

奈特不确定性下的欧式期权定价区间^①

何朝林, 王 鹏, 刘 梦

(安徽工程大学管理工程学院, 芜湖 241000)

摘要: 在 Black-Scholes 期权定价模型中引入等级参数测度金融市场上的奈特不确定性程度, 提出奈特不确定性下欧式期权定价的新模型. 设置可行控制集合定义等级参数为奈特不确定性测度, 借助可行域上的容度获得奈特不确定性对偶测度, 基于 Black-Scholes 期权定价模型构建欧式看涨看跌期权的定价区间; 运用倒向随机微分方程获得定价区间的表达式; 最后, 基于 2015 年 2 月 9 日上市的上证 50ETF 期权的日收益数据为样本予以实证, 并与 Black-Scholes 期权定价特征对比. 结果表明, 奈特不确定性环境下的欧式期权均衡价格不再是某一确定值, 而是某一定价区间; 期权标的资产当前价格越大, 定价区间越大; 期权到期时间越长, 定价区间越大; 定价区间随着奈特不确定性程度的增强而不断变大. 研究指出奈特不确定性的客观存在降低了市场流动性, 内生解释了“非市场参与”之谜, 外生说明了“有限市场参与”特征, 为投资者决策提出建议和金融市场监管提供经验证据.

关键词: Black-Scholes 期权定价模型; 欧式期权定价; 奈特不确定性; 等级参数; 定价区间
中图分类号: F830.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2020)03-0116-11

0 引言

不确定性是金融市场的基本特征之一. 传统金融学假设投资者是理性的, 研究不确定性环境下的资产定价问题, 开创了资本资产定价模型、三因子模型和 Black-Scholes 期权定价模型. 这里的不确定性是指未来事件具有明确概率的不确定性, 即传统意义上的风险, 资产存在某一确定的均衡价格. 上世纪, Knight^[1] 等针对 Ellsberg^[2] 悖论, 提出除传统风险外真正的不确定性还应包括未来事件无明确概率的不确定性, 并将之定义为奈特不确定性 (Knightian uncertainty); 继而, 奈特不确定性环境下的资产定价问题成为学术界研究的焦点. 实质上, 奈特不确定性环境下的资产定价问题研究还能阐释传统金融学中信息和流动性等风险与资产定价的关系, 进一步刻画投资者行为. 因此, 本文基于 Black-Scholes 期权定价模型^[3],

放宽不确定性条件, 提出新模型研究奈特不确定性下的欧式期权定价问题.

Black-Scholes 期权定价模型 (简称 B-S 模型) 的提出推动和发展了资产定价问题研究, 衍生出诸多视角下的期权定价模型. Coimbra-Lisboa 等^[4] 假定投资者操作时间倾向于零, 建立美式期权定价模型, 进一步研究奈特不确定性下的套利理论. 李英华等^[5] 在不完全市场中从投资收益最大化视角提出期权定价新的求解方法. Ji 等^[6] 基于不确定微分方程提出不同跳跃形式下的单个股票期权定价模型; Gao 等^[7] 在 Ji 等的基础上, 进一步提出带有不确定跳跃风险的双资产的期权定价模型. 吴恒煜等^[8] 通过在股票价格中引入漂移率、波动率和随机跳跃 3 种变量建立动态空间模型, 并基于序贯贝叶斯参数学习方法进行模型估计和期权定价研究. 陈森鑫等^[9] 基于随机波动率

① 收稿日期: 2017-07-15; 修订日期: 2018-09-02.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71873002; 71271003); 教育部人文社会科学研究规划基金资助项目 (12YJA790041).

作者简介: 何朝林 (1971-), 男, 安徽天长人, 博士, 教授. Email: hcl@ahpu.edu.cn

随机跳跃强度期权定价模型,并结合实证研究,指出在期权定价过程中,跳跃风险溢酬远超过波动率风险溢酬。随着中国期权市场的发展,诸多学者开始着眼于中国期权市场的实证研究。张峥等^[10]基于2007年至2011年上证50日度数据实证研究期权市场价格和基金净值的相关关系,分析证券市场折溢价水平以及影响因素,指出上证50期权具有较高的定价率。陈蓉等^[11]首次使用无模型方法提取期权市场中隐含的偏度风险溢筹,证明虽然偏度风险是系统性风险,但其风险因子却不同于市场风险的定价因子,进一步将偏度风险溢筹与投资者情绪联系,发现偏度风险溢筹与投资者情绪呈反向变动关系。客观上讲,上述关于期权定价问题的研究部分已突破传统风险范畴,不同程度地涉及到期权定价中的奈特不确定性问题。

奈特不确定性进一步刻画了金融市场的不确定性特征,丰富了资产定价问题研究。Epstein等^[12]指出奈特不确定性在资产定价中扮演重要角色,其特征导致均衡定价的不平衡,均衡价格的确定过程受到“精神层”的影响,可能存在较大的波动性。Brenner等^[13]通过案例模型整合拓展资产定价模型,发现当市场存在买卖不确定偏差时,可通过分析证券市场的信息环境判断、预测投资者偏差类型。Suzuki^[14]在不确定环境下,运用对偶理论将奈特不确定性偏好模型延伸至连续时间下的动态模型,研究资产定价问题,并以实例说明其实用性。Bianchi等^[15]研究了不确定性冲击在股东最优反应下的驱动估值、支付和杠杆,指出不确定性冲击及其相互作用对企业决策和股票风险溢价的影响。韩立岩等^[16]将随机波动率模型转换为奈特不确定模型,建立“奈特溢价-奈特不确定”的效用函数,投资者通过衡量该效用函数做出最优投资决策。王春峰等^[17]分析奈特不确定性对资产收益的影响,提出了奈特不确定性度量方法,建立考虑奈特不确定性的资产定价模型,发现中国证券市场投资者对奈特不确定性参与资产定价表现出喜好态度。近来,出现将投资者情绪归结于奈特不确定性范畴,突破传统金融学领域研究资产定价问题。Yang等^[18]提出了基于投资者情绪的资本资产定价模型,进一步推导出资本市场情绪线与证券市场情绪线;Li^[19]在市场不对称信息条件下,建立多阶段的情绪资产定价模型,指出理性投资者与情绪投资者对待市场噪声的心理不同,情

绪投资者将该信息纳入资产定价的影响因素;扈文秀等^[20]对现有噪声交易者(DSSW)模型进行扩展,研究非理性资产泡沫生成及膨胀机理。杨宝臣等^[21]指出证券市场泡沫源于投资者异质性过高,造成异质性过高的因素包括较高技术分析者比例和对历史价格过于敏感的分析策略,它们的共同作用使得市场价格稳定域变窄。王宗润等^[22]指出投资者过度自信通过低估私人信号噪声的方差影响理财产品标的资产到期价格的预期分布,扭曲投资者的概率估计,从而降低投资者感知风险。上述研究表明,奈特不确定性特征参与资产定价,并从不同角度阐释了奈特不确定性与资产定价关系。

综上所述,资产定价问题的研究已突破传统意义上的风险范畴,奈特不确定性更能客观反映金融市场的不确定性特征,有助于揭示资产定价规律、阐释投资者行为。但目前研究至少有两点还需进一步深入或完善:一是较多研究将资产收益中风险溢价之外的部分笼统归结为噪声,将奈特不确定性与噪声等价。随着微观结构理论的发展,除风险溢价之外的信息溢价和流动性溢价也以风险因子形式逐渐被引入资产定价模型。实质上,奈特不确定性主要归结于投资者信息集的噪声及其引起投资者态度或情绪的变化。二是源于奈特不确定性难以测度,较多研究停留在理论层面,应用数学语言描述奈特不确定性与资产定价的关系。本文创新性体现在以下3点:1)将奈特不确定性从资产收益的噪声中单独列出,并以一等级参数予以测度;2)量化奈特不确定性程度,实证研究奈特不确定性强弱、期权标的资产当前价格、期权到期时间与期权定价的关系;3)对比发现,奈特不确定性的客观存在导致资产均衡价格不再是某一确定值,而是某一定价区间。定价区间的存在,降低了市场流动性,从而为投资者决策提出建议和金融市场监管提供经验证据。

1 奈特不确定性下的欧式期权定价区间

1.1 奈特不确定性测度及其对偶测度

为描述金融市场上的奈特不确定性特征,引入可行控制集合

$$\Theta = \{ (\theta_t)_{0 \leq t \leq T} \mid |\theta_t| \leq \alpha, t \in [0, T] \}$$

并将 Θ 中的变量 $\alpha (\alpha \in (0, \infty))$ 定义为奈特不确定性测度, 即为测度金融市场上奈特不确定性程度的等级参数. 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 表明金融市场上的奈特不确定性程度较弱, 最终收敛于传统意义上的风险, 即资产未来收益具有明确概率分布; 反之, 则表明金融市场上的奈特不确定性程度越来越强, 即资产未来收益的概率分布越来越模糊. 基于此, 借助可行域上的容度概念获得奈特不确定性对偶测度.

定义 1 若 μ 是可行域 (X, Σ) 上的测度, 则对于 $\forall A \in \Sigma$, μ 的对偶测度为 μ' : $\mu' = 1 - \mu(A^X)$, 其中 $A^X = \Sigma - A$, μ' 与 μ 凹凸性相反.

定义 2 若 μ 是可行域上的 α -概率测度, 则 μ' 是可行域上的 α^* -概率测度 $\alpha^* = -\frac{\alpha}{1 + \alpha}$, α^*

称为 α 的对偶测度.

因此, 奈特不确定性对偶测度为 α^* , $\alpha^* \in (-1, 0)$.

1.2 奈特不确定性下的欧式期权定价

根据欧式期权定义, 基于 B-S 期权定价模型的欧式看涨和看跌期权的回报分别为^[23]

$$(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0) \quad (1)$$

$$(K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0) \quad (2)$$

式中 T 为到期日, K 为执行价格, S_T 为期权到期时标的资产的价格.

由 Epstein 等^[12] 的研究可知, 在奈特不确定性环境下, 资产的均衡价格可能不再是传统风险意义上的某一确定值, 而是某一区间. 因此, 基于奈特不确定测度 α 及其对偶测度 α^* ($-1 < \alpha^* < 0 < \alpha < +\infty$), 并结合式 (1) 和式 (2), 奈特不确定性下欧式看涨期权和看跌期权的定价可表达为

$$[C^\alpha, C^{\alpha^*}] = [\min\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(S_T - K)^+\}] , \max\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(S_T - K)^+\}]\} \quad (3)$$

$$[P^\alpha, P^{\alpha^*}] = [\min\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(K - S_T)^+\}] , \max\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(K - S_T)^+\}]\} \quad (4)$$

式中 C^α, C^{α^*} 分别是欧式看涨期权的最小和最大定价; P^α, P^{α^*} 分别是欧式看跌期权的最小和最大定价. 接下来以欧式看涨期权和看跌期权的最小定价为例予以求解, 即

$$C^\alpha = \max\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(S_T - K)^+\}] \quad (5)$$

$$P^\alpha = \min\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(K - S_T)^+\}] \quad (6)$$

引理 1 存在 $(\theta_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T} \in \Theta, (\theta_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T} \in \Theta$ 分别满足

$$C^\alpha = E^{Q^{\theta^{(1)}}}[e^{-rT}(S_T - K)^+\] \quad (7)$$

$$P^\alpha = E^{Q^{\theta^{(2)}}}[e^{-rT}(K - S_T)^+\] \quad (8)$$

证明 对 $\forall (\theta_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T} \in \Theta$

$$C^\alpha = \min\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(S_T - K)^+\}] \\ = E^{Q^{\theta^{(1)}}}[e^{-rT}(S_T - K)^+\] \quad (9)$$

式中 $(\theta_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T} = [\alpha \operatorname{sgn}(z_t^{\theta^{(1)}})]_{0 \leq t \leq T} \in \Theta$, $(y_t^{\theta^{(1)}})_{0 \leq t \leq T}$ 是倒向随机微分方程 (10)

$$\begin{cases} -dy_t^{\theta^{(1)}} = (-ry_t^{\theta^{(1)}} - \alpha |z_t^{\theta^{(1)}}|) dt - z_t^{\theta^{(1)}} dW_t^Q \\ y_T^{\theta^{(1)}} = (S_T - K)^+ \end{cases} \quad (10)$$

的解^[17].

同理可得, 对 $\forall (\theta_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T} \in \Theta$

$$P^\alpha = \min\{E^{Q^\theta}[e^{-rT}(K - S_T)^+\}] \\ = E^{Q^{\theta^{(2)}}}[e^{-rT}(K - S_T)^+\] \quad (11)$$

式中 $(\theta_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T} = [\alpha \operatorname{sgn}(z_t^{\theta^{(2)}})]_{0 \leq t \leq T} \in \Theta$, $(y_t^{\theta^{(2)}})_{0 \leq t \leq T}$ 是倒向随机微分方程 (12)

$$\begin{cases} -dy_t^{\theta^{(2)}} = (-ry_t^{\theta^{(2)}} - \alpha |z_t^{\theta^{(2)}}|) dt - z_t^{\theta^{(2)}} dW_t^Q \\ y_T^{\theta^{(2)}} = (K - S_T)^+ \end{cases} \quad (12)$$

的解. 证毕.

引理 1 表明式 (5) 和式 (6) 存在唯一解. 为引入奈特不确定性测度参数 α , 提出引理 2.

引理 2^[23] 若令引理 1 中 $(\theta_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T} \equiv \alpha$, $(\theta_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T} \equiv -\alpha$, 则欧式看涨期权和看跌期权的最小定价进一步转化为

$$C^\alpha = E^{Q^{(\alpha)}}[e^{-rT}(S_T - K)^+\] \quad (13)$$

$$P^\alpha = E^{Q^{(-\alpha)}}[e^{-rT}(K - S_T)^+\] \quad (14)$$

其中, 由集合 Θ 生成的概率测度集合与集合 Θ 等价^[24]

$$\frac{dQ^{(\alpha)}}{dQ} \Big|_{F_T} := \exp\left\{-\alpha W_T^Q - \frac{1}{2}\alpha^2 T\right\},$$

$$\frac{dQ^{(-\alpha)}}{dQ} \Big|_{F_T} := \exp \left\{ \alpha W_T^Q - \frac{1}{2} \alpha^2 T \right\}$$

证明 (Σ, F, P) 是个完备概率空间, 假设 $\Phi(x)$ 是 R 上的连续函数, 满足 $\Phi(x) \in L^2(\Sigma, F, P)$ 且 $(y^{t,x}, z^{t,x})$ 是倒向随机微分方程 (15)

$$y_s^{t,x} = \Phi(X) + \int_s^T h(y_w^{t,x}, z_w^{t,x}, y) dw - \int_s^T z_w^{t,x} dB_w, \quad s \in [t, T] \quad (15)$$

的解.

张慧^[25]指出, 如果函数 $\Phi(x)$ 是单调递增的, 那么 $\partial x(y_s^{t,x}) \geq 0$, 则 $(z_s^{t,x})_{0 \leq s \leq T}$ 和 $(\sigma(s, X_s^{t,x}))_{0 \leq s \leq T}$ 的正负相同; 同理, 当函数 $\Phi(x)$ 是单调递减的, 则 $(z_s^{t,x})_{0 \leq s \leq T}$ 和 $(\sigma(s, X_s^{t,x}))_{0 \leq s \leq T}$ 的正负相反. 由于偏微分方程 (10) 中 $(S_T, K)^+$ 关于 S_T 单调递增, 所以过程 $(z_t^{\theta(1)})_{0 \leq t \leq T}$ 的正负与 $(\sigma(t, X_t))_{0 \leq t \leq T}$ 正负相同, 结合引理 1 可得 $(\theta_t^{(1)})_{0 \leq t \leq T} \equiv \alpha$; 同理可得 $(\theta_t^{(2)})_{0 \leq t \leq T} \equiv -\alpha$. 证毕.

因此, 基于引理 1 和引理 2 可得命题 1.

命题 1 在可行控制集合 Θ 下, 奈特不确定性测度参数 α 满足 $0 < \alpha < +\infty$, 欧式看涨期权和看跌期权的最小定价为

$$C^\alpha = se^{-\alpha\sigma T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (16)$$

$$P^\alpha = Ke^{-rT} N(-d_6) - se^{\alpha\sigma T} N(-d_5) \quad (17)$$

式中 s 是标的资产当前价格; T 为到期日; r 是 $[0, T]$ 内无风险资产利率; σ 是认购权证的波动率; $d_2 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r - \alpha\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$; $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$; $d_6 =$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= e^{-rT} E^{Q^{(\alpha)}} \left\{ s \exp \left[\left(r - \alpha\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T + \sigma W_T^{Q^{(\alpha)}} \right] 1_{\{S_T \geq K\}} \right\} \\ &= e^{-rT} s \exp [(r - \alpha\sigma)T] N(d_1) = se^{-\alpha\sigma T} N(d_1) \end{aligned} \quad (21)$$

类似上述过程, 化简可得

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= Ke^{-rT} E^{Q^{(\alpha)}} (1_{\{S_T \geq K\}}) \\ &= Ke^{-rT} Q^{(\alpha)} \{S_T \geq K\} \\ &= Ke^{-rT} N \left(\frac{\ln \frac{s}{K} + (r - \alpha\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\ &= Ke^{-rT} N(d_2) \end{aligned} \quad (22)$$

将式 (21) 和式 (22) 代入式 (18) 得

$$\frac{\ln \frac{s}{K} + (r + \alpha\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad d_5 = d_6 + \sigma\sqrt{T}$$

$N(\cdot)$ 表示标准正态的累积概率分布函数, $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

证明 求解式 (13) 得

$$\begin{aligned} C^\alpha &= E^{Q^{(\alpha)}} [e^{-rT} (S_T - K)^+] \\ &= E^{Q^{(\alpha)}} [e^{-rT} (S_T - K) 1_{\{S_T \geq K\}}] \\ &= e^{-rT} E^{Q^{(\alpha)}} (S_T 1_{\{S_T \geq K\}}) - Ke^{-rT} E^{Q^{(\alpha)}} (1_{\{S_T \geq K\}}) \\ &\triangleq \Delta_1 - \Delta_2 \end{aligned} \quad (18)$$

接下来, 分别求解 Δ_1, Δ_2 .

$$\Delta_1 = e^{-rT} E^{Q^{(\alpha)}} (S_T 1_{\{S_T \geq K\}})$$

由引理 2 得, 当 $0 \leq t \leq T$ 时

$$S_t = s \exp \left\{ \left(r - \alpha\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t^{Q^{(\alpha)}} \right\} \quad (19)$$

其中 $W_t^{Q^{(\alpha)}}$ 为概率测度 Q^α 下的布朗运动, 令 $N_t =$

$$\exp \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^{Q^{(\alpha)}} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \frac{d\dot{Q}}{dQ^{(\alpha)}} \Big|_{F_T} :=$$

$N_T, W_t = W_t^{Q^{(\alpha)}} - \sigma t$, 则 \dot{Q} 为概率测度, $\{W_t\}$ 是在 \dot{Q} 下的布朗运动. 因此, $\ln S_T$ 在概率测度 \dot{Q} 下服从正态分布 $N \left(\ln s + \left(r - \alpha\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T, \sigma^2 T \right)$, 即

$$\begin{aligned} \dot{Q} \{S_T \geq K\} &= N(d_1) \\ &= N \left(\frac{\ln \frac{s}{K} + \left(r - \alpha\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

将式 (19) 和式 (20) 代入 Δ_1 可得

$$C^\alpha = \Delta_1 - \Delta_2 = se^{-\alpha\sigma T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (23)$$

因此, 式 (16) 成立. 同理, 可证得式 (17) 成立.

证毕.

同理 引入奈特不确定性对偶测度 α^* 得命题 2.

命题 2 在可行控制集合 Θ 下, 奈特不确定性测度参数 α 及其对偶测度参数 α^* 满足 $-1 < \alpha^* < 0 < \alpha < +\infty$, 欧式看涨期权和看跌期权的

最大定价为

$$C^{\alpha^*} = se^{(\alpha/(1+\alpha))\sigma T} N(d_3) - Ke^{-rT} N(d_4) \quad (24)$$

$$P^{\alpha^*} = Ke^{-rT} N(-d_8) - se^{(-\alpha/(1+\alpha))\sigma T} N(-d_7) \quad (25)$$

式中 s 是标的资产当前价格; T 为到期日; r 是 $[0, T]$ 内无风险资产利率; σ 是认购权证的波动率;

$$d_4 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r + (\frac{\alpha}{1+\alpha})\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}; d_3 = d_4 + \sigma\sqrt{T};$$

$$d_8 = \frac{\ln \frac{s}{K} + (r - (\frac{\alpha}{1+\alpha})\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}; d_7 = d_8 + \sigma\sqrt{T};$$

$N(\cdot)$ 表示标准正态的累积概率分布函数, $N(x) =$

$$[C^{\alpha} \ C^{\alpha^*}] = [se^{-\alpha\sigma T} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \ se^{(\alpha/(1+\alpha))\sigma T} N(d_3) - Ke^{-rT} N(d_4)] \quad (27)$$

$$[P^{\alpha} \ P^{\alpha^*}] = [Ke^{-rT} N(-d_6) - se^{\alpha\sigma T} N(-d_5) \ Ke^{-rT} N(-d_8) - se^{(-\alpha/(1+\alpha))\sigma T} N(-d_7)] \quad (28)$$

进一步,以欧式看涨期权为例,基于式(27)讨论定价区间与期权标的资产当前价格、期权到期时间和奈特不确定性程度的关系,获得相应

$$\frac{\partial l_C}{\partial s} = e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} N(d_3) + se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} \frac{\partial N(d_3)}{\partial d_3} \frac{\partial d_3}{\partial s} - Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_4)}{\partial d_4} \frac{\partial d_4}{\partial s} - (e^{-\alpha\sigma T} N(d_1) + se^{-\alpha\sigma T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial s} - Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial s})$$

因为 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ $d_3 = d_4 + \sigma\sqrt{T}$ 所以 $\frac{\partial d_1}{\partial s} =$

$$\frac{\partial d_2}{\partial s} \quad \frac{\partial d_3}{\partial s} = \frac{\partial d_4}{\partial s} \quad \text{故有}$$

$$\begin{aligned} Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} &= Ke^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} \\ &= Ke^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T}d_1 + \sigma^2 T)} \\ &= Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} e^{\ln \frac{s}{K} + (r - \alpha\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T} \\ &= Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{s}{K} e^{rT} e^{-\alpha\sigma T} \\ &= se^{-\alpha\sigma T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \end{aligned} \quad (29)$$

同理可得

$$se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} \frac{\partial N(d_3)}{\partial d_3} = Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_4)}{\partial d_4}$$

所以

$$\frac{\partial l_C}{\partial s} = e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} N(d_3) - e^{-\alpha\sigma T} N(d_1)$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

证明 基于式(16)及定义2中 $\alpha^* = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$,

奈特不确定性下的欧式看涨期权的最大定价为

$$\begin{aligned} C^{\alpha^*} &= se^{-\alpha^*\sigma T} N(d_3) - Ke^{-rT} N(d_4) \\ &= se^{(\alpha/(1+\alpha))\sigma T} N(d_3) - Ke^{-rT} N(d_4) \end{aligned} \quad (26)$$

即式(24)成立. 同理,可证得式(25)成立.

结合命题1和命题2,可获得结论1.

结论1 假设投资者为理性,若以等级参数 α 测度金融市场上的奈特不确定性程度,则奈特不确定性环境下欧式看涨期权和看跌期权的定价为某一区间,称之为定价区间

推论.

令 l 为定价区间长度,则欧式看涨期权的定价区间长度可表达为 $l_C = C^{\alpha^*} - C^{\alpha}$. 因此

因为 $d_3 > d_1$ $\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T > -\alpha\sigma T$ 所以 $N(d_3) > N(d_1)$,

$$e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} > e^{-\alpha\sigma T} \quad \text{故} \quad \frac{\partial l_C}{\partial s} > 0.$$

因此,欧式看涨期权的定价区间与其标的资产当前价格同方向变动,呈正相关关系.

欧式期权必须在到期日才能执行,故欧式期权的到期时间是一固定值,但不同资产的欧式期权到期日并不相同,因而可以将到期时间 T 看成连续性变量. 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_C}{\partial T} &= se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} N(d_3) \frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma + se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} \frac{\partial N(d_3)}{\partial d_3} \frac{\partial d_3}{\partial T} + \\ &\quad rKe^{-rT} N(d_4) - Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_4)}{\partial d_4} \frac{\partial d_4}{\partial T} - \\ &\quad (se^{-\alpha\sigma T} N(d_1) (-\alpha\sigma) + se^{-\alpha\sigma T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial T} + \\ &\quad rKe^{-rT} N(d_2) - Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial T}) \end{aligned}$$

由于 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ $d_3 = d_4 + \sigma\sqrt{T}$, 并结合式

(29) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_C}{\partial T} = & se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} N(d_3) \frac{\alpha}{1+\alpha} \sigma + s\alpha\sigma e^{-\alpha\sigma T} N(d_1) + \\ & rKe^{-rT} N(d_4) - rKe^{-rT} N(d_2) + \\ & se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} \frac{\partial N(d_3)}{\partial d_3} \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} - se^{-\alpha\sigma T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \end{aligned}$$

因为 $N(d_3) > N(d_1)$, $N(d_4) > N(d_2)$, $\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T > -\alpha\sigma T$, 所以 $\frac{\partial N(d_3)}{\partial d_3} > \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1}$, $rKe^{-rT} N(d_4) - rKe^{-rT} N(d_2) > 0$, $e^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} > e^{-\alpha\sigma T}$.

$$\begin{aligned} \text{又因为 } & se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} \frac{\partial N(d_3)}{\partial d_3} \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} - se^{-\alpha\sigma T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \times \\ & \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} > 0 \text{ 故 } \frac{\partial l_C}{\partial T} > 0. \end{aligned}$$

因此, 欧式看涨期权的定价区间与其到期时间同方向变动, 呈正相关关系.

最后, 分别讨论定价区间的下界和上界与奈特不确定性程度的关系. 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^\alpha}{\partial \alpha} = & se^{-\alpha\sigma T} (-\sigma T) N(d_1) + \\ & se^{-\alpha\sigma T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \alpha} - Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

因为 $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$, 所以 $\frac{\partial d_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial d_2}{\partial \alpha}$, 并结合式

(29) 得

$$\frac{\partial C^\alpha}{\partial \alpha} = se^{-\alpha\sigma T} (-\sigma T) N(d_1) < 0$$

同理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^{\bar{\alpha}}}{\partial \alpha} = & \frac{1}{(1+\alpha)^2} \sigma T se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} N(d_3) + \\ & se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} \frac{\partial N(d_3)}{\partial d_3} \frac{\partial d_3}{\partial \alpha} - Ke^{-rT} \frac{\partial N(d_4)}{\partial d_4} \frac{\partial d_4}{\partial \alpha} \\ = & \frac{1}{(1+\alpha)^2} \sigma T se^{\frac{\alpha}{1+\alpha}\sigma T} N(d_3) > 0 \end{aligned}$$

因此, 欧式期权的最小定价是奈特不确定性程度的减函数, 最大定价是奈特不确定性程度的增函数. 故定价区间随着奈特不确定性程度的增大而变大(若采用类似的定价区间长度分析法, 同样可获得此结果).

综上所述, 可获得推论 1.

推论 1 在奈特不确定性环境下, 欧式期权标的资产价格越高、到期时间越长、金融市场的奈特不确定性程度越强, 欧式期权的定价区间越大.

2 实证研究

基于结论 1 中的式(27)和式(28), 以中国期权市场的上证 50ETF 期权为对象, 实证研究奈特不确定性程度、期权标的资产当前价格及期权到期时间与期权定价区间的关系, 并与传统风险意义(B-S 模型, 即本文中 $\alpha = 0$ 的情形)下的期权定价特征对比, 获得相关结论.

2.1 研究样本的选择

无风险利率选取 2016 年凭证式(一期)国债, 持满 3 年以上的年利率为 4.00%, 其日收益率为 $r = \frac{\ln(1+0.040)}{365} = 0.000107$. 风险资产

选取 2015 年 2 月 9 日正式上市交易的上证 50ETF 期权(510050), 其行权日为 2016 年 9 月 28 日, 故研究样本区间为 2015-02-09 ~ 2016-09-28. 以行权日前 90 天标的资产的对数收益率样本标准差作为波动率的估计, 波动率 σ 按 1 年 240 个交易日计算, 即 $\sigma = \sigma_i \sqrt{240}$, 其中 σ_i 为上证 50ETF 期权到期日前 90 日的日收益率标准差. 上证 50ETF 期权以收盘价靠档价作为行权价推出一个平值期权合约, 并以此确定行权间距, 按行权价格区间推出两个实值和两个虚值. 同时, 为反映奈特不确定性程度的变化与上证 50ETF 期权定价区间的关系, 选择表征奈特不确定性程度较强和强的两个等级参数, 即 $\alpha = 0.5$ 、 $\alpha = 3$ 为与传统风险意义下基于 B-S 模型的上证 50ETF 期权定价特征对比, 本文也给出 $\alpha = 0$ 情形下的上证 50ETF 期权定价特征. 因此, 基于上证 50ETF 期权的原始数据(原始数据来源于 wind 数据库)可获得奈特不确定性环境下上证 50ETF 期权定价的相关参数, 结果见表 1.

表1 奈特不确定性下上证50ETF期权定价的相关参数

Table 1 Related parameters of the pricing of SSE 50ETF option under the Knightian uncertainty

期权名称	上证50ETF
行权日	2016-09-28
无风险利率	0.000107
波动率	0.124905
奈特不确定性等级参数	0.0.5.3

2.2 实证结果与分析

2.2.1 实证结果

基于式(27)和式(28)及表1中的相关参数,在MATLAB7.0平台下获得传统风险意义($\alpha=0$)下上证50ETF期权的看涨价格和看跌价格变化特征(图1和图2),以及不同奈特不确定性程度($\alpha=0.5$ 、 $\alpha=3$)下的上证50ETF期权的看涨定价区间变化特征(图3和图4)和看跌定价区间变化特征(图5和图6)。

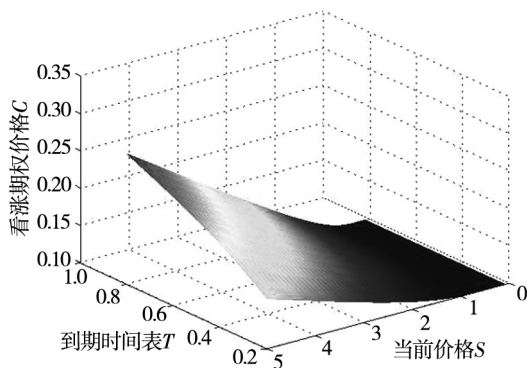


图1 $\alpha=0$ 时上证50ETF期权的看涨定价
Fig. 1 Pricing of SSE 50ETF call option: $\alpha=0$

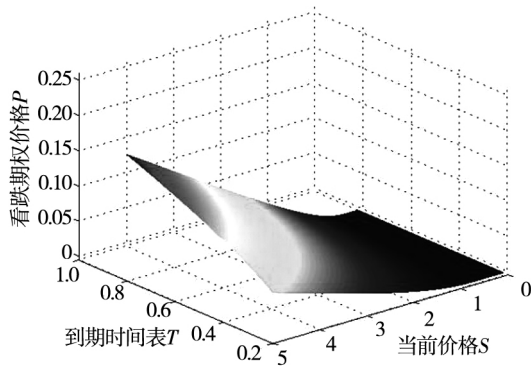


图2 $\alpha=0$ 时上证50ETF期权的看跌定价
Fig. 2 Pricing of SSE 50ETF put option: $\alpha=0$

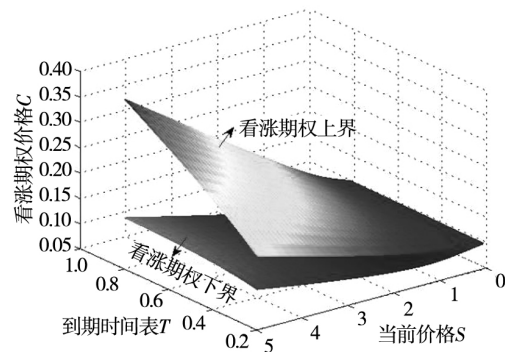


图3 $\alpha=0.5$ 时上证50ETF期权的看涨定价区间
Fig. 3 Pricing interval of SSE 50ETF call option: $\alpha=0.5$

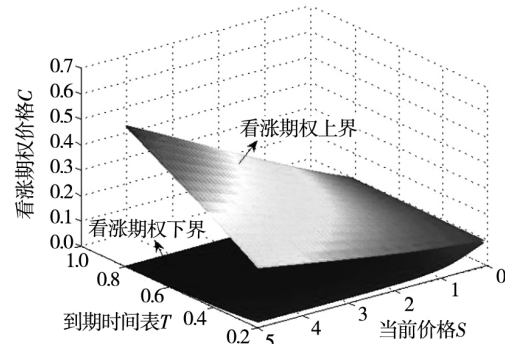


图4 $\alpha=3$ 时上证50ETF期权的看涨定价区间
Fig. 4 Pricing interval of SSE 50ETF call option: $\alpha=3$

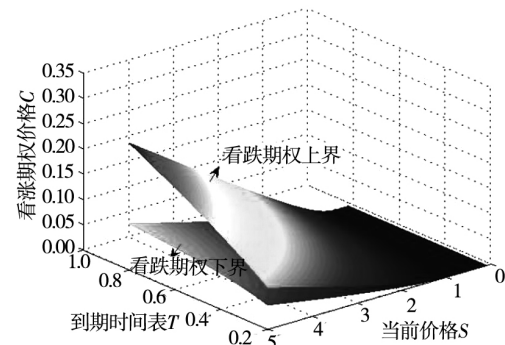


图5 $\alpha=0.5$ 时上证50ETF期权的看跌定价区间
Fig. 5 Pricing interval of SSE 50ETF put option: $\alpha=0.5$

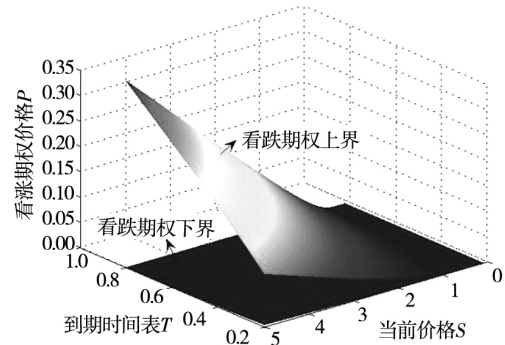


图6 $\alpha=3$ 时上证50ETF期权的看跌定价区间
Fig. 6 Pricing interval of SSE 50ETF put option: $\alpha=3$

2.2.2 结果分析

1) 图3~图6与图1~图2对比显示: 奈特不确定性环境下欧式期权的均衡价格不再是某一确定值, 而是某一区间. 资产定价的本质是无套利定价, 基于B-S模型的欧式期权定价是在严格市场条件假设下仅考虑传统风险溢价的资产均衡价格, 且为某一确定值, 即完全市场条件下的资产均衡价格; 当资产的市场价格高于均衡价格时, 投资者卖出资产, 反之, 投资者买进资产. 事实上, 市场的信息风险和流动性风险等及由此引起的投资者情绪变化(本文将此归结于奈特不确定性) 显著影响着资产的均衡价格. 源于信息风险和流动性风险等的客观存在, 投资者需要风险补偿, 故而资产的均衡价格为某一区间, 只有当资产的市场价格高于定价区间时, 投资者才会卖出资产, 低于定价区间时, 投资者才会买进资产; 也就是说, 若资产的市场价格落在定价区间内, 资产处于无交易状态, 资产的流动性降低. 因此, 奈特不确定性导致资产均衡价格为某一定价区间, 进而降低了市场流动性.

2) 图3~图6显示定价区间与标的资产当前价格呈同方向变动. 这表明, 当标的资产价格不断增大时, 期权的交易价格增大, 定价区间随之也增大. 此外, 当标的资产当前价格较小时, 定价区间的上界和下界曲线较为平缓, 说明此时其对定价区间影响较弱; 当标的资产当前价格上升到一定程度后, 定价区间的上界和下界曲线变得陡峭, 接近直线变化. 这说明当标的资产价格达到投资者承受程度时, 投资者会停止期权购买行为, 期权价格呈直线上升趋势. 这缘于投资者的奈特不确定性规避心理, 当标的资产价格上升到较大或很大时, 投资风险的加大迫使他们放弃对该期权的投资; 从投资者效应视角, 当期权定价区间增大时, 期权的流动性降低, 导致投资收益率降低, 进而影响投资者决策.

3) 图3~图6显示定价区间与期权到期时间呈正相关关系. 这表明, 期权到期时间越长, 期权定价区间随之越大. 这一方面源于传统意义上的风险, 期权到期时间越长, 投资决策的期望收益率要求越高; 另一方面, 期权到期时间越长, 投资者越难以获得真实信息, 信息质量越低, 未来投资收益概率的明确性越模糊, 即奈特不确定

性对投资者的影响越大, 投资者期望更高的奈特不确定性溢价. 这不但类似于近年来在传统风险含义的基础上引入信息风险研究资产定价问题, 而且与Epstein等^[26]的研究结论一致: 当信息质量降低时, 奈特不确定性规避者寻求越高的奈特不确定性溢价. 结合结果分析第2段中的分析, 期权标的资产当前价格和期权到期时间均与期权的定价区间呈正相关关系, 故而研究期权定价问题更应考虑金融市场上的奈特不确定性特征; 同时, 传统风险之外的信息风险和流动性风险可以归结于奈特不确定性问题研究.

4) 图3~图6显示无论是看涨期权还是看跌期权, 随着奈特不确定性程度的增大, 定价区间随之变大. 这既符合第一部分的理论分析: 期权最大定价是奈特不确定性程度的增函数, 期权最小定价是奈特不确定性程度的减函数, 又说明奈特不确定性程度越高, 未来偶或收益的不确定性越大, 风险规避型投资者不但表现出奈特不确定性厌恶心理, 在较高的奈特不确定下可能选择不进入市场, 从而降低了市场的流动性, 而且也期望越高的奈特不确定性溢价, 表现出较大的定价区间. 这与Easley等^[27]的研究结论一致: 投资者面临很大奈特不确定性程度时会选择不进入市场, 价差的增大和流动性的降低均会改变资产均衡价格. 此外, 还发现, 某一奈特不确定性测度下, 看涨期权的定价区间大于看跌期权的定价区间, 这一方面源于看涨看跌期权的性质, 另一方面源于投资者的奈特不确定性规避心理, 更担心于期权标的资产未来价格下跌, 倾向于交易看跌期权. 综上, 在充满不确定性的金融市场上, 奈特不确定性越大, 资产流动性越弱; 看涨期权的流动性弱于看跌期权.

3 结束语

奈特不确定性不但能客观描述金融市场的不确定性特征, 而且显著影响资本资产定价, 进而影响资本市场流动性. 本文在Black-Scholes定价模型中引入等级参数测度金融市场上的奈特不确定性程度, 构建欧式看涨期权和看跌期权的定价区间, 并运用倒向随机微分方程获得定价区间的表达式, 以上证50ETF期权的日收益数据为样本

予以实证,并与 Black-Scholes 期权定价特征对比。结果表明,奈特不确定性的客观存在导致期权的均衡价格不再是某一确定值,而是某一定价区间,且该定价区间随着奈特不确定性程度的增强而变大,随着期权标的资产当前价格的增大而变大,随着期权到期时间的变长而变大,并由此获得相关启示:

(1) 内生解释了证券市场上的“非市场参与”之谜。奈特不确定性是证券市场的基本特征之一,其客观存在导致资产的均衡价格为某一定价区间,且奈特不确定性程度越强,该定价区间越大,资产未被交易的可能性越大,进而市场流动性下降。这不但解释了现实证券市场上经常出现一些风险资产在几分钟或更长时间内未被交易的现象,而且从奈特不确定性视角解释了“非市场参与”的经济现象。

(2) 外生说明了证券市场上的“有限市场参与”特征。大部分投资者属于奈特不确定性规避型。奈特不确定性程度反映了投资者获取市场信息量的程度,因投资者获取信息的渠道、数量和质量差异,他们对证券市场的奈特不确定性程度认知存在差异;同时,即使获取同等的市场信息数量和质量,但投资者对信息的加工处理方式也不同,也导致他们对证券市场的奈特不确定性程度认知存在差异。因此,虽然证券市场的奈特不确定性特征能解释“非市场参与”之谜,但因投资者行为的异质性,尽管资产市场价格落在其定价区间内,投资者在实际交易中也存在差异,故证券市场上的交易往往是“有限市场参与”。

(3) 奈特不确定性特征影响着中国证券市场

的流动性和稳定性。中国证券市场是个新兴市场,且中国经济社会正处于转型阶段,奈特不确定性特征在中国证券市场上表现更为明显,因而风险资产的定价区间相对较大,内生影响着市场的流动性;同时,中国投资者存在明显的羊群效应,降低了投资者异质性程度,外生影响着市场的稳定性。因此,市场层面,应推进体制机制改革、加强金融市场监管、提升信息披露数量和质量、防止资产价格骤然上升等降低证券市场的奈特不确定性程度。加强金融创新产品市场的宏观管理,如近年来发展起来的绿色金融,因其发展时间短、处于探索发展阶段,社会对其缺乏认识或获取信息的渠道有限等,政府一方面要完善绿色金融财税政策,另一方面要建立公益性环境信息系统和企业环保社会责任规范等降低绿色金融市场的奈特不确定性程度,保持其稳定、可持续发展。投资者层面,应重视奈特不确定性下的个体决策行为和群体决策行为研究,提升投资者决策的科学性。奈特不确定性下的均衡定价区间可以更好地满足个体投资者的投资需求和投资过程风险防控,个体投资者可以根据自身投资满意隶属度及其变化从均衡定价区间内选择满意价格作为参考,进而制定科学投资决策。

本文仅对奈特不确定性下的欧式期权定价区间进行了初步研究,简要讨论了定价区间对资产交易行为的影响及与市场流动性的关系。在今后研究中,可进一步挖掘均衡定价区间与投资者交易行为的内涵和实质,深刻揭示金融市场的特征,为投资决策和金融市场监管提供建议措施。

参考文献:

- [1] Knight F. Risk, Uncertainty and Profit [M]. Boston: Houghton Mifflin, 1921.
- [2] Ellsberg D. Risk, ambiguity, and the savage axioms [J]. Quarterly Journal of Economics, 1961, 75(4): 643-669.
- [3] Black F, Scholes M. The valuation of option and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.
- [4] Coimbra-Lisboa P C, Gonçalves E. Arbitrage Theorems under Knightian Uncertainty [C] // Sociedade Brasileira De Econometria, xxviii Brazilian Meeting of Econometrics, 2006.
- [5] 李英华, 李兴斯. 不完全市场下收益最大化期权定价法 [J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(12): 2281-2286.
Li Yinghua, Li Xingsi. Maximizing return model for option pricing in the incomplete market [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2011, 31(12): 2281-2286. (in Chinese)
- [6] Ji X, Zhou J. Option pricing for an uncertain stock model with jumps [J]. Soft Computing, 2015, 19(11): 3323-3329.

- [7] Gao Z, Wang X, Ha M. Multi-asset option pricing in an uncertain financial market with jump risk [J]. *Journal of Uncertainty Analysis & Applications*, 2016, 4(1): 1–11.
- [8] 吴恒煜, 朱福敏, 胡根华, 等. 基于参数学习的 GARCH 动态无穷活动率 Levy 过程的欧式期权定价 [J]. *系统工程理论与实践*, 2014, 34(10): 2465–2482.
Wu Hengyu, Zhu Fumin, Hu Genhua, et al. European option pricing for GRACH dynamic infinite activity Levy processes based on parameter learning [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2014, 34(10): 2465–2482. (in Chinese)
- [9] 陈淼鑫, 武晨. 随机跳跃强度与期权隐含风险溢价 [J]. *管理科学学报*, 2018, 21(4): 28–42.
Chen Miaoxin, Wu Chen. Stochastic jump intensity and option implied risk premiums [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2018, 21(4): 28–42. (in Chinese)
- [10] 张峥, 尚琼, 程祎. 股票停牌、涨跌停与 ETF 定价效率——基于上证 50ETF 日度数据的实证研究 [J]. *金融研究*, 2012, (1): 167–179.
Zhang Zheng, Shang Qiong, Cheng Yi. Stock suspension, price change and ETF pricing efficiency: An empirical study based on the data of Shanghai 50ETF daily degree [J]. *Journal of Financial Research*, 2012, (1): 167–179. (in Chinese)
- [11] 陈蓉, 廖木英, 徐婉菁. 期权隐含偏度风险溢价: 来自中国台湾市场的数据 [J]. *系统工程理论与实践*, 2016, 36(5): 1099–1108.
Chen Rong, Liao Muying, Xu Wanqing. The option-implied skewness risk premium: Evidence from Taiwan China market [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2016, 36(5): 1099–1108. (in Chinese)
- [12] Epstein L G, Wang T. Intertemporal asset pricing under Knightian uncertainty [J]. *Econometrica*, 1994, 62(2): 283–322.
- [13] Brenner L A, Griffin D W, Koehler D J. A case-based model of probability and pricing judgments: Biases in buying and selling uncertainty [J]. *Management Science*, 2012, 58(1): 159–178.
- [14] Suzuki M. Continuous-time smooth ambiguity preferences [J]. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2018, 90(1): 30–44.
- [15] Bianchi F, Ilut C L, Schneider M. Uncertainty shocks, asset supply and pricing over the business cycle [J]. *Review of Economic Studies*, 2018, 85(2): 810–854.
- [16] 韩立岩, 泮敏. 基于奈特不确定性随机波动率期权定价 [J]. *系统工程理论与实践*, 2012, 32(6): 1175–1183.
Han Liyan, Pan Min. Knight uncertainty based option pricing with stochastic volatility [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2012, 32(6): 1175–1183. (in Chinese)
- [17] 王春峰, 余思婧, 房振明, 等. 中国证券市场 Knight 不确定性度量及资产定价研究 [J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(5): 1116–1122.
Wang Chunfeng, Yu Sijing, Fang Zhenming, et al. Measuring Chinese stock Knightian uncertainty and its asset pricing analysis [J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2015, 35(5): 1116–1122. (in Chinese)
- [18] Yang C, Xie J, Yan W. Sentiment capital asset pricing model [J]. *International Journal of Digital Content Technology & Its Applications*, 2012, 6(3): 254–261.
- [19] Li J. Multi-period sentiment asset pricing model with information [J]. *International Review of Economics & Finance*, 2014, 34(1): 118–130.
- [20] 扈文秀, 刘刚, 张伟果, 等. 基于因素嵌入的非理性资产价格泡沫生成及膨胀演化研究 [J]. *中国管理科学*, 2016, 24(5): 31–37.
Hu Wenxiu, Liu Gang, Zhang Weiguo, et al. Study on evolution of irrational asset price bubble generation and expansion based on factor's embedded [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2016, 24(5): 31–37. (in Chinese)
- [21] 杨宝臣, 张涵. 技术分析、主体异质性与资产定价 [J]. *管理科学学报*, 2017, 20(6): 101–110.
Yang Baochen, Zhang Han. Technical analysis, agent heterogeneity and asset pricing [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2017, 20(6): 101–110. (in Chinese)
- [22] 王宗润, 陈曦, 邓松海. 结构性产品投资者感知风险与过度自信影响研究 [J]. *管理科学学报*, 2018, 21(3): 82–93.
Wang Zongrun, Chen Xi, Deng Songhai. Perceived risk and overconfidence of structured financial products investors [J].

- Journal of Management Sciences in China ,2018 ,21(3) : 82 -93. (in Chinese)
- [23]张 慧,聂秀山. Knight 不确定环境下欧式股票期权的最小定价模型 [J]. 山东大学学报(理学版) ,2007 ,42(11) : 121 -126.
Zhang Hui ,Nie Xiushan. Minimal pricing models of European stock options under Knight uncertainty [J]. Journal of Shandong University(Natural Science) ,2007 ,42(11) : 121 -126. (in Chinese)
- [24]Chen Z ,Larry Epstein. Ambiguity ,risk , and asset returns in continuous time [J]. Econometrica ,2002 ,70(4) : 1403 -1443.
- [25]张 慧. 条件 g -期望与相关风险测度 [J]. 山东大学学报(理学版) ,2005 ,40(3) : 34 -40.
Zhang Hui. Conditional g -expectation and coherent risk measures [J]. Journal of Shandong University (Natural Science) ,2005 ,40(3) : 34 -40. (in Chinese)
- [26]Epstein L G ,Schneider M. Ambiguity ,information quality and asset pricing [J]. Journal of Finance ,2008 ,63(1) : 197 -228.
- [27]Easley D ,O'Hara M. Liquidity and valuation in an uncertain world [J]. Journal of Financial Economics ,2010 ,97(1) : 1 -11.

Pricing interval of European options under Knightian uncertainty

HE Chao-lin , WANG Peng , LIU Meng

School of Management Engineering , Anhui Polytechnic University , Wuhu 241000 , China

Abstract: A new model is proposed to price European options under Knightian uncertainty by introducing a grade parameter into the Black-Scholes option pricing model to measure the degree of Knightian uncertainty in the financial market. The paper defines the grade parameter as the measurement of Knight uncertainty through setting the feasible control set , gives the uncertainty's dual measurement through the capacity of feasible region , and constructs the pricing interval of European call and put options based on the Black-Scholes option model. The backward stochastic differential equation (BSDE) is used to obtain the expression of pricing interval. An empirical study based on the daily returns of SSE 50ETF options , which were listed on February 9 , 2015 , is conducted and the results are compared with Black-Scholes option pricing. The results show that , under the environment of Knightian uncertainty , the option's equilibrium price is a pricing interval instead of a certain value. The higher the spot price of the options' underlying asset , the larger the pricing interval; the longer the maturity , the larger the pricing interval. Further , the pricing interval increases with the the degree of Knightian uncertainty. The study shows that the existence of Knightian uncertainty reduces market liquidity , which endogenously explains the puzzle of "non-market participation" , exogenously demonstrates the characteristic of "limited market participation" , and offers a reference for investor's decision and an empirical evidence for finance supervision.

Key words: Black-Scholes option pricing model; pricing of European options; Knightian uncertainty; grade parameter; pricing interval