

证券买卖速度受制约下的最优交易策略^①

林辉¹, 杨念^{1*}, 吴广谋²

(1. 南京大学经济学院, 南京 210093; 2. 东南大学经济管理学院, 南京 211189)

摘要: 以往对最优交易策略的研究忽略了交易速度的外生制度性约束. 本文基于弱有效市场假设, 构建交易速度受制约条件下, 最大化投资效用的交易策略模型. 运用极大值原理, 推导出不同市场情形、各种初始持仓条件下最优交易策略的解析解. 通过对最优交易策略的进一步分析表明: 存在一个最优初始持仓(即机会容量)使投资效用最大化; 投资者需以最大交易速度在投资期的初始阶段以机会容量为目标调整持仓, 并在投资期的最后阶段出清仓位.

关键词: 最优交易策略; 交易速度; 弱有效市场; 极大值原理

中图分类号: F830 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2020)01-0065-12

0 引言

现实中证券市场的供给与需求不是完全弹性的, 故为保证交易的公平性, 证券监管部门往往对投资者瞬间交易大额数量证券的行为实施限制, 并为此制定了各种监管制度^②. 这些监管制度的实施, 一方面使单个投资者无法操纵市场, 以保证证券市场的有效性; 另一方面, 由于投资者的交易速度或持仓量受到制约, 导致大额头寸无法瞬间出清, 只能将其持有的头寸分割委托(split order), 并在未来的若干时点上分别交易部分头寸以符合监管制度的要求. 由此可见, 若监管制度得到有效实施, 投资者将面对一个弱式有效(weak-form)、交易速度或持仓量受到外生制度性约束的交易市场, 那么, 在这样的市场中投资者如何制定一个最优交易策略使其效用最大化? 这正是本文的研究主题.

以往的研究成果忽略了外生制度性约束对交易策略施加的影响, 隐含着投资者的持仓水平或交易速度完全由其自主择优决定的假设. 明显地,

若个别投资者执行这样的最优交易策略, 可能给市场带来严重的冲击, 甚至市场操纵. 这与现实中投资者的交易行为受到监管制度约束的事实不符, 也违背了有效市场的假设. 为弥补以往研究的不足, 本文将探讨交易速度受制约条件下的最优交易策略问题; 其次, 本文所研究不仅是证券的变现策略, 而且对不同市场行情、任意初始持仓条件下的最优交易策略(既可能买入也可能卖出)都进行解析; 最后, 给出最优初始持仓, 由此形成完整的最优交易策略. 本研究使交易策略模型更贴近现实, 具有重要的理论和实践意义.

1 相关文献回顾与评述

为了降低市场冲击(market impact)对交易价格的不利影响, 持有大额头寸的交易者通常会将证券拆分为较小的份额分批出清. 那么, 在不确定性条件下, 将证券分多少批次, 以及每批次交易多少数量, 以实现最大化的投资效用, 便成为最优交

① 收稿日期: 2018-12-11; 修订日期: 2019-08-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71271110).

通讯作者: 杨念(1984—), 男, 安徽定远人, 副教授. Email: yangnian@nju.edu.cn

② 例如, 为防止市场操纵, 上海证券交易所规定股票、基金、权证交易单笔申报最大数量应当不超过100万股, 债券交易和债券质押式回购交易单笔申报最大数量不超过10万手.

易策略的核心问题。

基于执行成本 (execution cost) 或交易成本视角的最优交易策略模型。Bertsimas 和 Lo^[1] 研究了在给定期限内买入大量证券的预期成本最小化问题, 提出所谓的最优执行 (optimal execution) 策略模型, 但他们的模型不考虑执行 (买入) 成本的风险 (波动性), 隐含着投资者是风险中性的假设。Almgren 和 Chriss^[2] 基于均值 - 方差准则, 在给定交易成本的方差条件下, 以最小化交易成本的期望值来构建最优变现 (optimal liquidation) 策略模型, 故 Almgren-Chriss 模型讨论的是证券的卖出问题。在此基础上, Almgren 和 Chriss 还以最小化二阶效用函数或风险值 (VaR) 来分析最优变现策略, 从而将 Bertsimas 和 Lo 的模型拓展到风险规避者。但上述两类模型得到的最优策略是静态的, 即模型不依赖于交易期间证券价格的预期变化。Gatheral 和 Schied^[3] 基于几何布朗运动描述证券价格的变化过程, 提出最优交易策略动态模型, 从而对 Almgren-Chriss 模型进行拓展。其次, 前人还以不同的方式刻画交易成本及其波动性。如 Ting 和 Warachka 等^[4] 以证券的卖出价格与其内在价值的偏差来刻画流动性折扣 (liquidity discount), 提出基于流动性折扣的最优变现策略模型。Caccioli 等^[5] 以期望损失 (expected shortfall, ES) 来衡量风险, 基于最小化期望损失构建最优变现策略模型。Almgren^[6] 研究了流动性和波动率都随机变化条件下的最优变现策略问题。Subramanian^[7] 构建一个局部均衡模型, 来讨论大额资产的投资者在有限或无限交易时间内的最优变现问题。此外, 不同于执行成本最小化的视角, Pemy 和 Zhang 等^[8] 以预期投资收益率最大化为目标构建最优变现策略模型。

基于订单簿 (order book) 视角的最优交易策略模型。Cheng 等^[9] 基于订单被执行的不确定性对 Almgren-Chriss 模型进行了扩展, 并在线性情形下获得最优策略的解析解。Obizhaeva 和 Wang^[10] 提出一个块状 (block-shaped) 限价订单簿 (limit order book) 模型研究了证券的跨期供求如何影响交易策略。研究表明: 在交易时间给定条件下, 市场弹性 (resilience) 是最优交易策略的关键因素。为放松 Obizhaeva-Wang 模型块状限价订单簿的假设, Al-

fonsi 和等^[11] 研究了限价订单簿具有非均匀价格分布的模型。Predoiu 和 Shaikhet 等^[12] 研究了具有任意形状的限价订单簿模型。Siu 等^[13] 基于 Obizhaeva-Wang 模型, 提出了由马尔科夫链刻画市场弹性的模型, 并给出解析解。以上的模型都是基于买入指令讨论了最优策略问题, 故缺乏对卖出策略的分析。Tsoukalas 和 Wang 等^[14] 进一步把 Obizhaeva-Wang 模型拓展至多资产的情形, 并指出不同资产之间的价格冲击对最优交易策略具有显著的影响。

国内学者也对最优交易策略开展了有价值的研究。仲黎明和刘海龙等^[15] 提出在给定风险条件下使期望利润最大化 (期望损失最小化) 的最优变现策略。林辉等^[16] 通过放松理想化市场的假设条件, 构建流动性调整的最优交易策略模型, 并给出解析解。唐衍伟和陈刚等^[17] 研究了单只股票与股指期货构建的套期保值组合不完全变现连续出清策略问题。邴涛等^[18] 基于指令驱动市场证券价格的形成过程, 研究了非知情交易者的最优交易策略。

相比以往的最优交易策略模型, 本文所提出的模型主要有以下不同之处: 1) 考虑了交易策略面临的外生制度性约束。以往的研究中交易速度完全由最优策略模型内生决定, 故交易速度可以充分大, 但这样的交易策略很可能因现实中的监管制度约束而无法实施, 因为交易速度或持仓水平需受到监管约束的。2) 本文构建的最优交易策略是买入与卖出证券的混合策略, 即在给定的投资期限内, 投资者在卖出证券后还可以买入证券, 或者在买入证券后还可以卖出。纵观以往的模型, 要么是纯粹的变现策略, 要么是纯粹的买入策略, 缺乏对混合策略的研究。因此, 本文在前人研究基础上的改进将使模型更贴近实际。

2 最优交易策略模型的构建

假设一个具有风险规避倾向 (risk aversion) 的投资者在初始时刻 ($t = 0$) 拥有数量为 $x(0) = x_0$ (下文简称“初始持仓”) 的证券, 需要在 $[0, T]$ 期间完成交易, 这里, $T > 0$ 为投资期的终点时刻, 设该时刻的目标持仓 $x(T) = x_T \geq 0$ 。投资者的交易策略是

由其可控变量——交易速度 $v(t)$ 或持仓 $x(t)$ 构成^③ 显然 t 时刻投资者的持仓量为

$$x(t) = x_0 - \int_0^t v(s) ds \quad (1)$$

由式(1)可知 $\dot{x}(t) = -v(t)$ 这里 $v(t) > 0$ 和 $v(t) < 0$ 分别表示卖出和买入证券, $v(t) = 0$ 则意味着不交易, 即持仓保持不变。

为了防止市场操纵, 证券市场一般都有最大申报数量之限制. 一方面, 它使投资者的交易速度受到约束, 不妨设 $-v_0 \leq v(t) \leq v_0$, 其中 $v_0 > 0$. 另一方面, 由于投资者的交易速度受到约束而不能操纵市场, 其交易行为不能破坏证券市场的有效性, 故可以假设投资者在一个弱式有效市场中进行交易. 为简化表达证券市场的弱有效性, 不妨以几何布朗运动来表示证券价格变化的随机过程, 从而证券回报率可表示为

$$r(t) = a \cdot t + \xi(t) \quad (2)$$

其中 $a \neq 0$ 为漂移率, 它表示投资者对证券未来走势的预期. 若 $a > 0$ 则表示投资者预期证券价格将上涨; 反之, 若 $a < 0$ 则表示投资者预期证券价格将下跌. $\xi(t)$ 是一个维纳过程, 当 $t_2 > t_1$ 时, 有 $\xi(t_2) - \xi(t_1) \sim N(0, \sigma^2(t_2 - t_1))$, 这里 σ 为波动率, 表示单位时间内的风险.

对于任意 $t \in [0, T]$, 投资者可根据市场情况选择交易速度 $v(t)$, 由此形成交易策略或交易轨迹 $(v(t), t \in [0, T])$. 显然交易策略的选择直接影响投资回报率. 若投资者选择某个交易策略, 则由式(1)和式(2)可知, 在整个投资期 $[0, T]$ 可获得的总回报率 Π 为

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi(v(t)) \\ &= \int_0^T r(t) v(t) dt \\ &= \int_0^T atv(t) dt + \int_0^T \xi(t) v(t) dt \end{aligned} \quad (3)$$

这里的 $v(t) dt$ 构成瞬间交易额.

假设投资者以“给定风险的条件下, 最大化总回报率期望值”准则来选择交易策略, 不妨以均值-方差效用函数 $U(\Pi)$ 来表示投资者获得

的投资效用^④, 这里

$$U(\Pi) = E(\Pi) - \frac{1}{2}\rho D(\Pi) \quad (4)$$

其中 $\rho = -\frac{U'(\Pi)}{U''(\Pi)} > 0$ 为投资者风险规避系数, 投资者风险规避倾向越强, 则其 ρ 值越大. 由式(3)可知, 总回报率 Π 的期望值和方差分别为

$$E(\Pi) = E\left(\int_0^T atv(t) dt\right) = a \int_0^T x(t) dt \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D(\Pi) &= E\left(\int_0^T \xi(t) v(t) dt\right)^2 \\ &= \int_0^T \int_0^T \sigma^2 \min(s, t) v(t) v(s) dt ds \\ &= \sigma^2 \int_0^T x^2(t) dt \end{aligned} \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入式(4), 且将交易速度 $v(t)$ 、初始持仓 $x(0)$ 和期末持仓 $x(T)$ 等列为约束条件, 则交易速度受制约、市场弱有效条件下的最优交易策略问题可表示为

$$\begin{aligned} \max_{v(t)} U(\Pi) &= a \int_0^T x(t) dt - \frac{\rho}{2} \sigma^2 \int_0^T x^2(t) dt \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ -v_0 \leq v(t) \leq v_0 \\ \dot{x}(t) = -v(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

3 最优交易策略所有可能的解

本节采用极大值原理(maximum principle)来讨论最优交易策略问题. 根据极大值原理, 由式(7)可定义哈密尔顿(Hamilton)方程

$$\begin{aligned} H(t, x, v, \lambda) &= ax(t) - \frac{\rho}{2} \sigma^2 x^2(t) + \\ &\quad \lambda(t) (-v(t)) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\lambda(t)$ 为共积变量(辅助变量). 根据极大值原理, $\max_{v(t)} U(\Pi)$ 的充分条件为交易策略的最优解 $v^*(t)$ 必须满足

③ 交易速度与持仓水平可以相互转化, 故本文以交易速度或持仓水平来表示交易策略.

④ 如果不采用均值-方差效用函数, 结果依然成立. 例如, 采用绝对风险规避效用函数时, 投资者效用仍可以用式(4)来表示, 证明参见附录.

$$\max_{x(t)} H(x^*(t), v(t), \lambda(t)) = \tag{9}$$

$$H(x^*(t), v^*(t), \lambda(t))$$

且其约束条件为

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = \rho\sigma^2 x(t) - a \tag{10}$$

$$\dot{x}(t) = -v(t) \tag{11}$$

其他约束条件还有: $-v_0 \leq v(t) \leq v_0, x(0) = x_0$ 和 $x(T) = x_T$.

由式(8)给出的哈密尔顿函数形式可知,交易速度 $v(t)$ 的变化与共积变量 $\lambda(t) = 0$ 的时点有关,故下文将通过分析 $\lambda(t) = 0$ 的规律,来推导最优交易策略.为此,不妨设集合 $B = \{t | \lambda(t) = 0, t \in [0, T]\}$,并分3种情形探讨集合 B 与最优交易策略的关系,这些情形分别是:(1)集合 B 为空集;(2)集合 B 为单点集(只有1个元素);(3)集合 B 为非单点集、非空集(有2个或2个以上的元素).显然上述情形构成集合 B 的所有结果,所以,分别在上述3种情形下推导模型,就能得到最优交易策略所有可能的解析解.

3.1 集合 B 为空集下的交易策略

若 B 为空集,则表示在 $[0, T]$ 区间上都有 $\lambda(t) > 0$ 或 $\lambda(t) < 0$,故最优交易策略可分为两种情形加以讨论:

(1) 若 $\lambda(t) > 0, \forall t \in [0, T]$,则最优交易速度 $v^*(t) = -v_0 < 0$,从而最优持仓为

$$x^*(t) = x_0 + v_0 t, t \in [0, T] \tag{12}$$

且由式(12)可知初始持仓 x_0 满足 $x_0 = x_T - v_0 T$.

(2) 若 $\lambda(t) < 0, \forall t \in [0, T]$,则最优交易速度 $v^*(t) = v_0 > 0$,则最优持仓为

$$x^*(t) = x_0 - v_0 t, t \in [0, T] \tag{13}$$

且由式(13)可知初始持仓满足 $x_0 = x_T + v_0 T$.

3.2 集合 B 为单点集下的交易策略

若 B 为单点集,不妨设 $[0, T]$ 区间上存在唯一的 t_0 使得 $\lambda(t_0) = 0$,且 $t_0 \neq 0, t_0 \neq T$,则根据 $\lambda(0)$ 和 $\lambda(T)$ 的取值可分为4种情形进行讨论:

(1) 若 $\lambda(0) > 0$ 且 $\lambda(T) > 0$,则当 $t = t_0$ 时存在 $\lambda(t_0) = 0$,此时最优交易速度 $v^*(t) = -v_0$,从而最优持仓为 $x^*(t) = x_0 + v_0 t$,这与3.1节(1)中的策略相同,不再赘述.

(2) 若 $\lambda(0) < 0$ 且 $\lambda(T) < 0$,则当 $t = t_0$ 时存在 $\lambda(t_0) = 0$,此时最优交易速度 $v^*(t) = v_0$,从而最优持仓为 $x^*(t) = x_0 - v_0 t$,这与3.1节(2)中的策略相同,不再赘述.

(3) 若 $\lambda(0) > 0$ 且 $\lambda(T) < 0$,则当 $t = t_0$ 时存在 $\lambda(t_0) = 0$,此时最优交易速度可分为两种情形:(a) $v^*(t) = -v_0, t \in [0, t_0]$; (b) $v^*(t) = v_0, t \in [t_0, T]$.这意味着投资者先以 $-v_0$ 的速度增加持仓,到 t_0 时刻再以 v_0 的速度减少持仓,故此种情形下的最优持仓为

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t & t \in [0, t_0) \\ x_0 + v_0(2t_0 - t) & t \in [t_0, T] \end{cases} \tag{14}$$

将 $x(T) = x_T$ 代入式(14)即可得到

$$t_0 = \frac{x_T - x_0}{2v_0} + \frac{T}{2} \tag{15}$$

由于 $0 < t_0 < T$,故由式(15)可推断初始持仓 x_0 满足 $x_T - v_0 T < x_0 < x_T + v_0 T$.

由以上的分析可知,对于 $\forall t \in [0, t_0)$ 有 $v^*(t) = -v_0$,且 $\forall t \in [t_0, T]$ 有 $v(t) = v_0$,故 $\lambda(t)$ 是 $[0, T]$ 上的分段函数,且在 t_0 处分段.首先在 $[0, t_0)$ 区间上,因为 $\lambda(0) > 0 = \lambda(t_0)$,且 B 为单点集,所以, $\lambda(t) > \lambda(t_0)$ 对于任意的 $t \in [0, t_0)$ 成立;又因为 $\lambda(t)$ 在 $[0, t_0)$ 上为连续凹函数,所以 $\forall t \in [0, t_0)$, $\lambda(t)$ 单调递减.其次,在 $[t_0, T]$ 区间上,因为 $\lambda(T) < 0 = \lambda(t_0)$, B 为单点集且 $\lambda(t)$ 在 $[t_0, T]$ 上为连续凸函数,故同理可证 $\lambda(t)$ 在 $[t_0, T]$ 上单调递减.综上所述,若 $\lambda(0) > 0$ 且 $\lambda(T) < 0$,则对于 $\forall t \in [0, T]$ 都有 $\dot{\lambda}(t) < 0$,故由式(10)便知 $x(t) < \frac{a}{\rho\sigma^2}$.由于 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 处取得最大值,则由式(14)和式(15)即可推断初始持仓 $x_0 \leq \frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T$ 时上述情形成立.

(4) 若 $\lambda(0) < 0$ 且 $\lambda(T) > 0$,则当 $t = t_0$ 时存在 $\lambda(t_0) = 0$,此时最优交易速度可分为两种情形:(a) $v(t) = v_0, t \in [0, t_0)$; (b) $v(t) = -v_0, t \in [t_0, T]$.这意味着投资者先以 v_0 的速度减少持仓,到 t_0 时刻再以 $-v_0$ 的速度增加持仓,从而该情形下的最优持仓为

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 - v_0 t, & t \in [0, t_0) \\ x_0 + v_0(t - 2t_0), & t \in [t_0, T] \end{cases} \quad (16)$$

将 $x(T) = x_T$ 代入式(16)即可得到

$$t_0 = \frac{T}{2} + \frac{x_0 - x_T}{2v_0} \quad (17)$$

由于 $0 < t_0 < T$, 所以, 初始持仓 x_0 满足 $x_T - v_0 T < x_0 < x_T + v_0 T$, 且由于 $\lambda(0) < 0, \lambda(T) > 0$, 类似于 3.2 节(3)中分析可知, 对于 $\forall t \in [0, T]$, 都有 $\dot{\lambda}(t) > 0$, 则由式(10)可知 $x(t) > \frac{a}{\rho\sigma^2}$, 又

因为 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 时取得最小值, 故只有当初始持仓 $x_0 \geq \frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T$ 时上述情形成立。

3.3 集合 B 为非单点集、非空集下的交易策略

在给定的投资期 $[0, T]$ 内, 若集合 B 存在任意的 2 个不同元素 t_i 和 t_j 使得 $\lambda(t_i) = \lambda(t_j) = 0$, 不妨设 $t_i < t_j$, 可以证明 $\lambda(t)$ 在 $[t_i, t_j]$ 区间上恒等于零。

证明 令 $t_l = \max\{t \in [t_i, t_j] : \lambda(t) = 0\}$ 和 $t_m = \min\{t \in [t_i, t_j] : \lambda(t) = 0\}$, 即 t_l 和 t_m 分别是 $[t_i, t_j]$ 区间上使得 $\lambda(t) = 0$ 的最大时点(最右边)和最小时点(最左边)。明显地, 当 $t_l > t_m$, 对于任意的 $t \in [t_i, t_j]$, 都有 $\lambda(t) = 0$, 则上述结论自然成立。

下面采用反证法证明: 当 $t_l > t_m$ 时, 对于任意的 $t_k \in [t_m, t_l]$ 都有 $\lambda(t_k) = 0$ 。

(i) 假设 $\lambda(t_k) > 0$, 则由 $\lambda(t)$ 的连续性可知: 存在 $\varepsilon_i > 0, i = 1, 2$, 对于任意的 $t \in N(t_k, \varepsilon_i) = (t_k - \varepsilon_1, t_k + \varepsilon_2)$, 使得 $\lambda(t) > 0$ 且 $\lambda(t_k - \varepsilon_1) = \lambda(t_k + \varepsilon_2) = 0$ 。由哈密尔顿方程式(8)可知, 若要得到最优的 H , 必有 $v(t) < 0$, 即在 $N(t_k, \varepsilon_i)$ 区间上 $v(t) < 0$, 从而有 $\ddot{\lambda}(t) > 0$, 这意味着 $\lambda(t)$ 在 $N(t_k, \varepsilon_i)$ 区间上为凹函数。根据凹函数的性质, 且由于 $\lambda(t_k - \varepsilon_1) = \lambda(t_k + \varepsilon_2) = 0$, 必然有 $\lambda(t) < 0, t \in N(t_k, \varepsilon_i), i = 1, 2$, 这与该区间上 $\lambda(t) > 0$ 是矛盾的。

(ii) 假设 $\lambda(t_k) < 0$, 由 $\lambda(t)$ 的连续性同理可知, $\lambda(t)$ 在区间 $N(t_k, \varepsilon_i)$ 上为凸函数, 且由 $\lambda(t_k - \varepsilon_1) = \lambda(t_k + \varepsilon_2) = 0$ 推断 $\lambda(t) > 0, t \in N(t_k, \varepsilon_i), i = 1, 2$, 但这与该区间上 $\lambda(t) < 0$ 是

矛盾的。

由(i)和(ii)的证明可知, 对于任意的 $t_k \in [t_m, t_l]$ 都有 $\lambda(t_k) = 0$, 且由 t_l 和 t_m 的定义可知, 显然有 $t_m \leq t_i < t_j \leq t_l$, 由此即证: 若 $\lambda(t_i) = \lambda(t_j) = 0$, 则 $\lambda(t)$ 在 $[t_i, t_j]$ 区间上恒等于零。这意味着: 若集合 B 有两个或两个以上的元素, 则该集合由一个区间构成。为方便下文的讨论, 不妨设这个区间的上界和下界分别为 t_2 和 t_1 , 下面根据 $\lambda(t)$ 在 0 时刻和 T 时刻的状态分 4 种情形进行讨论:

(1) 若 $\lambda(0) < 0, \lambda(T) < 0$, 由于集合 B 由一个区间构成, 且 t_2, t_1 分别为 B 的上界和下界, 则由 $\lambda(T) < 0$ 且 $t_2 \in [0, T]$ 可知 $t_2 < T$ 。若 $t_1 \neq 0$, 则当 $t \in (0, t_1) \cup (t_2, T)$ 时, $\lambda(t) < 0$ 。由于 $t \in [t_1, t_2]$ 时, $\lambda(t) = 0$, 故其一阶导数 $\dot{\lambda}(t) = \rho\sigma^2 x(t) - a = 0$, 由此便可推断, 在 $[t_1, t_2]$ 区间上 $x(t) = \frac{a}{\rho\sigma^2}$, 即在该区间上持仓保持不变, 则最优交易速度 $v^*(t) = 0$ 。综上所述, 该情形下的最优交易速度为

$$v^*(t) = \begin{cases} v_0, & t \in [0, t_1) \\ 0, & t \in [t_1, t_2) \\ v_0, & t \in [t_2, T] \end{cases} \quad (18)$$

由式(18)可以得到最优持仓为

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 - v_0 t, & t \in [0, t_1) \\ x_0 - v_0 t_1, & t \in [t_1, t_2) \\ x_0 - v_0 t_1 - v_0(t - t_2), & t \in [t_2, T] \end{cases} \quad (19)$$

由式(19)及边界条件 $x(0) = x_0, x(T) = x_T$, 且由 $x^*(t_1) = \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 容易得到初始持仓 $x_0 \geq \frac{a}{\rho\sigma^2}$, 并且成立

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{v_0} \left(x_0 - \frac{a}{\rho\sigma^2} \right) \\ t_2 = T - \frac{a}{\rho\sigma^2 v_0} + \frac{x_T}{v_0} \end{cases} \quad (20)$$

由于 $0 < t_1 < t_2 < T$, 由式(19)即可推断初始持仓 x_0 满足 $\frac{a}{\rho\sigma^2} \leq x_0 < v_0 T + x_T$ 。

(2) 若 $\lambda(0) > 0, \lambda(T) > 0$, 类似于 3.3 节

(1) 中的分析思路,容易求得此种情形下最优交易速度为

$$v^*(t) = \begin{cases} -v_0, & t \in [0, t_1] \\ 0, & t \in [t_1, t_2] \\ -v_0, & t \in (t_2, T] \end{cases} \quad (21)$$

从而,最优持仓为

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t, & t \in [0, t_1] \\ x_0 + v_0 t_1, & t \in [t_1, t_2] \\ x_0 + v_0 t_1 + v_0(t - t_2), & t \in (t_2, T] \end{cases} \quad (22)$$

由式(22)及边界条件 $x(0) = x_0, x(T) = x_T$,且由 $x^*(t_1) = \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 得到初始持仓 $x_0 \leq \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 并且成立

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{v_0}(\frac{a}{\rho\sigma^2} - x_0) \\ t_2 = T + \frac{a}{\rho\sigma^2 v_0} - \frac{x_T}{v_0} \end{cases} \quad (23)$$

且由于 $0 < t_1 < t_2 < T$,由式(23)便知初始持仓 x_0 满足 $x_T - v_0 T < x_0 \leq \frac{a}{\rho\sigma^2}$.

(3) 若 $\lambda(0) > 0, \lambda(T) < 0$ 类似于 3.3 节(1) 中的分析思路,同理可得最优交易速度为

$$v^*(t) = \begin{cases} -v_0, & t \in [0, t_1] \\ 0, & t \in [t_1, t_2] \\ v_0, & t \in (t_2, T] \end{cases} \quad (24)$$

且最优持仓为

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t, & t \in [0, t_1] \\ \frac{a}{\rho\sigma^2}, & t \in [t_1, t_2] \\ \frac{a}{\rho\sigma^2} - v_0(t - t_2), & t \in (t_2, T] \end{cases} \quad (25)$$

且由式(25)及边界条件 $x(0) = x_0, x(T) = x_T$ 容易得到初始持仓 $x_0 \leq \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 并且成立

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{v_0}(\frac{a}{\rho\sigma^2} - x_0) \\ t_2 = T - \frac{a}{\rho\sigma^2 v_0} + \frac{x_T}{v_0} \end{cases} \quad (26)$$

由于 $0 < t_1 < t_2 < T$,故由式(25)便知初始持仓

x_0 满足 $\frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T < x_0 < \frac{a}{\rho\sigma^2}$.

(4) 若 $\lambda(0) < 0, \lambda(T) > 0$ 时 类似于 3.3 节(1) 中的分析思路,同理可得最优交易速度为

$$v^*(t) = \begin{cases} v_0, & t \in [0, t_1] \\ 0, & t \in [t_1, t_2] \\ -v_0, & t \in (t_2, T] \end{cases} \quad (27)$$

且最优持仓为

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 - v_0 t, & t \in [0, t_1] \\ \frac{a}{\rho\sigma^2}, & t \in [t_1, t_2] \\ \frac{a}{\rho\sigma^2} + v_0(t - t_2), & t \in (t_2, T] \end{cases} \quad (28)$$

由式(28)及边界条件 $x(0) = x_0, x(T) = x_T$ 容易得到 $x_0 > \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 并且成立

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{v_0}(x_0 - \frac{a}{\rho\sigma^2}) \\ t_2 = T + \frac{a}{\rho\sigma^2 v_0} - \frac{x_T}{v_0} \end{cases} \quad (29)$$

由于 $0 < t_1 < t_2 < T$,容易推断初始持仓 x_0 满足 $\frac{a}{\rho\sigma^2} < x_0 < \frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T$.

4 不同市场行情、各种初始持仓条件下的最优交易策略

第 3 节基于共积变量 $\lambda(t)$ 推导出最优交易策略所有可能的解析解,本节将根据该结果,进一步探讨投资者基于市场行情的预期及其初始持仓,从第 3 节给出的全部结果中挑选其最优交易策略.

4.1 市场行情看涨时的最优交易策略

当 $a > 0$,即投资者预期市场行情上涨,对照第 3 节的分析结果,可得到各种初始持仓下的最优交易策略:

(1) 若初始持仓 $x_0 > v_0 T + x_T$,由于交易速度受到约束,投资者即便以最大交易速度 v_0 卖出证券,但在 T 时刻仍有超过 x_T 持仓量.这说明,投资

者因其持有多头仓位太多,即便以最大的交易速度卖出平仓,也无法在投资期限内将仓位减持到目标值 x_T ,故该情形下最优交易策略无解^⑤。

(2) 若初始持仓 $x_0 = v_0 T + x_T$,即对应于 3.1 节(2)中的情形,故最优持仓由式(13)给出,其轨迹如图 1 所示。图中的 O 点的坐标为 $(0, x_T)$,从图 2 到图 10 的坐标系同此,不再赘述。

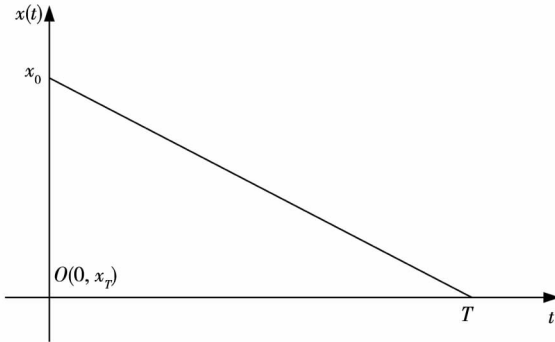


图 1 当 $a > 0, x_0 = v_0 T + x_T$ 时最优持仓轨迹

Fig. 1 Optimal position trajectory when $a > 0, x_0 = v_0 T + x_T$

(3) 若初始持仓 $x_0 \in [\frac{a}{\rho\sigma^2} \rho_0 T + x_T]$,则为 3.3 节(1)中的情形,且可由式(18)和式(19)给出最优交易策略,其最优持仓轨迹如图 2 所示。

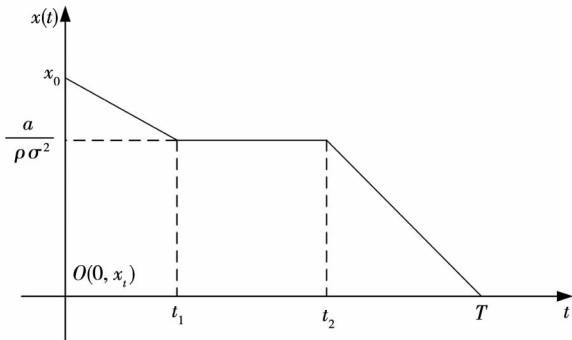


图 2 当 $a > 0, x_0 \in [\frac{a}{\rho\sigma^2} \rho_0 T + x_T]$ 时最优持仓轨迹

Fig. 2 Optimal position trajectory when $a > 0, x_0 \in [\frac{a}{\rho\sigma^2} \rho_0 T + x_T]$

(4) 若初始持仓 $x_0 \in (\frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T, \frac{a}{\rho\sigma^2})$,这对应于 3.3 节(3)中的情形,最优交易策略由式(24)和式(25)给出,其最优持仓轨迹如图 3 所示。

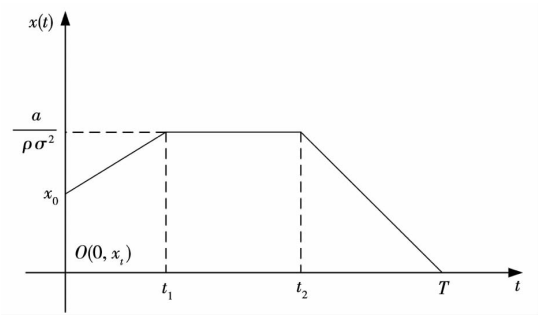


图 3 当 $a > 0, x_0 \in (\frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T, \frac{a}{\rho\sigma^2})$ 时最优持仓轨迹

Fig. 3 Optimal position trajectory when $a > 0, x_0 \in (\frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T, \frac{a}{\rho\sigma^2})$

(5) 当初始持仓 $x_0 \in (x_T - v_0 T, \frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T]$ 时,3.2 节(3)中讨论了该情形,最优持仓由式(14)给出,其轨迹如图 4 所示。

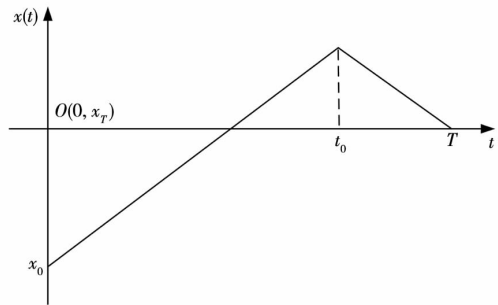


图 4 当 $a > 0, x_0 \in (x_T - v_0 T, \frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T]$ 时最优持仓轨迹

Fig. 4 Optimal position trajectory when $a > 0, x_0 \in (x_T - v_0 T, \frac{2a}{\rho\sigma^2} - v_0 T - x_T]$

(6) 当初始持仓 $x_0 = x_T - v_0 T$ 时,这对应于 3.1 节(1)中的情形,最优持仓由式(12)给出,其轨迹如图 5 所示。

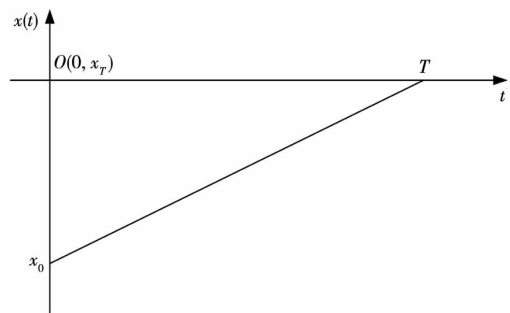


图 5 当 $a > 0, x_0 = x_T - v_0 T$ 时最优持仓轨迹

Fig. 5 Optimal position trajectory when $a > 0, x_0 = x_T - v_0 T$

⑤ 为了讨论的完备性,无解情形可视为最优交易策略的例外情形。

(7) 当初始持仓 $x_0 < x_T - v_0 T$ 时, 投资者即便以最大交易速度 v_0 增持证券, 但在 T 时刻持仓仍小于目标仓位 x_T . 这是由于投资者在期初持有空头仓位过大, 即便以最大的交易速度买入证券, 也无法在投资期限内将仓位增加到目标值 x_T , 故该情形下最优交易策略无解.

4.2 市场行情看跌时的最优交易策略

当 $a < 0$, 即投资者预期市场行情下跌, 类似于 4.1 节中的分析思路, 可以归纳出各种初始持仓情形下的最优交易策略.

(1) 若初始持仓 $x_0 > v_0 T + x_T$, 由于市场行情是看跌的 ($a < 0$), 故投资者需要以最大交易速度 v_0 卖出证券, 但由于初始持仓过大, 导致其在终点时刻的持仓仍大于目标仓位 x_T , 显然该情形下最优交易策略无解.

(2) 若初始持仓 $x_0 = v_0 T + x_T$ 时, 最优持仓由式(13)给出, 其轨迹如图6所示. 不难发现, 图6与图1是相同的, 但图6所对应的市场行情却是看跌的 ($a < 0$). 这说明: 在投资期限 $[0, T]$ 内, 无论市场行情如何, 若投资者需要出清的仓位达到市场所能允许的上限 $v_0 T$, 就只能以最大的交易速度 v_0 向市场出清.

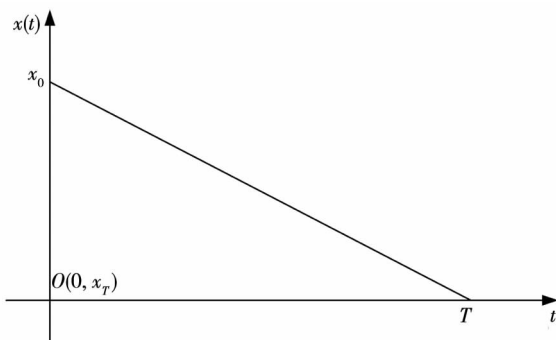


图6 $a < 0, x_0 = v_0 T + x_T$ 时最优持仓轨迹

Fig. 6 Optimal position trajectory when $a < 0, x_0 = v_0 T + x_T$

(3) 当初始持仓 $x_0 \in [\frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T, v_0 T + x_T)$ 时, 最优持仓轨迹由式(16)给出, 如图7所示.

(4) 当初始持仓 $x_0 \in (\frac{a}{\rho\sigma^2}, \frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T)$

时, 最优持仓轨迹由式(28)给出, 如图8所示.

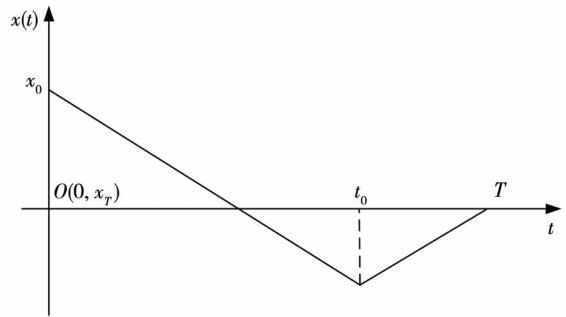


图7 当 $a < 0, x_0 \in [\frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T, v_0 T)$ 时最优持仓轨迹

Fig. 7 Optimal position trajectory when $a < 0, x_0 \in [\frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T, v_0 T)$

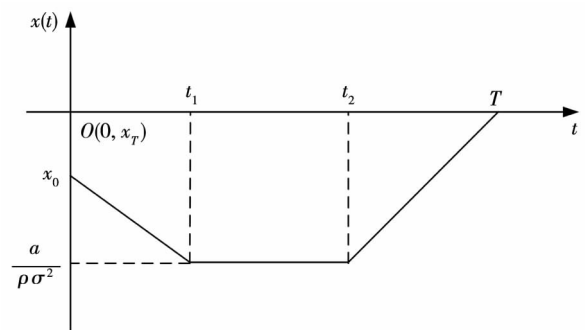


图8 当 $a < 0, x_0 \in (\frac{a}{\rho\sigma^2}, \frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T)$ 时最优持仓轨迹

Fig. 8 Optimal position trajectory when $a < 0, x_0 \in (\frac{a}{\rho\sigma^2}, \frac{2a}{\rho\sigma^2} + v_0 T - x_T)$

(5) 当初始持仓 $x_0 \in (x_T - v_0 T, \frac{a}{\rho\sigma^2}]$ 时, 最优持仓轨迹由式(22)给出, 如图9所示.

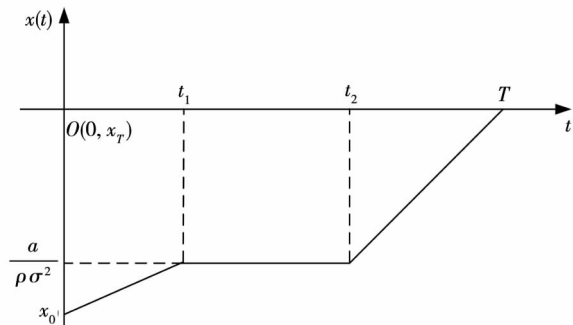


图9 当 $a < 0, x_0 \in (x_T - v_0 T, \frac{a}{\rho\sigma^2}]$ 时最优持仓轨迹

Fig. 9 Optimal position trajectory when $a < 0, x_0 \in (x_T - v_0 T, \frac{a}{\rho\sigma^2}]$

(6) 当初始持仓 $x_0 = x_T - v_0 T$ 时, 最优持仓由式(12)给出, 其轨迹如图10所示.

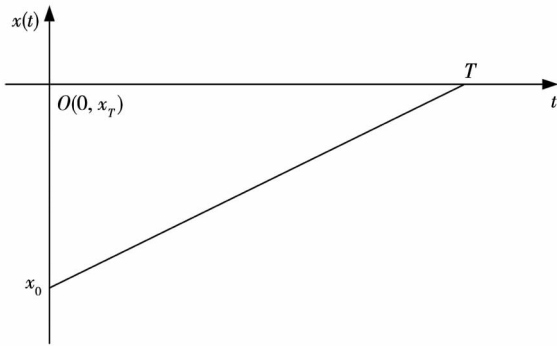


图 10 当 $a < 0$ $x_0 = x_T - v_0 T$ 时最优持仓轨迹

Fig. 10 Optimal position trajectory when $a < 0$ $x_0 = x_T - v_0 T$

(7) 当初始持仓 $x_0 < x_T - v_0 T$ 时, 由于交易速度受到制约, 投资者即便以最大速度 v_0 买入证券, 但由于期初的空头持仓过大, 导致其在终点时刻 T 仍未能达到目标持仓量 x_T , 故该情形下最优交易策略无解。

4.3 机会容量与市场容量

虽然上文给出的最优交易策略具有多种情形, 但依然可以发现其共同规律。(1) 若市场行情看涨 ($a > 0$) 且初始持仓 $x_0 > \frac{a}{\rho\sigma^2}$, 则需将持仓先减持到 $\frac{a}{\rho\sigma^2}$, 而后将该持仓保留到投资期的最后阶段出清; 若初始持仓 $x_0 < \frac{a}{\rho\sigma^2}$, 则需将持仓增加到 $\frac{a}{\rho\sigma^2}$, 然后在投资期的最后阶段出清。(2) 若市场行情看跌, 即 $a < 0$ 时, 最优交易策略同样需保留 $\frac{a}{\rho\sigma^2}$ 数量的证券 (由于 $a < 0$, 该头寸为空头头寸) 在投资期的最后阶段出清。这意味着: 无论市场行情看涨或看跌, 保留 $\frac{a}{\rho\sigma^2}$ 数量的证券在投资期的最后阶段交易是最优交易策略的基本特征, 故不妨称 $\frac{a}{\rho\sigma^2}$ 为机会容量 (opportunity capacity), 因为它是投资者把握投资机会的持仓数量。

此外, 由于投资者的交易速度受制约, 从而在 $[0, T]$ 区间市场允许单个投资者可交易的证券数量的绝对值为 $v_0 T$, 不妨称之为市场容量 (market capacity)。由 4.1 节和 4.2 节的分析可知, 若机会容量大于市场容量, 则投资者无法交易其全部头

寸, 即上文所述的无解情形, 不妨排除这些情形。故下文把行情看涨时 $v_0 T \geq \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 以及行情看跌时 $\frac{a}{\rho\sigma^2} \geq -v_0 T$ 作为讨论的出发点, 由此进一步分析最大化投资效用的初始持仓, 即最优初始持仓。

5 最大化投资效用的初始持仓

5.1 行情看涨时的最优初始持仓与最大化投资效用

当 $a > 0$ 、 $x_0 \in \left[\frac{a}{\rho\sigma^2}, \nu_0 T + x_T \right]$ 时, 可将式

(19) 和式 (20) 代入式 (7) 式得到

$$U = a \int_0^{t_1} (x_0 - v_0 t) dt - \frac{\rho}{2} \sigma^2 \int_0^{t_1} (x_0 - v_0 t)^2 dt +$$

$$a(x_0 - v_0 t_1)(t_2 - t_1) - \frac{\rho}{2} \sigma^2 (x_0 - v_0 t_1)^2 (t_2 - t_1) +$$

$$a \int_{t_2}^T (x_0 - v_0 t_1 - v_0(t - t_2)) dt -$$

$$\frac{\rho}{2} \sigma^2 \int_{t_2}^T (x_0 - v_0 t_1 - v_0(t - t_2))^2 dt$$

$$= -\frac{a^2 x_0}{2\rho\sigma^2 \nu_0} + \frac{ax_0^2}{2\nu_0} - \frac{\rho\sigma^2 x_0^3}{6\nu_0} +$$

$$\frac{3a^2 x_T - 3a\rho\sigma^2 x_T^2 + \rho^2 \sigma^4 x_T^3 + 3a^2 T \nu_0}{6\rho\sigma^2 \nu_0}$$

为求 U 在 $x_0 \in \left[\frac{a}{\rho\sigma^2}, \nu_0 T + x_T \right]$ 的最大值, 可计

算 $\frac{dU}{dx_0}$ 这里

$$\frac{dU}{dx_0} = \frac{1}{\nu_0} \left[ax_0 - \frac{\rho\sigma^2}{2} x_0^2 - \frac{a^2}{2\rho\sigma^2} \right] \tag{30}$$

$$= -\frac{\rho\sigma^2}{2\nu_0} \left[x_0 - \frac{a}{\rho\sigma^2} \right]^2 \leq 0$$

且由于 $x_0 \in \left[\frac{a}{\rho\sigma^2}, \nu_0 T + x_T \right]$ 时, 有 $\frac{d^2 U}{dx_0^2} \leq 0$, 则

由式 (30) 可知: 当 $x_0 = \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 时投资者取得最大化的

投资效用 U^* , 这里

$$U^* = U \Big|_{x_0 = \frac{a}{\rho\sigma^2}} = -\frac{a^3}{6\rho^2 \sigma^4 \nu_0} + \frac{a^2 x_T - a\rho\sigma^2 x_T^2}{2\rho\sigma^2 \nu_0} + \frac{\rho^2 \sigma^4 x_T^3 + 3a^2 T \nu_0}{6\rho\sigma^2 \nu_0} \tag{31}$$

以上考察的是行情看涨时投资者的持仓超过机会容量时的效用. 反过来, 若投资者的初始持仓小于机会容量, 即 $x_0 \leq \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 时, 同理可证, 只有当 $x_0 = \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 时, 投资者才能获得最大化的投资效用. 为直观地验证上述结论, 图 11 给出了行情看涨时、不同初始持仓下的投资效用的数值模拟结果.

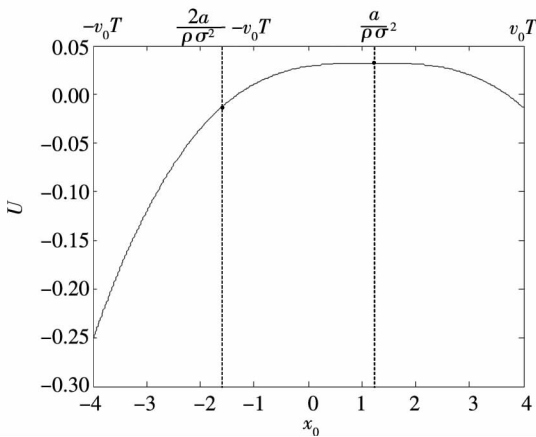


图 11 行情看涨时不同初始持仓下的投资效用

Fig. 11 Investment utility under different initial positions when the market is bullish

图 11 中数值模拟的参数设置是: 目标仓位为 $x_T = 0$, 漂移率 a 为 0.15, 风险规避系数 ρ 等于 0.5, 投资期限 T 为 0.4 年 (100 个交易日), 波动率 σ 为 0.5, 交易速度上限 v_0 为 10, 以上的参数设置借鉴了参考文献 [16]. 由图 11 可知, 若投资者的初始持仓 $x_0 < \frac{a}{\rho\sigma^2}$, 则初始持仓越小效用越

低; 若初始持仓 $x_0 > \frac{a}{\rho\sigma^2}$, 则初始持仓越大效用越低, 由此即知, 最大化效用在机会容量处取得.

5.2 行情看跌时的最优初始持仓与最大化投资效用

类似于 5.1 节, 同理可分析行情看跌时 ($a < 0$) 最优初始持仓. 由于 $x_0 \in [x_T - v_0 T, \frac{a}{\rho\sigma^2}]$, 故将式 (22) 和式 (23) 代入式 (7) 式得到

$$U = a \int_0^{t_1} (x_0 + v_0 t) dt - \frac{\rho}{2} \sigma^2 \int_0^{t_1} (x_0 + v_0 t)^2 dt + a(x_0 + v_0 t_1)(t_2 - t_1) - \frac{\rho}{2} \sigma^2 (x_0 + v_0 t_1) 2(t_2 - t_1) +$$

$$a \int_{t_2}^T (x_0 + v_0 t_1 + v_0(t - t_2)) dt - \frac{\rho}{2} \sigma^2 \int_{t_2}^T (x_0 + v_0 t_1 + v_0(t - t_2))^2 dt = \frac{a^2 x_0}{2\rho\sigma^2 v_0} - \frac{ax_0^2}{2v_0} + \frac{\rho\sigma^2 x_0^3}{6v_0} - \frac{3a^2 x_T - 3a\rho\sigma^2 x_T^2 + \rho^2 \sigma^4 x_T^3 - 3a^2 T v_0}{6\rho\sigma^2 v_0}$$

其一阶导数为

$$\frac{dU}{dx_0} = \frac{1}{v_0} \left[\frac{\rho\sigma^2}{2} x_0^2 - ax_0 + \frac{a^2}{2\rho\sigma^2} \right] = \frac{\rho\sigma^2}{2v_0} \left[x_0 - \frac{a}{\rho\sigma^2} \right]^2 \geq 0 \tag{32}$$

且由于 $\frac{d^2U}{dx_0^2} \leq 0$, 则当 $x_0 = \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 时投资者获得最大化的投资效用 U^* , 这里

$$U^* = U \Big|_{x_0 = \frac{a}{\rho\sigma^2}} = \frac{a^3}{6\rho^2 \sigma^4 v_0} - \frac{a^2 x_T - a\rho\sigma^2 x_T^2}{2\rho\sigma^2 v_0} - \frac{\rho^2 \sigma^4 x_T^3 - 3a^2 T v_0}{6\rho\sigma^2 v_0} \tag{33}$$

以上考察的是行情看跌时投资者的持仓低于机会容量时的效用. 若投资者的初始持仓超过机会容量, 即 $x_0 \leq \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 时, 同理可证, 投资者仍在 $x_0 = \frac{a}{\rho\sigma^2}$ 处取得最大化的投资效用. 为直观地验证上述结论, 图 12 给出了行情看跌时不同初始持仓下效用的数值模拟结果.

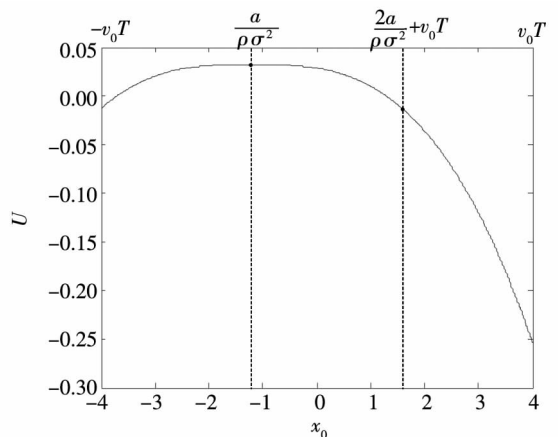


图 12 行情看跌时不同初始持仓下的投资效用

Fig. 12 Investment utility under different initial positions when the market is bearish

图 12 中的参数设置是: 目标仓位为 $x_r = 0$, 漂移率 a 为 -0.15 , 其他参数的设置同 5.1 节, 由图 12 可知, 当行情看跌时, 投资者的最大效用同样在机会容量处取得。

综合 5.1 节和 5.2 节的分析结果可知: 不论市场行情是看涨还是看跌, 若市场是有效的, 则最优初始持仓等于机会容量 $\frac{a}{\rho\sigma^2}$, 偏离机会容量将导致投资效用的下降。所以, 当投资者的初始持仓不等于机会容量时, 他首先应该将其持仓调整到机会容量, 然后再向市场交易该机会容量。

6 结束语

本文基于弱有效市场的假设, 并对交易速度施加制度性约束, 构建最大化投资效用的动态交易策略模型; 运用极大值原理推导出最优交易策

略所有可能的解析解, 并在此基础上给出: 不同市场情形、各种初始持仓条件下的最优交易策略。通过对上述策略的进一步分析可以发现:

(1) 在弱有效市场的条件下, 存在一个使投资效用最大化的初始持仓, 即机会容量。它由证券的预期回报率和波动率, 以及投资者的风险规避系数三个因素决定。无论投资者的初始持仓大于还是小于机会容量, 都会导致其投资效用的下降。只有当其持仓水平等于机会容量时, 才能获得最大化的投资效用。

(2) 不论市场行情如何(看涨还是看跌), 投资者需以最大交易速度在投资期的初始阶段以机会容量为目标调整持仓, 并尽可能使其持仓水平达到机会容量, 然后保留该持仓水平在投资期的最后阶段以最大交易速度出清头寸。这是弱有效市场、交易速度受制约条件下最优交易策略的共同特征。

参考文献:

- [1] Bertsimas D, Lo A W. Optimal control of execution costs [J]. *Journal of Financial Markets*, 1998, 1: 1 - 50.
- [2] Almgren R, Chriss N. Optimal execution of portfolio transactions [J]. *Journal of Risk*, 2000, 3(2): 5 - 39.
- [3] Gatheral J, Schied A. Optimal trade execution under geometric Brownian motion in the Almgren and Chriss framework [J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2011, 14(3): 353 - 368.
- [4] Ting C, Warachka M, Zhao Y. Optimal liquidation strategies and their implications [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2007, 31(4): 1431 - 1450.
- [5] Caccioli F, Still S, Marsili M, et al. Optimal liquidation strategies regularize portfolio selection [J]. *European Journal of Finance*, 2013, 19(6): 554 - 571.
- [6] Almgren R. Optimal trading with stochastic liquidity and volatility [J]. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2012, 3(1): 163 - 181.
- [7] Subramanian A. Optimal liquidation by a large investor [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2008, 68(4): 1168 - 1201.
- [8] Pemy M, Zhang Q, Yin G. Liquidation of a large block of stock [J]. *Journal of Banking and Finance*, 2007, 31(5): 1295 - 1305.
- [9] Cheng X, Giacinto D M, Wang T H. Optimal execution with uncertain order fills in Almgren-Chriss framework [J]. *Quantitative Finance*, 2017, 17(1): 55 - 69.
- [10] Obizhaeva A A, Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics [J]. *Journal of Financial Markets*, 2013, 16(1): 1 - 32.
- [11] Alfonsi A, Fruth A, Schied A. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions [J]. *Quantitative Finance*, 2010, 10(2): 143 - 157.
- [12] Predoiu S, Shaikhet G, Shreve S. Optimal execution in a general one-sided limit-order book [J]. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2011, 2(1): 183 - 212.
- [13] Siu C C, Guo I, Zhu S P, et al. Optimal execution with regime-switching market resilience [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2019, 101: 17 - 40.
- [14] Tsoukalas G, Wang J, Giesecke K. Dynamic portfolio execution [J]. *Management Science*, 2019, 65(5): 2015 - 2040.
- [15] 仲黎明, 刘海龙, 吴冲锋. 机构投资者的最优变现策略 [J]. *管理科学学报*, 2002, 5(5): 18 - 22.

Zhong Liming , Liu Hailong , Wu Chongfeng. Optimal liquidation strategy of institutional investors [J]. Journal of Management Sciences in China , 2002 , 5(5) : 18 - 22. (in Chinese)

[16] 林 辉 , 张涤新 , 杨 浩 , 等. 流动性调整的最优交易策略模型研究 [J]. 管理科学学报 , 2011 , 14(5) : 65 - 76.
Lin Hui , Zhang Dixin , Yang Hao , et al. Study on liquidity-adjusted optimal trading strategy model [J]. Journal of Management Sciences in China , 2011 , 14(5) : 65 - 76. (in Chinese)

[17] 唐衍伟 , 陈 刚 , 刘喜华. 股指期货套期保值不完全变现连续出清策略 [J]. 管理科学学报 , 2014 , 17(12) : 85 - 92.
Tang Yanwei , Chen Gang , Liu Xihua. Continuous optimal partial liquidation of the single stock ' s hedging under arithmetic Brownian movements [J]. Journal of Management Sciences in China , 2014 , 17(12) : 85 - 92. (in Chinese)

[18] 邴 涛 , 刘善存 , 张 强 , 等. 指令驱动市场中非知情交易者的最优交易策略 [J]. 管理科学学报 , 2017 , 20(3) : 24 - 45.
Bing Tao , Liu Shancun , Zhang Qiang , et al. The optimal trading strategy of uninformed traders in an order driven market [J]. Journal of Management Sciences in China , 2017 , 20(3) : 24 - 45. (in Chinese)

Optimal trading strategies with restricted securities buying and selling speeds

LIN Hui¹ , YANG Nian^{1*} , WU Guang-mou²

- 1. School of Economics , Nanjing University , Nanjing 210093 , China;
- 2. School of Economics and Management , Southeast University , Nanjing 211189 , China

Abstract: Previous studies of optimal trading strategies have neglected the exogenous institutional constraints of trading speeds. Under the weak-form efficient market hypothesis , this paper builds an investment utility maximization model for trading strategies in the presence of limits on trading speeds. Applying the maximum principle , the closed-form solutions of optimal trading strategies under different market conditions and various initial positions are derived. A further analysis of optimal trading strategies indicates that there exists an optimal initial position (i. e. opportunity capacity) which maximizes the investor ' s utility. Also the investor needs to trade at the maximum speed to adjust the position with the opportunity capacity as the target at the initial stage of the investment horizon , and to liquidate the position at the final stage.

Key words: optimal trading strategy; trading speed; weak-form efficient market; maximum principle

附录

若以阿罗 - 普拉特绝对风险规避 (Arrow-Pratt measure of absolute risk aversion) 系数 $\rho = - \frac{u''(\Pi)}{u'(\Pi)} > 0$ 来度量投资者的风险规避倾向 , 显然 ρ 是一个与总回报率 Π 无关的系数 , 不妨将投资者的 (序数) 效用函数 $u(\Pi)$ 定义为

$$u(\Pi) = - \exp(-\rho\Pi) \tag{A1}$$

这里 , $u(\Pi)$ 关于 Π 单调递增. 由维纳过程的性质知 , 总回报率 Π 服从均值为 $E(\Pi)$, 方差为 $D(\Pi)$ 的正态分布 , 故由 (A1) 可知 , 投资效用的预期值为

$$E[u(\Pi)] = E[-\exp(-\rho\Pi)] = \int -e^{-\rho\Pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D(\Pi)}} e^{-\frac{(\Pi-E(\Pi))^2}{2 \cdot D(\Pi)}} d\Pi \tag{A2}$$

$$= - \exp[-\rho(E(\Pi)) - \frac{1}{2}\rho D(\Pi)]$$

不妨令

$$U(\Pi) = E(\Pi) - \frac{1}{2}\rho D(\Pi) \tag{A3}$$

这里 , $U(\Pi)$ 和 $u(\Pi)$ 一样都是关于 Π 的序数效用函数 , 且由式 (A2) 和式 (A3) 可知 , 最大化 $U(\Pi)$ 等价于最大化 $E[u(\Pi)]$. 明显地 , 由式 (A3) 所定义的 $U(\Pi)$ 与正式式 (4) 给出 $U(\Pi)$ 是等价的.