率,其目标函数是混合的,既关心跟踪误差也考虑超额收益.这说明投资者可以基于本文的模型并根据自身的风险收益偏好设定参数 λ 以达到特定的目标.

3.2 实证分析

为了进一步检验本文提出的增强指数模型在实际金融市场中的表现,以上证50指数及其成份股为例进行实证分析.具体地,为了分析模型在股票指数下跌过程中控制风险的能力,本文收集了2007年9月18日至2016年12月8日指数及其成份股的日收盘价数据,数据来自Wind经济金融数据库.上证50指数的时间趋势如图4所示,在此期间,上证50指数大部分时间都处于下跌的趋势,为检验模型在指数下跌趋势中的风险控制能力提供了较好的检验基础.本文重点关注股票指数的三个下跌区间:2007年9月18日至2008年10月27日(区间I)、2009年7月28日至2014

年 7 月 10 日(区间 II)、2015 年 5 月 7 日至 2016 年 12 月 8 日(区间 III)。

经过对数差分得到指数和成份股的收益率数据(单位:%),表 1 给出了各个样本区间内指数收益率数据的描述性统计.从均值和中位数来看,在考察区间内,上证 50 指数平均来看处于下降趋势,而且下降的天数大于上涨的天数.从最大值、最小值和标准差来看,区间 I 的波动是最大的,而最大单日跌幅发生在区间 III,最大单日涨幅发生在区间 I.从偏度系数、峰度系数和 JB 统计量来看,所有区间的样本数据都具有“尖峰厚尾”和“有偏”特征,均不服从正态分布.从下偏矩来看,区间 I 的下端风险最大,区间

II 的下端风险相对较小,区间 III 和全样本的下端风险介于中间.

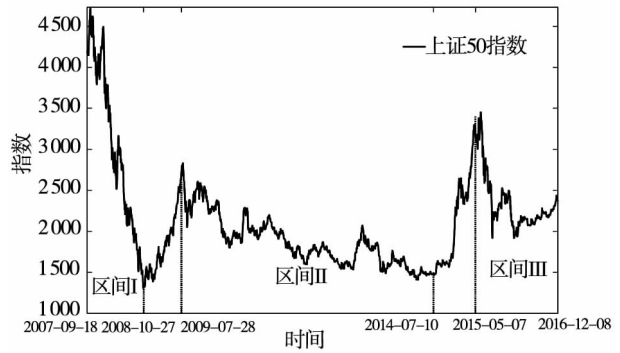


图 4 上证 50 指数时间序列 (2007-09-18 ~ 2016-12-08)
Fig. 4 Shangzheng 50 price time series from 18 Sep. 2007 to 8 Dec. 2016

表 1 样本数据的描述性统计
Table 1 Data and descriptive statistics

指标	均值	中位数	标准差	最小值	最大值	偏度系数	峰度系数	JB 统计量	下偏矩
区间 I	-0.377 4	-0.370 6	2.885 0	-8.180 7	9.672 9	0.312 1	3.962 1	14.851 6	1.173 3
区间 II	-0.039 9	-0.051 3	1.473 3	-6.698 3	5.748 7	-0.008 8	5.219 2	246.263 9	0.554 2
区间 III	-0.051 1	-0.004 6	2.012 9	-9.382 4	7.839 2	-0.674 4	7.620 1	378.353 9	0.708 5
全样本	-0.007 6	-0.010 0	1.901 7	-9.382 4	9.672 9	-0.107 6	6.327 5	1 039.132 2	0.685 4

把区间 I 作为估计子样本,分别把区间 II、区间 III 和除区间 I 以外的所有样本——记为样本外(全区间)——作为检验子样本.将估计子样本的收益率数据带入模型 $P(\gamma, \lambda)$ 进行求解,得到最优投资策略,然后将最优投资策略分别运用到估计子样本和检验子样本,即进行样本内和样本外检验.由于现实生活中,完全的指数复制模型 ($\lambda = 1$) 和纯粹追求超额收益最大化的模型 ($\lambda = 0$) 已经逐渐被投资者放弃,投资者更多地运用混合投资策略;而且从上节的模拟结果来看,增强指数模型能够更好地实现投资者在跟踪指数同时获取超额收益的目的.所以,在实证部分,使用增强指数模型,即取 $\lambda = 0.5$.同时为了比较不同 LPM 约束下的表现,本文选择了三个不同的风险约束值 $v = 1.1, v = 1.2$ 和 $v = 1.3$.模型中的其它参数设定如下: $l_i = 0, u_i = 1, a_{i,0} = 0, \delta_i^+ = \delta_i^- = 0.01, c_i = 0.01, c = 0.1, \gamma = 1, \alpha = 0, \omega_i = 1/T, i = 1, 2, \dots, n$.

此外,增强指数模型的核心是用少量的成份股来跟踪指数的同时获取超额收益,所以在

进行模型优化之前需要确定进入跟踪组合的成份股集合.目前文献的普遍做法是对每个成份股引入一个二元选择变量,并在优化模型中加入基数约束,在进行模型优化的同时进行选股.这类模型的主要缺陷在于,当成份股的数量较多时,需要引入大量的二元选择变量作为辅助变量,模型的决策变量成倍增加,同时约束条件中出现整数约束,优化模型将变成比较难解的带非线性约束的混合整数规划问题.所以,当前许多偏技术的研究主要解决这类问题的求解问题,其间发展出了混合线性规划方法、二次规划方法、启发式算法、遗传算法、进化搜寻算法及其改进算法等^[1-7].然而,正如 Roman 等^[6]所说,当前的文献大多主要关注如何克服模型的计算困难,从而发展出了许多的计算方法,却忽略了增强指数模型的本质目的.因此,本文为了降低模型的求解难度,关注于模型本身的基本问题,借鉴 Ling 等^[17]的思想,运用成份股的 Beta 来做模型优化前的选股,并用选出来的成份股来跟踪指数并获取超额收益.理论上通过这

种“Beta 选股 + 组合优化”思想构建起来的增强指数模型具有很好的扩展性和灵活性,模型求解也十分方便,计算时间可控制在几秒钟之内.实证研究表明,这种基于金融学原理的选股方法配合组合优化模型能够产生很好的样本内和样本外表现.具体地,计算出上证 50 中的成份股与指数的 Beta 值,选择 Beta 值最接近 1 的 20 支成份股来跟踪指数.

根据前文对符号的定义,跟踪组合的收益率为 $\mathbf{a}'\mathbf{r}_t$,指数的收益率为 $r_{I,t}$, $t = 1, 2, \dots, T$,定义以下指标来比较跟踪组合的表现:超额收益 $\Delta R = 1/T \sum_{t=1}^T (\mathbf{a}'\mathbf{r}_t - r_{I,t})$,标准差 $\hat{\sigma} = \sqrt{\mathbf{a}'\hat{\Sigma}\mathbf{a}}$,夏普比率 $SR = \Delta R/\hat{\sigma}$ 以及跟踪组合的 1 - 阶下偏矩.表 2 给出了指数和不同参数 ν 下的跟踪组合在各个样本期间的收益和风险比较情况.

表 2 不同投资策略的收益与风险比较

Table 2 Return and risk of investment strategies

样本	区间 I				区间 II			
	超额收益	标准差	夏普比率	下偏矩	超额收益	标准差	夏普比率	下偏矩
$\nu = 1.1$	0.144 3	2.735 7	0.052 7	1.099 9	0.045 6	1.127 1	0.040 5	0.427 5
$\nu = 1.2$	0.101 9	2.942 0	0.034 6	1.195 6	0.031 7	1.300 4	0.024 4	0.490 7
$\nu = 1.3$	0.101 4	2.943 1	0.034 4	1.196 2	0.031 6	1.302 0	0.024 3	0.491 3
指数	0.000 0	2.885 0	0.000 0	1.173 3	0.000 0	1.473 3	0.000 0	0.554 2
样本	区间 III				样本外(全区间)			
指标	超额收益	标准差	夏普比率	下偏矩	超额收益	标准差	夏普比率	下偏矩
$\nu = 1.1$	0.041 6	1.828 7	0.022 8	0.645 4	0.026 7	1.441 9	0.018 5	0.514 1
$\nu = 1.2$	0.030 0	1.919 7	0.015 6	0.684 2	0.024 6	1.599 2	0.015 4	0.575 1
$\nu = 1.3$	0.030 0	1.921 0	0.015 6	0.684 8	0.024 6	1.600 9	0.015 4	0.575 8
指数	0.000 0	2.012 9	0.000 0	0.708 5	0.000 0	1.718 2	0.000 0	0.621 0

从表 2 来看,在所有样本区间,基于增强指数模型的投资策略都能获得正的超额收益和正的夏普比率,说明从收益率和单位风险收益来看,本文构建的投资策略优于指数;从标准差和下偏矩来看,本文构建的投资策略的标准差和下偏矩都小于指数的标准差和下偏矩(区间 I 除外),在区间 I, $\nu = 1.1$ 时的标准差和下偏矩也小于指数,说明本文构建的投资策略的风险小于指数.从 ν 的三个不同值的结果比较来看, $\nu = 1.1$ 时的超额收益是最大的,标准差是最小的,从而夏普比率也是最大的,而且 $\nu = 1.1$ 的下偏矩也是最小的.这说明加入一个较小的合适的风险约束水平,能够更好地控制风险,并获取超额收益.以上说明本文构建的增强指数模型在实际金融市场的投资管理中是有效的.

假设投资者的初始投资为 1 元,图 5 和图 6 直观地展示了各种投资策略在各个样本区间的累积收益率.从图中可以看出,本文构建的跟踪

组合的累计收益率与指数的累计收益率的走势高度一致,而且都高于指数,说明本文构建的投资策略达到了投资者的目标,既能够很好地跟踪指数的趋势,同时还能够获取超额收益.在 ν 的三个参数设置中, $\nu = 1.1$ 的表现最好,累计收益率高于其它两种情况,风险控制能力更强,特别是在区间 II,由于其很好地控制了下端风险, $\nu = 1.1$ 的累计收益率并不随着指数累计收益率的下坠而下降.这说明加入 $\nu = 1.1$ 的下偏矩约束是紧的,即施加较小的风险值约束能够更好地控制下端风险.此外,从表 2 和图 5 ~ 图 6 来看, $\nu = 1.2$ 和 $\nu = 1.3$ 的风险收益计算结果非常接近,累计收益率曲线几乎重叠,说明二者对下偏矩施加的风险约束不是紧的.

此外,还检验了 γ 分别取 2, 3, 4、 α 分别取均值或无风险收益率及允许卖空 $l_i = -\infty$, $u_i = \infty$ 的实证结果,结论基本不变,限于篇幅,不再报告.

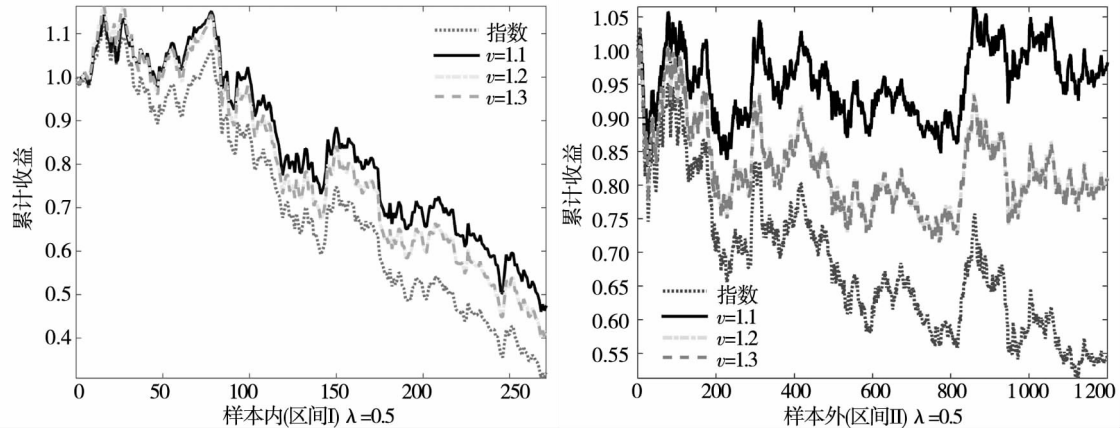


图 5 样本内(区间 I)和样本外(区间 II)的累计收益率

Fig. 5 Accumulated returns of sub-period I and sub-period II

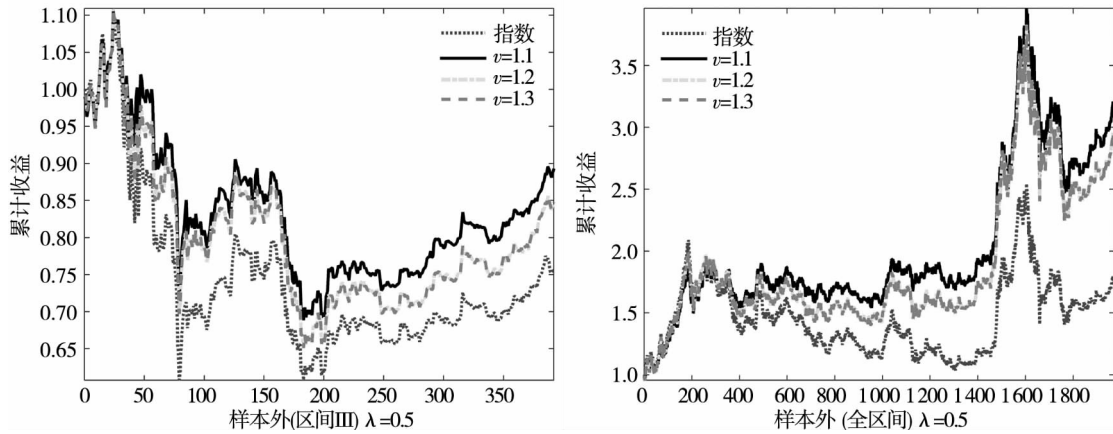


图 6 样本外(区间 III)和样本外(全样本)的累计收益率

Fig. 6 Accumulated returns of sub-period III and all sample

4 结束语

指数化投资问题一直深受学者的关注,特别是近年来,随着我国金融衍生产品的发展和私募基金的兴起,量化投资策略的研究大大激发了学者的兴趣.增强指数模型是当前十分流行的一类指数化量化投资策略,近年来才受到广大学者的关注和研究,是一个相对较新的研究领域.本文构建了非常灵活和便于拓展的增强指数模型,当调节模型中的权衡参数 λ , 本文的增强指数模型可以退化到传统的指数复制模型和超额收益最大化模型.在模型中加入下偏矩约束以控制跟踪组合的下端风险.为了得到下偏矩的解析表达式,用非参数估计方法结合

实际样本数据得到下偏矩的估计式,并将估计出来的 LPM 代替理论上的 LPM 嵌入模型,实现风险估计与组合优化同时进行,以提高模型的应用价值.模拟和实证结果表明,通过选择适当的权衡参数 λ , 投资者可以达到跟踪指数、追求超额收益或者二者混合的目标;通过设定合适的风险约束值 v , 可以有效地控制跟踪组合随指数下坠的风险,从而获取超过指数平均收益的超额收益.

本文的后续研究可以考虑期望效用视角下的增强指数模型,以及其它下端风险度量指标如半方差或平均绝对离差约束下的增强指数模型^[34, 35];在本文中仅考虑 1-阶 LPM 约束下的增强指数模型,进一步的研究还可以考虑其它正整数阶下的 LPM 约束问题.

参考文献:

- [1] Beasley J E, Meade N, Chang T J. An evolutionary heuristic for the index tracking problem[J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 148(3): 621–643.
- [2] Rudolf M, Wolter H J, Zimmermann H. A linear model for tracking error minimization[J]. *Journal of Banking & Finance*, 1999, 23(1): 85–103.
- [3] Wang M H, Xu C X, Xu F M, et al. A mixed 0–1 LP for index tracking problem with CVaR risk constraints[J]. *Annals of Operations Research*, 2012, 196(1): 591–609.
- [4] Canakoz N A, Beasley J E. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 196(1): 384–399.
- [5] Yao D D, Zhang S Z, Zhou X Y. Tracking a financial benchmark using a few assets[J]. *Operations Research*, 2006, 54(2): 232–246.
- [6] Roman D, Mitra G, Zverovich V. Enhanced indexation based on second-order stochastic dominance[J]. *European Journal of Operational Research*, 2013, 228(1): 273–281.
- [7] Filippi C, Guastaroba G, Speranza M G. A heuristic framework for the bi-objective enhanced index tracking problem[J]. *Omega*, 2016, 65: 122–137.
- [8] Roll R. A mean/variance analysis of tracking error[J]. *The Journal of Portfolio Management*, 1992, 18(4): 13–22.
- [9] Guastaroba G, Speranza M G. Kernel search: An application to the index tracking problem[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 217(1): 54–68.
- [10] Fábíán C I, Mitra G, Roman D. Processing second-order stochastic dominance models using cutting-plane representations[J]. *Mathematical Programming*, 2011, 130(1): 33–57.
- [11] Valle C A, Meade N, Beasley J E. Absolute return portfolios[J]. *Omega*, 2014, 45: 20–41.
- [12] Guastaroba G, Mansini R, Ogryczak W, et al. Linear programming models based on Omega ratio for the enhanced index tracking problem[J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, 251(3): 938–956.
- [13] Ruiz-Torrubiano R, Suárez A. A hybrid optimization approach to index tracking[J]. *Annals of Operations Research*, 2009, 166(1): 57–71.
- [14] Krink T, Mittnik S, Paterlini S. Differential evolution and combinatorial search for constrained index-tracking[J]. *Annals of Operations Research*, 2009, 172(1): 153–176.
- [15] Alexander G J, Baptista A M. Active portfolio management with benchmarking: Adding a value-at-risk constraint[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2008, 32(3): 779–820.
- [16] Palomba G, Riccetti L. Portfolio frontiers with restrictions to tracking error volatility and value at risk[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2012, 36(9): 2604–2615.
- [17] Ling A F, Sun J, Yang X G. Robust tracking error portfolio selection with worst-case downside risk measures[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2014, 39: 178–207.
- [18] Markowitz H. Portfolio selection[J]. *The Journal of Finance*, 1952, 7(1): 77–91.
- [19] Bawa V S. Optimal rules for ordering uncertain prospects[J]. *Journal of Financial Economics*, 1975, 2(1): 95–121.
- [20] Bawa V S, Lindenberg E B. Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework[J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 5(2): 189–200.
- [21] Fishburn P C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns[J]. *The American Economic Review*, 1977, 67(2): 116–126.
- [22] 凌爱凡, 杨晓光, 唐乐. 具有多元权值约束的鲁棒 LPM 积极投资组合[J]. *管理科学学报*, 2013, 16(8): 31–46.
- Ling Aifan, Yang Xiaoguang, Tang Le. Robust LPM active portfolio selection with multiple weights constraints[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2013, 16(8): 31–46. (in Chinese)
- [23] Zhu S S, Li D, Wang S Y. Robust portfolio selection under downside risk measures[J]. *Quantitative Finance*, 2009, 9(7): 869–885.
- [24] Li Q, Racine J S. *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*[M]. Princeton: Princeton University Press, 2007.
- [25] Yao H X, Li Z F, Lai Y Z. Mean-CVaR portfolio selection: A nonparametric estimation framework[J]. *Computers & Operations Research*, 2013, 40(4): 1014–1022.
- [26] Aumann R J, Serrano R. An economic index of riskiness[J]. *Journal of Political Economy*, 2008, 116(5): 810–836.

- [27] Clarke R G, Krase S, Statman M. Tracking errors, regret, and tactical asset allocation[J]. *The Journal of Portfolio Management*, 1994, 20(3): 16–24.
- [28] Konno H, Yamazaki H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market [J]. *Management Science*, 1991, 37(5): 519–531.
- [29] Alexander G J, Baptista A M. Active portfolio management with benchmarking: A frontier based on alpha[J]. *Journal of Banking & Finance*, 2010, 34(9): 2185–2197.
- [30] Brown D B, Smith J E. Dynamic portfolio optimization with transaction costs: Heuristics and dual bounds[J]. *Management Science*, 2011, 57(10): 1752–1770.
- [31] Krokmal P, Palmquist J, Uryasev S. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints[J]. *Journal of Risk*, 2002, 4: 43–68.
- [32] Kotz S, Kozubowski T, Podgorski K. *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance*[M]. Boston: Birkhäuser Press, 2012.
- [33] 刘攀, 周若媚. AEPD、AST 和 ALD 分布下金融资产收益率典型事实描述与 VaR 度量[J]. *中国管理科学*, 2015, 23(2): 21–28.
Liu Pan, Zhou Ruomei. Description of the typical characteristics of financial asset's yield distribution and VaR models based on AEPD、AST and ALD distribution[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2015, 23(2): 21–28. (in Chinese)
- [34] 李斌, 张迪, 唐松慧. 基于次梯度投影的泛投资组合选择策略[J]. *管理科学学报*, 2018, 21(3): 94–104.
Li Bin, Zhang Di, Tang Songhui. Universal portfolio selection strategy based on sub-gradient projection[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(3): 94–104. (in Chinese)
- [35] 陈荣达, 王泽, 李泽西, 等. 厚尾分布情形下的信用资产组合风险度量[J]. *管理科学学报*, 2017, 20(3): 46–55.
Chen Rongda, Wang Ze, Li Zexi, et al. Risk measurement for portfolio credit risk with risk factors with heavy-tailed distribution[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(3): 46–55. (in Chinese)

Enhanced indexation model with lower partial moment constraint

HUANG Jin-bo¹, LI Zhong-fei^{2*}, ZOU Xin-yue¹

1. School of Finance, Guangdong University of Finance & Economics, Guangzhou 510320, China;
2. Sun Yat-sen Business School, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

Abstract: Enhanced indexation model (EIM) adopts some of the constituents to construct a portfolio to track the benchmark index and obtain excess returns. As the benchmark index falls, the tracking portfolio follows and yield negative returns. Therefore, it is necessary to add downside risk constraints to the traditional EIM in order to prevent the tracking portfolio from jumping in conjunction with severe market recession. It is noticeable that, as a downside risk measure, the lower partial moment (LPM) has good theoretical properties and covers the classical measures such as loss probability, expected loss, and lower semi-variance. In this paper, an EIM with the LPM constraint is constructed. Its key characteristics are threefolds. First, our model has a more general objective function to meet investors' risk preferences. By adjusting the balanced parameter, our model can be degenerated to the traditional index replication model and excess returns maximum model. Second, the nonparametric LPM constraint is added to our model in order to control the downside risk of the tracking portfolio. Third, the objective function and the nonparametric first-order LPM are proven to be a convex function of the portfolio's position, and the EIM with nonparametric first-order LPM are proven to be a convex optimization problem. Finally, Monte Carlo simulation and the empirical results show that our model can effectively control the downside risk and obtain excess returns.

Key words: enhanced indexation; lower partial moment; nonparametric estimation; convex optimization