

双目标用户均衡下的交通流逐日动态演化模型^①

徐 薇, 马箫宇, 徐红利

(南京大学工程管理学院, 南京 210093)

摘要: 时间和费用是出行者在路径选择时关注的两个重要目标,许多研究将两者加权组合为单目标来考虑,存在一定缺陷.在静态交通分配模型的研究中,已有学者提出将两者分开考虑的双目标用户均衡.然而,在动态交通分配模型中,现有研究仍多以传统的单目标用户均衡作为交通流演化的最终状态.因此,本文针对双目标用户均衡,提出了一种新的基于路径流量更新的交通流逐日动态演化模型.假设出行者在每天的路径选择中会将出行时间和收费分开比较以决定是否变换路径.论文从理论上证明了该模型的收敛性,以及交通流演化的最终状态会达到双目标用户均衡,同时数值算例也验证了模型的有效性.

关键词: 逐日动态; 交通流演化; 双目标用户均衡; 收敛性

中图分类号: F713.36 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2020)07-0116-11

0 引 言

自 1952 年 Wardrop 提出用户均衡(user equilibrium, UE) 概念开始,关于交通网络均衡分配的研究就一直在不断发展深入,推动着交通科学的发展.静态交通分配模型通常只关注交通系统平衡稳定的最终状态,而动态交通分配模型则刻画交通流从非平衡状态到平衡状态的演化过程.现实中,由于出行者每天的出行选择都可能会受到过往出行经验和当前网络状态的影响而发生改变,因此交通流的分布状态是振荡变化的.对交通流逐日动态(day-to-day dynamics) 演化过程的研究有利于探索交通流演变的内在机制,更好地实现交通诱导和对交通网络流状态的控制.

在现有的交通流逐日动态演化研究中,大多数模型假设出行者根据前一天的道路通行时间来选择当天的出行路径,从而将相邻两天同一路径/路段上的流量更新描述为当天路网状态(如路径/路段通行时间)的一个函数.现有文献中基于

路径流量更新的模型较多, Yang 和 Zhang^[1]总结了五类模型,分别是: the simplex gravity flow dynamics^[2], the proportional-switch adjustment process (PSAP)^[3], the network tatonnement process^[4], the projected dynamical system^[5], 以及 the evolutionary traffic dynamics^[6]. 这些模型都假设系统的最终稳定状态是确定的 UE. 在此基础上,很多学者进行了拓展研究,例如考虑: 有限理性^[7,8]、参考点依赖^[9]、弹性需求^[10]、随机用户均衡^[11,12]、混合均衡^[13]、路径成本敏感性^[14]、路径剩余容量^[15]、诱导信息^[16,17]、社会交互^[18]、交通事件影响^[19]等. 由于路径流量不易观测且存在路径重叠和枚举量大的问题, He 等^[20]最早提出了直接基于路段流量更新的逐日动态演化模型. Han 和 Du^[21]进一步研究了该模型的一些性质,如不变集和限制稳定性. Guo 等^[22,23]给出了一种基于路段的逐日动态演化的一般框架,并且证明了一些已有模型(例如文献[4,5,20,21]提出的模型)均为该一般框架的特例.此外,在基于路

① 收稿日期: 2018-07-24; 修订日期: 2020-01-07.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71671087; 71571097).

作者简介: 徐 薇(1979—),女,江苏如东人,博士,副教授. Email: xuwei@nju.edu.cn

段的模型中,也有学者考虑了出行时间不确定性和出行者风险行为^[24]、道路容量退化^[25]等. Xiao等^[26]还将逐日交通网络动态演化过程看作是一种物理系统,探究了其中的内在规律.

道路收费是交通诱导和控制的一种重要手段,在交通流逐日动态分配模型的研究中有不少引入了道路收费策略,例如 Tan等^[27]、Guo等^[28]、Han等^[29]、Liu等^[30]、Xu等^[31]、Rambha和Boyles^[32]等. 这些研究均假设出行者将道路通行时间与收费组合为广义出行成本来考虑路径选择,即最小化广义出行成本. 然而,将道路出行时间和收费组合考虑会使二者之间具有某种潜在的转换与互补关系. Dial^[33]较早考虑多目标交通配流问题时就将两者进行了线性组合,而近来 Wang和Ehrgott^[34]则真正将道路通行时间和收费分开考虑,定义了双目标用户均衡(bi-objective UE, BUE),即达到均衡时出行者无法通过单方面改变路径选择来降低其出行时间或收费. 若出行者是理性的,则可以证明达到 BUE 时任何被使用的路径都是占优路径(也称有效路径). 这些有效路径包含了 Dial^[33]在其研究中定义的所有有效路径,因此 BUE 更具有一般性. 然而,已有的同时考虑道路通行时间和收费的交通流逐日动态演化模型最终均收敛至广义出行成本下的单目标用户均衡,尚无研究对上述双目标用户均衡给出交通流的动态演化过程. 因此,本文提出一种新的基于路径流量更新的逐日动态演化模型,假设出行者在逐日的路径选择中将路径出行时间和收费分开比较以决定是否变换路径,可以证明该演化模型最终收敛的稳定状态恰好是 BUE. 本文严格证明了模型的收敛性,并用数值算例验证了模型的有效性.

1 模型

1.1 符号定义和假设

考虑一个具有 N 个节点, L 条直接相连的路段构成的交通网络 $G(N, L)$. 令 W 是网络中所有 OD 对的集合, P_w 是连接 OD 对 $w \in W$ 的所有路径的集合. 本文研究假设所有 OD 对之间的出行需求是固定的,表示为向量 $d = (d_w, w \in W)^T$,

其中 d_w 为 OD 对 $w \in W$ 之间的出行需求. 路径流量表示为向量 $f = (f_p, p \in P_w, w \in W)^T$, 其中 f_p 是路径 $p \in P_w$ 上的流量. 路段流量表示为向量 $x = (x_a, a \in L)^T$, 其中 x_a 是路段 $a \in L$ 上的流量. 令 $\Delta = (\delta_{a,p}, a \in L, p \in P_w, w \in W)$ 表示路段-路径关联矩阵, 其中 $\delta_{a,p} = 1$ 表示路段 a 位于路径 p 上; 否则, $\delta_{a,p} = 0$. 显然, $x = \Delta f$. 令 $\Theta = (\theta_{p,w}, p \in P_w, w \in W)$ 表示 OD-路径关联矩阵, 其中 $\theta_{p,w} = 1$ 表示路径 p 连接 OD 对 w ; 否则, $\theta_{p,w} = 0$. 显然, $d = \Theta f$. 因此,可行路段流量和路径流量的集合为 $\Omega = \{(x, f) \mid x = \Delta f, d = \Theta f, f \geq 0\}$.

本文考虑可分的路段出行时间函数,即路段 a 上的通行时间只与该路段上的流量 x_a 相关,与其他路段的流量无关. 并且假设该函数连续可微,关于路段流量 x_a 严格递增. 另外,假设路段收费与流量无关. 用 m_a 和 t_a 分别表示路段 a 上的收费和通行时间, m_p 和 t_p 分别表示路径 p 上的收费和通行时间.

1.2 双目标用户均衡(BUE)

本文同时考虑时间和费用两个属性下的出行者路径选择行为. 在双目标用户均衡下,出行者总是尽可能地选择通行时间短并且通行费用低的路径^[33]. 文献[33, 34]中给出了 BUE 的严格定义,为参考方便这里复述如下.

定义 1 当交通网络流量分布达到 BUE 时,所有被使用的路径都是有效的.

定义 2 令 $f \in \Omega$ 是一个可行路径流量分布, $m_p(f)$ 和 $t_p(f)$ 分别为路径 $p \in P_w$ 上的收费和通行时间, 则

1) 如果不存在路径 $p' \in P_w$, 满足 $m_{p'}(f) \leq m_p(f)$ 和 $t_{p'}(f) \leq t_p(f)$ 中至少有一个不等式是严格不等式, 则路径 $p \in P_w$ 是有效的.

2) 如果 $m_{p'}(f) \leq m_p(f)$ 和 $t_{p'}(f) \leq t_p(f)$ 中至少有一个不等式是严格不等式, 则路径 p' 占优路径 p , 且成本向量 $(t_{p'}(f), m_{p'}(f))$ 占优 $(t_p(f), m_p(f))$.

显然,由定义 2 可知,一条路径是有效的当且仅当这条路径不被其他的任何路径占优.

1.3 逐日动态演化模型

经典的逐日动态演化模型——PSAP 模型由

Smith^[3]提出,该模型描述了在出行时间较长的路径上的出行者会在下一天转移到其他的出行时间较短的路径上,且转换的比率是和该路径与其他较短时间路径的时间成本差成比例的.假设在一个OD对中, p 和 q 分别表示该OD对 $w \in W$ 之间的不同路径,则路径 p 上的流量变化率定义为

$$\dot{f}_p = \sum_{q \in P_w} (f_q [t_q(f) - t_p(f)]_+ - f_p [t_p(f) - t_q(f)]_+)$$

其中 $[x]_+ = \max\{0, x\}$.

上述模型是基于连续时间的,文献[20]中则提到了PSAP的离散形式,具体如下

$$f_p(n+1) - f_p(n) = \frac{1}{T_w(n)} \sum_{q \in P_w} (f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+ - f_p(n) [t_p(n) - t_q(n)]_+)$$

其中 $T_w(n) = \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} [t_p(n) - t_q(n)]_+ + M$

这里 $T_w(n)$ 可以视为一个离散化的步长; M 是一个参数,在取值较大时意味着出行者更愿意保持原来的路线.

以上是基于传统单目标UE的逐日动态演化模型.本文从双目标用户均衡的路径选择决策规则出发,依据PSAP的思想,对相邻两天路径流量的变化调整给出了如下的定义.

定义3 基于双目标用户均衡的逐日动态演化模型定义为

$$f_p(n+1) - f_p(n) = \frac{\lambda(n)}{T_w(n)} \sum_{q \in P_w} (f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+ * [m_q - m_p]_+ - f_p(n) [t_p(n) - t_q(n)]_+ * [m_p - m_q]_+) \quad (1)$$

其中运算符“*”定义为

$$[a]_+ * [b]_+ = \begin{cases} [a]_+ + [b]_+ & \text{如果 } a \geq 0, b \geq 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

并且

$$T_w(n) = \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} \{ [t_p(n) - t_q(n)]_+ * [m_p - m_q]_+ \} + 1$$

这里 $T_w(n)$ 可以保证 $f_p(n+1)$ 非负,且作为分母不为零; $\lambda(n) \in (0, 1]$ 是调整系数,在现实中,它代表愿意调整路径的出行者所占的比例. $\lambda(n)$ 取值越小,表示有调整路径意愿的出行者

越少,即更多的人愿意保持原来的出行路径.后文会详细讨论 $\lambda(n)$ 的取值.由运算符“*”的定义,式(1)表示只有当路径的时间成本和金钱成本均不增加且至少有一个减少时,出行者才可能改变路径选择,符合BUE下的路径选择决策规则.

2 稳定点和收敛性分析

2.1 稳定点与BUE解的等价性

文献[34]的研究已经表明,BUE解不唯一,令BUE的解集集合为 \mathbf{B} .

定理1 如果路径流量分布 $f(n)$ 是演化模型(1)的稳定点,则 $f(n)$ 是BUE解,即 $f(n) \in \mathbf{B}$.

证明 显然,演化模型(1)的稳定点满足

$$[t_p - t_q]_+ * [m_p - m_q]_+ = 0, \quad \forall f_p, f_q > 0, p, q \in P_w$$

因此要证明稳定点 $f(n)$ 是BUE解,即需要证明所有流量大于零 ($f_p(n) > 0$) 的路径是有效路径.

采用反证法.假设存在流量大于零的路径 p 不是有效路径,即存在路径 p' 占优路径 p ,那么由定义2可得, $t_{p'}(n) \leq t_p(n)$ 和 $m_{p'} \leq m_p$ 成立,且至少有一个是严格不等式.那么, $[t_p(n) - t_{p'}(n)]_+ * [m_p - m_{p'}]_+ > 0$,此时 $f(n+1) \neq f(n)$,即 $f(n)$ 不是稳定点,与假设矛盾.因此,如果 $f(n)$ 是稳定点,则 $f(n) \in \mathbf{B}$.

2.2 演化模型的收敛性

考虑文献[34]中的优化问题(23),具体如下

$$\begin{aligned} \min W(f) &= \sum_{a \in L} \int_0^{x_a} t_a(w) dw + \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} f_p g(m_p) \\ \text{s. t. } \sum_{p \in P_w} f_p &= d_w, \forall w \in W \\ f_p &\geq 0, \forall p \in P_w \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是关于收费的严格递增函数,由时间和金钱的无差异曲线决定.无差异曲线(indifference curve)是经济学中的一个概念,它是一条表示给消费者相同满足程度的商品组合的曲线.本文研究中的无差异曲线考虑时间和金钱的不同组合,即在同一条无差异曲线上,虽然不同的点表

示不同的时间和金钱组合,但是这些点对于出行者来说感受到的效用是相同的.例如在图 1 给出的无差异曲线示意图上,假设 A 点代表出行时间为 30 min、收费为 20 元的路径,B 点代表出行时间为 60 min、收费为 10 元的路径,那么对于符合此无差异曲线的出行者来说,路径 A 和路径 B 对他们的吸引力是相同的.由文献 [34]可知,给定任意一个函数 g (即给定任意一个无差异曲线),上述优化问题是一个严格凸优化,其最优解对应的路径流量分布 f^* 是一个 BUE 解.

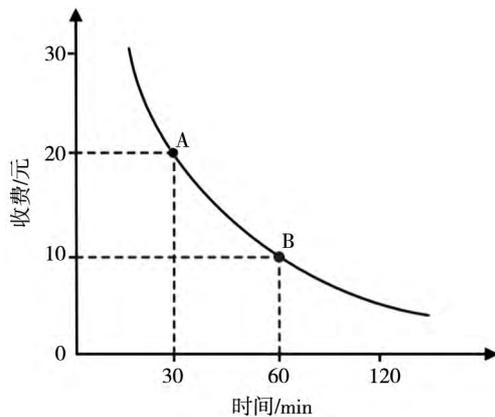


图 1 无差异曲线示意图
Fig. 1 Indifference curve

如果在由定义 3 给出的逐日动态演化过程中,对任意的 $n, f(n) \notin \mathbf{B}$, 以及任意严格递增函数 g , 都有 $W(f(n)) > W(f(n+1))$ 成立,那么该演化过程一定会收敛到某个函数 g 对应的优化问题(2)的最优解,即某个 BUE 解.因此,接下来将证明存在适当的调整系数 $\lambda(n)$,使得定义 3 给出的演化过程满足 $W(f(n))$ 单调下降.

引理 1 在定义 3 下,对任意 $f(n) \notin \mathbf{B}$, 总有 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) \leq 0$, 以及 $m^T(f(n+1) - f(n)) \leq 0$ 成立.

(证明见附录)

定理 2 在定义 3 下,对任意 $f(n) \notin \mathbf{B}$,

- 1) 若 $f(n)$ 满足 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) < 0$ 则存在 $\lambda(n) \in (0, 1]$ 使得 $t(f(n+1))^T(f(n+1) - f(n)) \leq 0$, $\forall \lambda(n) \in (0, \lambda(n)] n = 1, 2, \dots$ (3) 成立,且对于任意的 $\lambda(n) \in (0, \lambda(n)] n = 1, 2, \dots$ 演化模型(1)可以收敛至 BUE 状态;
- 2) 若 $f(n)$ 满足 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) =$

0, 则存在 $\lambda(n) \rightarrow 0$, 使得演化模型(1)收敛至 BUE 状态.

证明 令

$$\begin{aligned} V(x(n+1)) &= V(\lambda(n)) \\ &= \sum_{a \in L} \int_0^{x_a(n+1)} t_a(w) dw \\ U(f(n+1)) &= U(\lambda(n)) \\ &= \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} f_p(n+1) g(m_p) \end{aligned}$$

则 $W(f) = V(x) + U(f)$.

分别对 $V(\lambda(n))$ 和 $U(\lambda(n))$ 关于 $\lambda(n)$ 求导,有

$$\begin{aligned} \frac{dV(\lambda(n))}{d\lambda(n)} &= \left(\frac{\partial V(x(n+1))}{\partial x(n+1)} \right)^T \frac{dx(n+1)}{d\lambda(n)} \times \\ \frac{df(n+1)}{d\lambda(n)} &= t(x(n+1))^T \Delta z(n) \\ \frac{dU(\lambda(n))}{d\lambda(n)} &= \left(\frac{\partial U(f(n+1))}{\partial f(n+1)} \right)^T \frac{df(n+1)}{d\lambda(n)} \\ &= g^T z(n) \end{aligned}$$

其中向量 $g = (g(m_p), p \in P_w, w \in W)$, $z(n) = df(n+1)/d\lambda(n)$. 由引理 1 知,对任意的 $n, f(n) \notin \mathbf{B}$, 有 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) \leq 0$, 因此下面分两种情况讨论.

1) 若 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) < 0$, 那么易得 $t(f(n))^T z(n) < 0$. 于是,当 $\lambda(n) = 0$ 时

$$\begin{aligned} \frac{dV(\lambda(n))}{d\lambda(n)} \Big|_{\lambda(n)=0} &= t(x(n))^T \Delta z(n) \\ &= t(f(n))^T z(n) < 0 \quad (4) \end{aligned}$$

由于对每条路段 $a \in L, t_a(x_a)$ 连续可微并且关于路段流量 x_a 严格递增,因此对于 $x \in \Omega$, $\nabla t(x)$ 是正定矩阵,即

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(\lambda(n))}{d\lambda(n)^2} &= (\Delta z(n))^T \nabla t(x(n+1))^T (\Delta z(n)) \\ &> 0 \quad (5) \end{aligned}$$

所以 $V(\lambda(n))$ 在 $\lambda(n) \in (0, 1]$ 上是严格凸函数.根据式(4)和式(5)可得,存在 $\bar{\lambda}(n) \in (0, 1]$ 使得下式成立.

$$\begin{aligned} \frac{dV(\lambda(n))}{d\lambda(n)} &= t(x(n+1))^T \Delta z(n) \\ &= t(f(n+1))^T z(n) \\ &\leq 0, \forall \lambda(n) \in (0, \bar{\lambda}(n)] \end{aligned}$$

即式(3)成立,并且 $V(0) > V(\lambda(n))$, 即 $V(x(n)) > V(x(n+1))$.

另根据引理 1, $m^T(f(n+1) - f(n)) \leq 0$ 且函数 g 是关于收费的严格递增函数, 因此, $g^T(f(n+1) - f(n)) \leq 0$ 也成立, 即

$$\frac{dU(\lambda(n))}{d\lambda(n)} = g^T z(n) \leq 0$$

综上, 存在适当的 $\lambda(n)$, 使得

$$\frac{dW(\lambda(n))}{d\lambda(n)} = \frac{dV(\lambda(n))}{d\lambda(n)} + \frac{dU(\lambda(n))}{d\lambda(n)} \leq 0$$

即 $W(f(n)) > W(f(n+1))$ 成立.

2) 若 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) = 0$, 则由定义 3 可知, 在第 n 天至第 $n+1$ 天的变化过程中, 人们只是从收费较高的路径调整到了收费更低但时间相同的路径上. 即存在路径 $p, q \in P_w$, $t_p(n) = t_q(n)$, $m_p > m_q$, 因此部分流量从 p 调整到 q . 调整后, 有 $t_p(n+1) < t_q(n+1)$, 且一定存在 $\lambda(n) \rightarrow 0$ 满足

$$\begin{cases} t_i(n+1) < t_p(n+1), \\ \forall i \in \{i \mid t_i(n) < t_p(n) = t_q(n), i \in P_w\} \\ t_j(n+1) > t_q(n+1), \\ \forall j \in \{j \mid t_p(n) = t_q(n) < t_j(n), j \in P_w\} \end{cases} \quad (6)$$

注意到该情形下式 (6) 中的路径 i 和路径 j 在第 $n+1$ 天是不发生流量变化的, 因此在第 $n+2$ 天仍然不会发生变化, 因为它们与其他路径的出行时间的大小关系未发生变化, 即 $f_i(n+2) = f_i(n+1)$, $f_j(n+2) = f_j(n+1)$. 又因为 $t_p(n+1) < t_q(n+1)$, $m_p > m_q$, 所以路径 p 和路径 q 之间也不再发生流量转换, 即 $f_p(n+2) = f_p(n+1)$, $f_q(n+2) = f_q(n+1)$. 综合可得, $f(n+2) = f(n+1)$ 成立. 此时收敛至稳定点, 即 BUE 状态.

显然, 当 $\lambda(n)$ 充分小时, 式 (3) 条件一定成立. 因此, 由上述证明可以直接推出下面的推论 1.

推论 1 在模型假设下, 如果 $\lambda(n) \rightarrow 0, n = 1, 2, \dots$, 那么演化模型 (1) 可以收敛至 BUE 状态.

值得注意的是, 如前文所提, 这里参数 $\lambda(n)$ 代表愿意调整路径的出行者所占的比例. $\lambda(n)$ 取值越小, 表示有调整路径意愿的出行者越少, 即更多的人愿意保持原来的出行路径. 现实中, 考虑到人的惯性行为, 可以预期随着系统演化过程时间的推移, 出行者会越来越地改变出行路径, 即 $\lambda(n)$ 会越来越小. 与此同时, 注意到 Ye 等^[35] 通过虚拟的路径选择实验对多个现有的以 Wardrop 用户均衡为稳定状态的逐日交通流演化模型进行

了验证性研究, 并给出了相应的参数估计. 实验结果显示, 在 Smith^[2] 给出的 SGFD (simplex gravity flow dynamics) 模型中, 由于分母 $\sum_{s \in R} [c_s^{(n)} - c_s^{(n)}]_+$ 的存在, 调整参数 α 成为一个时变参数, 其随时间逐渐减小. 本文模型 (1) 中的 $T_w(n)$ 和 $\lambda(n)$ 恰好分别与 SGFD 模型中的分母和参数 α 有相似的作用, 因而这也说明 $\lambda(n)$ 在现实中可以随时间的推移越来越小. 由此可见, 推论 1 中对模型的收敛性要求符合实际.

3 数值算例

本节将通过数值算例来检验上节中提出的模型, 其中 $\lambda(n)$ 的取值会根据推论 1 和定理 2 给出的如下两种策略来确定.

策略 1 调整系数 $\lambda(n)$ 取一个趋于 0 的固定值.

策略 2 当 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) = 0$ 时, 调整系数 $\lambda(n)$ 取一个趋于 0 的固定值; 当 $t(f(n))^T(f(n+1) - f(n)) < 0$ 时, 取 $\lambda(n) \in (0, 1]$ 满足

$$t(f(n+1))^T(f(n+1) - f(n)) \leq 0$$

以下算例中均采用 BPR (bureau of public roads) 路段行驶时间函数

$$t_a(x_a) = t_a^0 [1 + \beta (\frac{x_a}{C_a})^n]$$

其中 t_a^0 是路段 a 上的自由流时间; C_a 是路段 a 的容量; β 和 n 均为参数, 在以下算例中取值分别为 $\beta = 0.15, n = 4$.

3.1 算例 1

考虑如图 2 所示的一个三条平行路段的简单网络^[34], 表 1 给出了各路段的特征参数. 假设该 OD 对间的出行需求是 15 000 辆车/h.

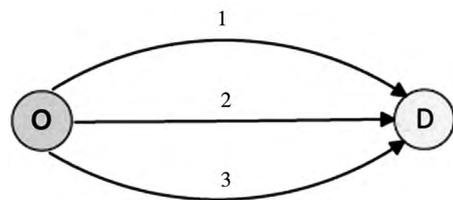


图 2 算例 1 网络

Fig. 2 Traffic network of example 1

表 1 算例 1 网络的路段特征参数

Table 1 Link characteristics of the network of example 1

路段序号	距离/km	t_a^0 /min	C_a /(辆/h)	收费/元
1	20	12	4 000	40
2	50	30	5 400	20
3	40	40	4 800	0

首先,使用策略 1,固定取 $\lambda = 0.001$. 图 3 展示了以任意可行流量为初始流量,按照演化模型(1)演化到 BUE 状态的过程.在图 3 中,横纵坐标分别为路径 1 和路径 2 的流量,圆点为起始点,方点为终止点,从圆点到方点之间的线条表示演化轨迹,方点连线围住的空白区域均为满足 BUE 的路径流量分布.可以看到,该算例的所有 BUE 解构成一个集合,未达 BUE 状态的流量分布会逐渐演化至 BUE 集合.

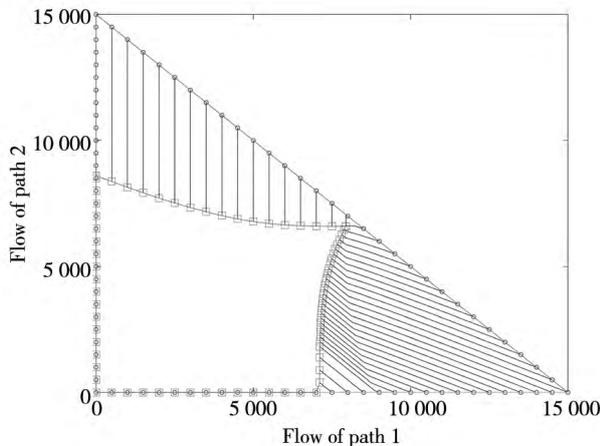


图 3 使用策略 1 取 $\lambda = 0.001$ 时,路径 1 和路径 2 上以任意可行流为起点的流量演化轨迹

Fig. 3 The trajectories of flows on path 1 and path 2 with any initial link flows in the feasible region and $\lambda = 0.001$

图 4 展示了使用策略 2 确定 $\lambda(n)$ 取值时的路径流量演化轨迹.同样地,图中圆点为起始点,方点为终止点,星点代表演化过程中的点,方点连线围住的空白区域均为 BUE 解集.由于策略 2 是一种自适应策略,因此从任意可行流量开始,只需要迭代相对较少的次数即可演化至 BUE 状态.和策略 1 相比,由于每天的调整系数不同,因此演化轨迹相对凌乱无规律.

根据 BUE 的定义,可推出该算例 BUE 解析解所满足的条件.表 2 列出了构成该算例 BUE 解集的 7 个子集.

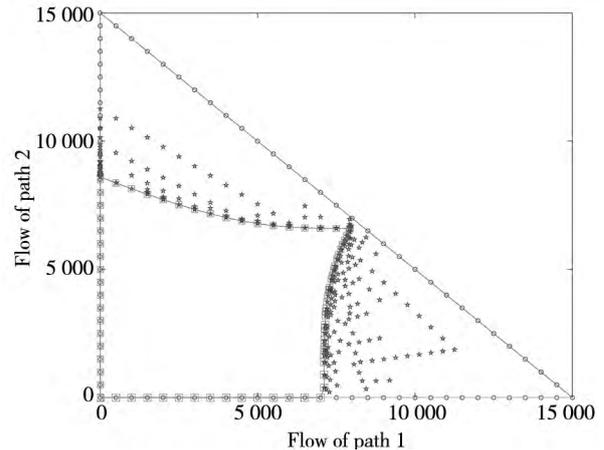


图 4 使用策略 2 确定 $\lambda(n)$ 时,路径 1 和路径 2 上以任意可行流为起点的流量演化轨迹

Fig. 4 The trajectories of flows on path 1 and path 2 with any initial link flows in the feasible region using strategy 2

表 2 算例 1 的 BUE 解析解

Table 2 The analytical solutions of BUE for example 1

BUE 子集	有效路径	路径流量满足条件	对应图 5 的区域
1	$f_1 f_2 f_3$	$\begin{cases} t_1(f_1) < t_2(f_2) \\ t_2(f_2) < t_3(f_3) \\ f_1 f_2 f_3 > 0 \end{cases}$	阴影区域 (不包含边界)
2	$f_2 f_3$	$\begin{cases} t_2(f_2) < t_3(f_3) \\ f_1 = 0, f_2 f_3 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f_1 = 0 \\ 0 < f_2 < 8\ 600.57 \end{cases}$
3	$f_1 f_3$	$\begin{cases} t_1(f_1) < t_2(f_2) \\ t_1(f_1) < t_3(f_3) \\ f_1 f_3 > 0, f_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f_2 = 0 \\ 0 < f_1 < 7\ 113.06 \end{cases}$
4	$f_1 f_2$	$\begin{cases} t_1(f_1) < t_2(f_2) \\ t_2(f_2) < t_3(f_3) \\ f_1 f_2 > 0, f_3 = 0 \end{cases}$	ϕ
5	f_3	$f_1 f_2 = 0, f_3 > 0$	$f_1 f_2 = 0$ (原点)
6	f_2	$\begin{cases} t_2(f_2) < t_3(f_3) \\ f_1 f_3 = 0, f_2 > 0 \end{cases}$	ϕ
7	f_1	$\begin{cases} t_1(f_1) < t_2(f_2) \\ t_1(f_1) < t_3(f_3) \\ f_2 f_3 = 0, f_1 > 0 \end{cases}$	ϕ

图 5 展示了表 2 中 7 个 BUE 子集的并集,即整个 BUE 解集(左下角阴影部分,不含上边界和右边界).这与前面图 3 和图 4 中方点连线围住的空白区域是一致的,故进一步验证了演化模型(1)收敛到 BUE 集合.

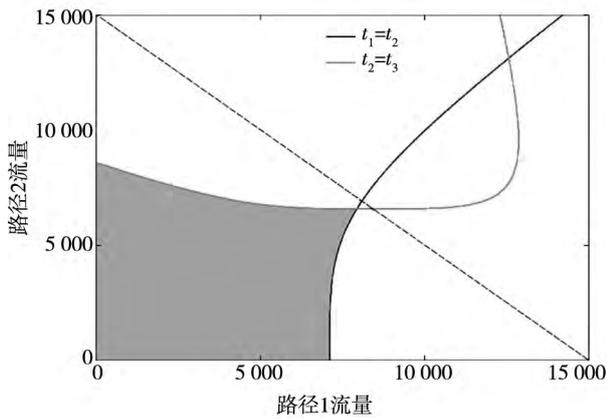


图5 算例1的BUE解集

Fig. 5 The BUE set of example 1

3.2 算例2

算例1中的交通网络较为简单和特殊,即路段和路径是一样的.下面考虑如图6所示的交通网络^[34],该网络具有4个结点、8条路段和6条路径.该网络的路段和路径特征参数分别由表3和表4给出.注意到路径1和路径2是直达路径,路径1是行驶时间最短但收费最多的路径,而路径6是唯一不收费但却最慢的路径.OD对间的出行需求假设为10 000 辆车/h.

图7展示了使用策略1,取 $\lambda = 0.001$ 时,从不同初始可行流开始的流量演化过程.图7(a)的初始流量分布为 $f = [1\ 000, 2\ 000, 3\ 000, 1\ 000, 1\ 500, 1\ 500]$,图7(b)的初始流量分布为 $f = [2\ 700, 1\ 700, 2\ 500, 1\ 000, 800, 1\ 300]$.可以看到当初始流量分布不同时,流量的演化过程不同,最终的收敛结果也不同,分别为 $f^* = [1\ 000, 2\ 000, 1\ 997, 1\ 997, 1\ 458, 1\ 548]$ 和 $f^* = [2\ 700, 1\ 700, 1\ 750, 1\ 750, 800, 1\ 300]$.可以验证这两个最终流量分布都满足BUE条件.

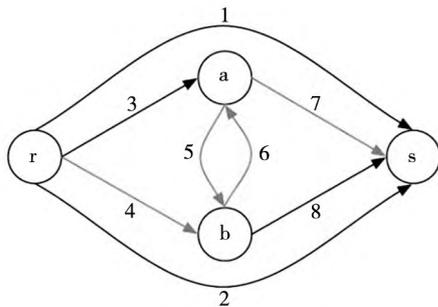


图6 算例2网络

Fig. 6 The network of example 2

表3 算例2网络的路段特征参数

Table 3 Link characteristics of the network of example 2

路段序号	距离/km	自由流时间/min	容量/(辆/h)	收费/元
1	30	18.0	3 600	20
2	30	22.5	3 600	15
3	10	12.0	1 800	1
4	20	24.0	1 800	0
5	2	2.4	1 800	0
6	5	6.0	1 800	0
7	20	24.0	1 800	0
8	10	12.0	1 800	1

表4 算例2网络的路径特征参数

Table 4 Path characteristics of the network of example 2

路径序号	路径构成	距离/km	自由流时间/min	收费/元
1	1	30	18.0	20
2	2	30	22.5	15
3	3-7	30	36.0	1
4	4-8	30	36.0	1
5	3-5-8	22	26.4	2
6	4-6-7	45	54.0	0

图8展示了初始流量为 $f = [1\ 000, 2\ 000, 3\ 000, 1\ 000, 1\ 500, 1\ 500]$,使用策略2确定 $\lambda(n)$ 时的演化过程,此时最终流量为 $f^* = [1\ 000, 2\ 000, 1\ 980, 1\ 980, 1\ 435, 1\ 605]$,同样容易验证该流量分布中所有被使用的路径均不被其他任何路径占优,因此也是一个BUE解.另外,对比图7(a)和图8可以发现,使用策略2比使用策略1收敛速度快很多.

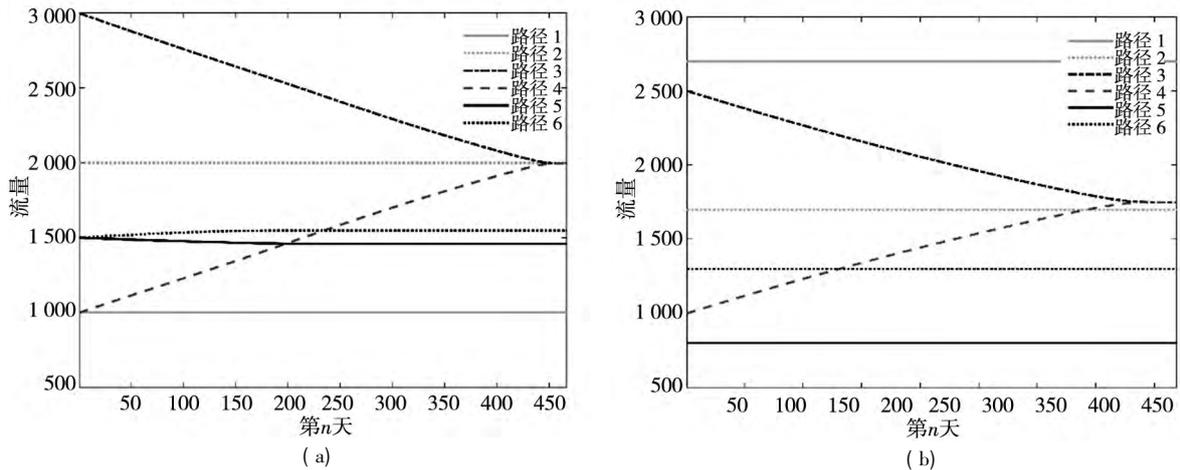


图 7 使用策略 1 取 $\lambda = 0.001$ 时, 从不同初始可行流开始的路径流量演化过程
 Fig. 7 Path flow evolution from two initial feasible flow patterns using strategy 1 ($\lambda = 0.001$)

4 结束语

本文将出行时间和道路收费分开考虑, 提出了一种基于双目标用户均衡的逐日动态演化模型. 对该演化模型证明了其收敛性以及模型的稳定点与 BUE 解的等价性, 并通过数值算例验证了模型的合理性和有效性. 依据本文提出的动态演化模型, 从任意初始流量分布开始, 最终都能演化到某个 BUE 分布. 如果考虑所有可能的初始解, 则可以得到所有的 BUE 解. 但是, 由于 BUE 解集本身包含一些较为极端的、不合理的流量分布, 因此未来研究将考虑对模型进行一些修正, 使之仅收敛到合理的 BUE 分布. 此外, 还可进一步研究 BUE 解集的性质, 尝试通过收费或其他管理策略

来提升效率, 使交通系统演化到系统最优状态.

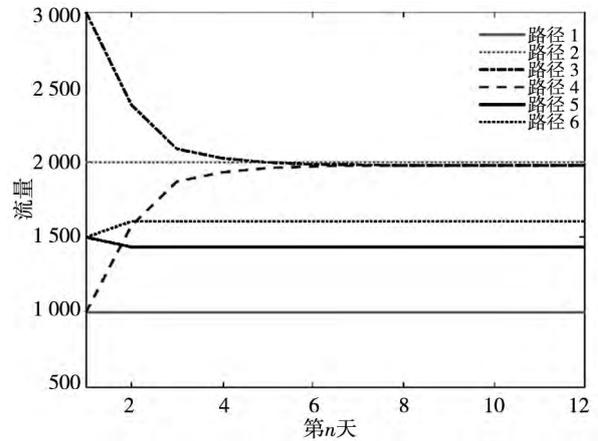


图 8 使用策略 2 确定 $\lambda(n)$ 时的路径流量演化过程
 Fig. 8 Path flow evolution when using strategy 2 to determine $\lambda(n)$

参考文献:

[1] Yang F, Zhang D. Day-to-day stationary link flow pattern [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2009, 43 (1): 119 - 126.
 [2] Smith M J. The existence and calculation of traffic equilibria [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 1983, 17 (4): 291 - 303.
 [3] Smith M J. The stability of a dynamic model of traffic assignment: An application of a method of lyapunov [J]. Transportation Science, 1984, 18(3): 245 - 252.
 [4] Friesz T H, Bernstein D, Mehta N, et al. Day-to-day dynamic network disequilibria and idealized traveler information systems [J]. Operations Research, 1994, 42(6): 1120 - 1136.
 [5] Zhang D, Nagurney A. On the local and global stability of a travel route choice adjustment process [J]. Transportation Re-

- search Part B: Methodological ,1996 ,30(4) : 245 – 262.
- [6]Sandholm W H. Potential games with continuous player sets [J]. Journal of Economic Theory ,2001 ,97(1) : 81 – 108.
- [7]刘诗序,关宏志. 出行者有限理性下的逐日路径选择行为和网络交通流演化 [J]. 土木工程学报,2013 ,46(12) : 136 – 144.
Liu Shixu ,Guan Hongzhi. Travelers' day-to-day route-choice behavior and evolution of network traffic flow based on bounded rationality [J]. China Civil Engineering Journal ,2013 ,46(12) : 136 – 144. (in Chinese)
- [8]李 涛,关宏志,梁科科. 有限理性视野下网络交通流逐日演化规律研究 [J]. 物理学报,2016 ,65(15) : 11 – 21.
Li Tao ,Guan Hongzhi ,Liang Keke. Day-to-Day dynamical evolution of network traffic flow under bounded rational view [J]. Acta Physica Sinica ,2016 ,65(15) : 11 – 21. (in Chinese)
- [9]娄 路,孙会君. 基于参考点的逐日交通流演化研究 [J]. 山东科学,2018 ,31(1) : 65 – 71.
Lou Lu ,Sun Huijun. Research on the day-to-day evolution model for traffic flow based on reference point [J]. Shandong Science ,2018 ,31(1) : 65 – 71. (in Chinese)
- [10]刘诗序,陈文思,池其源,等. 弹性需求下的网络交通流逐日动态演化 [J]. 物理学报,2017 ,66(6) : 8 – 22.
Liu Shixu ,Chen Wensi ,Chi Qiyuan , et al. Day-to-day dynamical evolution of network traffic flow with elastic demand [J]. Acta Physica Sinica ,2017 ,66(6) : 8 – 22. (in Chinese)
- [11]Cantarella G E ,Watling D P. A general stochastic process for day-to-day dynamic traffic assignment: Formulation , asymptotic behaviour , and stability analysis [J]. Transportation Research Part B: Methodological ,2016 ,92: 3 – 21.
- [12]杨文娟,郭仁拥,李 琦. 基于随机用户均衡的交通配流演化动态系统模型 [J]. 系统工程理论与实践,2015 ,35(12) : 3192 – 3200.
Yang Wenjuan ,Guo Renyong ,Li Qi. A dynamical system model of formulating day-to-day traffic assignment based on stochastic user equilibrium [J]. Systems Engineering: Theory & Practice ,2015 ,35(12) : 3192 – 3200. (in Chinese)
- [13]Zhou B ,Xu M ,Meng Q , et al. A day-to-day route flow evolution process towards the mixed equilibria [J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies ,2017 ,82: 210 – 228.
- [14]Kumar A ,Peeta S. A day-to-day dynamical model for the evolution of path flows under disequilibrium of traffic networks with fixed demand [J]. Transportation Research Part B: Methodological ,2015 ,80: 235 – 256.
- [15]黄中祥,江向军,伍建辉. 价格 – 数量调节网络交通流演化模型 [J]. 管理科学学报,2017 ,20(8) : 102 – 111.
Huang Zhongxiang ,Jiang Xiangjun ,Wu Jianhui. An evolution model for network traffic flow based on price-quantity regulation [J]. Journal of Management Sciences in China ,2017 ,20(8) : 102 – 111. (in Chinese)
- [16]徐红利,于新莲,周 晶. 诱导信息下考虑路段容量退化的流量演化研究 [J]. 管理科学学报,2015 ,18(7) : 39 – 47.
Xu Hongli ,Yu Xinlian ,Zhou Jing. Day-to-day travel choice dynamics with guidance information in degradable transport network [J]. Journal of Management Sciences in China ,2015 ,18(7) : 39 – 47. (in Chinese)
- [17]Zhao X ,Wan C ,Bi J. Day-to-day assignment models and traffic dynamics under information provision [J]. Networks and Spatial Economics ,2019 ,19(2) : 473 – 502.
- [18]Wei F ,Jia N ,Ma S. Day-to-day traffic dynamics considering social interaction: From individual route choice behavior to a network flow model [J]. Transportation Research Part B: Methodological ,2016 ,94: 335 – 354.
- [19]陈玲娟,王殿海,刘玲丽. 交通事件影响下路网逐日出行动态可靠性 [J]. 交通运输系统工程与信息,2017 ,17(5) : 97 – 103.
Chen Lingjuan ,Wang Dianhai ,Liu Lingli. Dynamic reliability of day-to-day network under incident [J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology ,2017 ,17(5) : 97 – 103. (in Chinese)
- [20]He X ,Guo X ,Liu H X. A link-based day-to-day traffic assignment model [J]. Transportation Research Part B: Methodological ,2010 ,44(4) : 597 – 608.

- [21] Han L , Du L. On a link-based day-to-day traffic assignment model [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2012 , 46(1) : 72 – 84.
- [22] Guo R Y , Yang H , Huang H J. A discrete rational adjustment process of link flows in traffic networks [J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* , 2013 , 34: 121 – 137.
- [23] Guo R Y , Yang H , Huang H J , et al. Link-based day-to-day network traffic dynamics and equilibria [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2015 , 71: 248 – 260.
- [24] Lou X , Cheng L. Consider travelers' risk-taking behaviors in a day-to-day dynamic evolution model [J]. *Transportation Research Record Journal of the Transportation Research Board* , 2016 , 2565(1) : 27 – 36.
- [25] Gao B , Zhang R , Lou X. Modeling day-to-day flow dynamics on degradable transport network [J]. *PLoS One* , 2016 , 11(12) : e0168241.
- [26] Xiao F , Yang H , Ye H. Physics of day-to-day network flow dynamics [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2016 , 86: 86 – 103.
- [27] Tan Z , Yang H , Guo R-Y. Dynamic congestion pricing with day-to-day flow evolution and user heterogeneity [J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* , 2015 , 61: 87 – 105.
- [28] Guo R-Y , Yang H , Huang H J , et al. Day-to-day flow dynamics and congestion control [J]. *Transportation Science* , 2016 , 50(3) : 982 – 997.
- [29] Han L , Wang D Z W , Lo H K , et al. Discrete-time day-to-day dynamic congestion pricing scheme considering multiple equilibria [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2017 , 104: 1 – 16.
- [30] Liu Z , Wang S , Zhou B , et al. Robust optimization of distance-based tolls in a network considering stochastic day to day dynamics [J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* , 2017 , 79: 58 – 72.
- [31] Xu M , Meng Q , Huang Z. Global convergence of the trial-and-error method for the traffic-restraint congestion-pricing scheme with day-to-day flow dynamics [J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* , 2016 , 69: 276 – 290.
- [32] Rambha T , Boyles S D. Dynamic pricing in discrete time stochastic day-to-day route choice models [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2016 , 92: 104 – 118.
- [33] Dial R B. A model and algorithm for multicriteria route-mode choice [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 1979 , 13(4) : 311 – 316.
- [34] Wang J Y T , Ehrgott M. Modelling route choice behaviour in a tolled road network with a time surplus maximisation bi-objective user equilibrium model [J]. *Transportation Research Part B: Methodological* , 2013 , 57: 342 – 360.
- [35] Ye H , Xiao F , Yang H. Exploration of day-to-day route choice models by a virtual experiment [J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* , 2018 , 94: 220 – 235.

A day-to-day traffic dynamic model with bi-objective user equilibrium

XU Wei , MA Xiao-yu , XU Hong-li

School of Management and Engineering , Nanjing University , Nanjing 210093 , China

Abstract: Travel time and toll cost are two important objectives that travelers want to optimize when choosing a path. Many studies consider these two as a single objective by combining them in linear or nonlinear ways , which has certain defects proved by some researchers. In the studies of static traffic assignment model , some studies have proposed the bi-objective user equilibrium (BUE) which considers travel time and toll cost sepa-

rately. However, most studies of dynamic traffic assignment model still consider the traditional single objective user equilibrium as the final stable state of traffic flow evolution. Therefore, a new path-based day-to-day dynamic model with BUE is proposed, assuming that travelers compare the travel time and toll cost separately to decide whether to switch paths each day. The equivalence between the stable state of the proposed dynamic model and BUE state, as well as the convergence of the dynamic model are theoretically proved. Two numerical examples are conducted to verify the effectiveness of the proposed model.

Key words: day-to-day dynamics; traffic flow evolution; bi-objective user equilibrium; convergence

附录:

引理 1 证明

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}(\mathbf{f}(n))^T(\mathbf{f}(n+1) - \mathbf{f}(n)) &= \sum_{p \in P_w} t_p(n) (f_p(n+1) - f_p(n)) \\
 &= \frac{\lambda(n)}{T(n)} \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} (t_p(n) (f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+^* [m_q - m_p]_+ - f_p(n) [t_p(n) - t_q(n)]_+^* \\
 &\quad [m_p - m_q]_+)) \\
 &= \frac{\lambda(n)}{T(n)} \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} (t_p(n) f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+^* [m_q - m_p]_+ - t_q(n) f_p(n) [t_p(n) - t_q(n)]_+^* \\
 &\quad [m_q - m_p]_+) \\
 &= \frac{\lambda(n)}{T(n)} \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} (f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+^* [m_q - m_p]_+) (t_p(n) - t_q(n)) \leq 0 \\
 \\
 \mathbf{m}^T(\mathbf{f}(n+1) - \mathbf{f}(n)) &= \sum_{p \in P_w} m_p (f_p(n+1) - f_p(n)) = \frac{\lambda(n)}{T(n)} \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} (m_p (f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+^* [m_q - m_p]_+ - \\
 &\quad f_p(n) [t_p(n) - t_q(n)]_+^* [m_p - m_q]_+)) \\
 &= \frac{\lambda(n)}{T(n)} \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} (m_p f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+^* [m_q - m_p]_+ - \\
 &\quad m_q f_p(n) [t_p(n) - t_q(n)]_+^* [m_q - m_p]_+) \\
 &= \frac{\lambda(n)}{T(n)} \sum_{p \in P_w} \sum_{q \in P_w} (f_q(n) [t_q(n) - t_p(n)]_+^* [m_q - m_p]_+) (m_p - m_q) \leq 0
 \end{aligned}$$