基于过度外推的资产定价①

彭 涓[1]，母从明[2*]，朱小能[1,3]，杨金强[1,3]
(1. 上海财经大学金融学院，上海 200433; 2. 湖南大学金融与统计学院，长沙 410082;
3. 上海国际金融与经济研究院，上海 200433)

摘要: 基于卢卡斯纯交换经济模型和部分信息假设，研究了消费者在学习过程中表现的过度外推信念偏差对市场均衡和资产价格的影响. 研究发现基于较低的风险厌恶系数，代表性消费者的过度外推信念偏差不但降低了无风险利率，而且提高了风险溢价和风险资产收益率的波动性. 因此，研究结论在统一的框架内为"股权溢价之谜"、"利率之谜"和"波动之谜"提供了理论解释。

关键词: 过度外推; 股权溢价之谜; 超常波动之谜; 利率之谜
中图分类号: F830.2 文献标识码: A 文章编号: 1007－9807(2020)08－0019－14

0 引 言

自 Mehra 和 Prescott[1] 在其开创性论文中提出著名的"股权溢价之谜"后，大量金融学家、经济学家前赴后继、费尽心思，试图彻底揭开这一谜团. 然而，随着研究的深入，学术界相继发现了"无风险利率之谜"和"超常波动之谜"[2,3]. 这两个新谜团的出现，进一步增加了学术界解决"股权溢价之谜"的难度，因为这三个谜团之间有着千丝万缕的关系. 很多试图解决这些谜团的理论常常顾此失彼，只能解释其一，不能解释其二. 就金融市场而言，无风险利率、风险溢价和市场波动是相互统一的有机整体，这意味着合理的资产定价理论应该具备同时解释三大谜团的能力. 理论上，无论是"股权溢价之谜"、"低利率之谜"还是"超常波动之谜"，无一例外都表明了基于标准的理性的代表性经济人的资产定价模型存在严重的不足和缺陷.

为了彻底揭开相关谜底，为实证研究的更多"异象"提供理论支撑和解释，大量金融学家和经济学家开始对传统的资产定价理论进行修正和完善. 修正和完善主要体现在三个方面: 第一个方面体现在对效用函数进行修正，这主要包括习惯形成偏好、递归效用函数、异质偏好以及模糊风险厌恶等[4-7]. 第二类则体现在经济结构或者市场结构方面，比如: Bansal 和 Yaron[8] 引入消费的长期风险; Croitoru 和 Lu[9] 假设了异质性的消费者; Barro[10] 在经济中考虑了罕见的经济灾难; Lu[11] 引入了投资者的有限能力; He 和 Krishnamurthy[12] 则引入金融中间机构. 第三类文献则通过扭曲个体对经济的认识，从个体的非理性行为出发研究了资产定价问题. 比如，Barberis 等[13] 基于具有异质性消费者的资产定价模型，研究了投资者对股票价格过度外推行为对资产价格和预测能力的影响. Glaeser 和 Nathanson[14] 则基于过度外推模型讨论了房地产价格的动态行为.

国内学者对资产定价研究也做出了杰出贡

① 收稿日期: 2018－04－19; 修订日期: 2018－09－07.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71473281; 71772112; 71972122); 霍英东教育基金会第十五届高等院校青年教师基金基础性研究课题资助项目(151086); 上海高峰学科资助项目(2018110261; 2018110262); 上海财经大学创新团队建设资助项目(2016110241; 2018110698); 博士后科学基金资助项目(2018M632075; 2018M640370; 2019T120325; 2020M672608).
通讯作者: 母从明(1982—)，男，四川长宁人，博士，副教授. Email: mucongming@sina.com

献. 比如,徐绪松和陈彦斌[15]、陈国进等[16]则分别将习惯形成与相对财富、灾害风险相结合,构建了相应的资本资产定价模型. 国内众多学者也通过引入异质性消费者研究了资产定价[17-19]. 吴卫星等[20]主要研究了投资者的非理性行为(过度自信)对资产价格的影响. 同时,国内学者更多地关注投资者情绪对资产价格的影响[19,21-23]. 但是,基于投资者过度外推行为研究资产定价的文献还比较少,而彭涓等[24]也仅将过度外推信念偏差应用于最优消费和投资组合问题.

虽然学术界提供了大量解释"股权溢价之谜"、"利率之谜"以及"波动之谜"的理论模型,但是它们都忽略了一个重要的特征事实,即个体不可能完全知晓影响资产价格的全部因素,即经济个体只能掌握经济社会的部分信息(partial information)而非全部信息. 因此,基于投资者部分信息的资产定价模型将更符合实际情况. 为此,从信息结构方面对经典的资产定价模型进行修正,研究代表性经济人在部分信息条件下表现的过多外推信念偏差对风险溢价、价格波动以及均衡利率的影响更具现实意义.

具体而言,借助于经典的纯交换经济模型,假设具有递归效用函数的代表性消费者可观测社会真实禀赋,但不可观测具有均值回复特性的禀赋增长率. 但是,消费者可以根据公开信息(即社会禀赋提供的信息)对禀赋增长率进行预测或者学习(learning). 在预测过程中,消费者表现出过度外推的信念偏差,即过高估计社会禀赋当前增长率的持续期. 随着消费者外推信念偏差的增加,其感知的经济不确定性越大. 为了承担额外的风险,代表性消费者要求更高的风险溢价作为回报. 为此,过度外推信念偏差有助于提高股权溢价. 除此之外,具有过度外推信念偏差的消费者既可能高估经济状态好的持续期,也可能高估经济状态差的持续期,于是放大了消费者感知的禀赋增长率波动性,从而放大了均衡条件下股票市场收益率的波动性. 同时,波动性的增加对均衡利率产生负面影响. 因此,基于部分信息结构,代表性消费者在学习过程中表现的过度外推信念偏差,不但可以推高股权溢价和收益率波动性,还能降低均衡的无风险利率. 所以,模型在统一的框架内,为"股权溢价之谜"、"利率之谜"以及"波动之谜"提供了新的理论解释,这是研究的主要贡献之一. 事实上,这种解决三个谜题的方式和思路与现有的资产定价模型具有很大的区别:基于部分信息结构,引入代表性消费者在学习过程中体现的过度外推信念偏差而扭曲其对经济环境的认知,进而研究过度外推信念偏差对均衡资产价格的影响. 这种研究方法丰富和扩展了现有的资产定价理论.

1 模型假设

在连续时间的纯交换经济中,代表性消费者具有如下的递归效用函数

$$V_t = \mathrm{E}_t\left[\int_t^{\infty} f(C_u, V_u)\,\mathrm{d}u\right] \tag{1}$$

其中 函数 $f(C,V)$ 是将消费 C 和效用 V 标准化的加总算子,并具有如下表达式

$$f(C,V) = \frac{\rho}{1-\psi^{-1}} \frac{C^{1-\psi^{-1}} - ((1-\gamma)V)^{\theta}}{((1-\gamma)V)^{\theta-1}} \tag{2}$$

式中 $\theta = (1-\psi^{-1})/(1-\gamma)$, ψ 表示跨期替代弹性, γ 表示相对风险厌恶系数, ρ 是主观贴现因子.

代表性消费者可将其财富投资于一种无风险资产和一种风险资产. 无风险资产的即期回报率为均衡的无风险利率 r,其供给量为零. 风险资产每期可获得随机红利收入 e,风险资产供给量标准化为 1 单位. 在纯交换经济假设条件下,风险资产的红利 e 等于社会总产出或总禀赋,且满足如下的几何布朗运动

$$\mathrm{d}e_t = \mu_t e_t \mathrm{d}t + \sigma_D e_t \mathrm{d}Z_t^D \tag{3}$$

其中 σ_D 是产出的波动率, Z^D 是适应于自然信息流 $\{F_t: t \geqslant 0\}$ 的标准布朗运动, μ 表示社会产出的期望增长率并服从均值–回复过程

$$\mathrm{d}\mu_t = \lambda(\bar{x} - \mu_t)\mathrm{d}t + \sigma_\mu \mathrm{d}Z_t^\mu \tag{4}$$

其中 $\bar{x}$ 代表社会产出期望增长率的长期均衡水平, λ 是期望增长率的回复速度, σ_μ 为波动率, Z^μ 是适应于信息流 $\{F_t: t \geqslant 0\}$ 并且独立于 Z^D 的标准布朗运动. 为了讨论的方便,定义如下的市场均衡概念.

定义 如果存在唯一的一组关于投资者的消

费水平 C_t、风险资产持有头寸 π_t、风险资产价格 P_t 和无风险利率 r_t 的向量 (C_t, π_t, P_t, r_t)，使得对任意的 $t \geqslant 0$，投资者个人效用最大化和市场出清，即 $C_t = D_t$ 和 $\pi_t = 1$，那么称该市场均衡.

1.1　完全信息经济

在完全信息条件下，代表性消费者不但可以观测社会产出 e 的动态演化过程(3)，而且能观测期望增长率 μ 服从的均值－回复过程(4)．在此经济中，风险资产的附息回报率具有(且在均衡时验证)如下动态过程

$$\mathrm{d}R_0(\mu_t) = \mu_{0,R}(\mu_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_{0,1}(\mu_t)\,\mathrm{d}Z_t^D + \sigma_{0,2}(\mu_t)\,\mathrm{d}Z_t^\mu. \tag{5}$$

假设消费者在时刻 t 的财富水平为 W_t^0，并且令 π_t^0 表示其投资于风险资产的财富比重，那么，财富水平 W_t^0 满足如下的动态过程

$$\mathrm{d}W_t^0 = [r_0(\mu_t)W_t^0 + \pi_t^0\varphi_0(\mu_t)W_t^0 - C_t^0]\,\mathrm{d}t + \pi_t^0 W_t^0[\sigma_{0,1}(\mu_t)\,\mathrm{d}Z_t^D + \sigma_{0,2}(\mu_t)\,\mathrm{d}Z_t^\mu] \tag{6}$$

其中 $r_0(\mu)$ 表示均衡利率，$\varphi_0(\mu) = \mu_{0,R}(\mu) - r_0(\mu)$ 表示风险资产的风险溢价②. 消费者的最优问题为

$$V_t^0(W^0, \mu) = \max_{\pi^0, C^0} \mathrm{E}_t\left[\int_t^\infty f(C_s^0, V_s^0)\,\mathrm{d}s\right] \tag{7}$$

并约束于式(6)的财富动态过程和式(4)的禀赋增长率. 完全信息经济具有如下的均衡结论.

引理 1　在式(3)和式(4)表示的完全信息经济中，消费者的价值函数具有如下形式

$$V^0(W^0, \mu) = \frac{(b_0(\mu)W^0)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{8}$$

并且，在均衡条件下，社会消费－财富比率为

$$c_0(\mu) = \rho^\psi b_0(\mu)^{1-\psi} \tag{9}$$

风险资产的超额回报率为

$$\varphi_0(\mu) = \gamma\sigma_D^2 + (\gamma\psi - 1)(\psi - 1)\sigma_\mu^2\frac{b_0'(\mu)^2}{b_0(\mu)^2} \tag{10}$$

风险资产回报的波动率为

$$\sigma_0(\mu) = \sqrt{\sigma_D^2 + (\psi - 1)^2\frac{b_0'(\mu)^2}{b_0(\mu)^2}\sigma_\mu^2} \tag{11}$$

均衡的市场利率为

$$r_0(\mu) = \rho + \psi^{-1}\mu - \frac{\gamma(1+\psi^{-1})}{2}\sigma_D^2 + \frac{(1-\gamma\psi)(\psi-1)}{2}\frac{b_0'(\mu)^2}{b_0(\mu)^2}\sigma_\mu^2 \tag{12}$$

其中 $b_0(\mu)$ 满足如下形式的微分方程

$$0 = \frac{b_0(\mu)^{1-\psi}\rho^\psi - \rho}{1-\psi^{-1}} + \mu - \frac{\gamma\sigma_D^2}{2} + \psi\lambda(\bar{x} - \mu)\frac{b_0'(\mu)}{b_0(\mu)} + \frac{\psi\sigma_\mu^2}{2}\left(\frac{b_0''(\mu)}{b_0(\mu)} - \frac{(\gamma\psi + 1 - \psi)b_0'(\mu)^2}{b_0(\mu)^2}\right) \tag{13}$$

证明　具体证明过程见附录.

根据引理 1 易知，在均衡条件下，有

$$\sigma_{0,1}(\mu) = \sigma_D \tag{14}$$

和

$$\sigma_{0,2}(\mu) = \frac{(\psi-1)b'(\mu)}{b(\mu)}\sigma_\mu \tag{15}$$

事实上，如果禀赋增长率 μ 为常数，引理 1 所示的均衡结论退化为标准的基于消费的资产定价结论，并且，无论是均衡利率，还是风险溢价和股票价格波动性，均为常数. 所以，与基于消费的资产定价模型假设的消费风险是影响资产价格的唯一因素有所不同，在交换经济中引入禀赋期望增长率的不确定性，不但影响风险资产的均衡价格，而且影响风险资产收益率的波动性和无风险利率. 下文将基于部分信息和学习过程，探讨消费者的过度外推信念偏差对均衡资产价格的影响.

1.2　部分信息经济

根据 Anti 等[25]和 Hirshleifer[26]的假设，投资者不能观测社会产出的期望增长率 μ，但知晓增长率 μ 服从的均值－回复过程(4)和社会产出的真实值 e．投资者可根据社会产出产生的信息流 $\{F_t: t \geqslant 0\}$，利用卡尔曼滤波对增长率 μ 进行估计. 即消费者利用社会产出提供的信息，推断增长率 μ 基于信息流 $\{F_t: t \geqslant 0\}$ 在稳态分布条件下的卡尔曼滤波估计值. 为此，计 $x_t = \mathrm{E}[\mu_t \mid F_t]$，$\delta_t =$

---

② 上标 0 或下标 0 均表示完全信息条件下的经济变量.

$\mathrm{E}[(\mu_t - x_t)^2 \mid F_t]$. 根据 Lipster 等[27]的有关结论有如下的引理.

引理 2 假设式(3)和式(4)定义的随机过程$\{\mu_t: t \geqslant 0\}$的稳态条件分布$P(\mu_t \leqslant Y \mid F_t)$为正态分布$N(x_t, \delta_t)$,则

$$\mathrm{d}x_t = \lambda(\bar{x} - x_t)\mathrm{d}t + \frac{\delta}{\sigma_D}\frac{\mathrm{d}e_t/e_t - x_t\mathrm{d}t}{\sigma_D} \tag{16}$$

其中 参数δ满足

$$\delta = \sigma_D(-\lambda\sigma_D + \sqrt{\sigma_D{}^2\lambda^2 + \sigma_\mu^2}) \tag{17}$$

为了方便,定义另一信息更新过程

$$\bar{Z}_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}e_s/e_s - x_s\mathrm{d}s}{\sigma_D}\mathrm{d}s \tag{18}$$

由滤波理论知,过程$\{\bar{Z}_t: t \geqslant 0\}$是关于概率测度$P$和信息流$\{F_t: t \geqslant 0\}$的标准布朗运动. 因此,社会产出$D$及消费者感知的期望增长率$x$满足如下的动态演化过程

$$\mathrm{d}D_t = x_t D_t \mathrm{d}t + \sigma_D D_t \mathrm{d}\bar{Z}_t \tag{19}$$

$$\mathrm{d}x_t = \lambda(\bar{x} - x_t)\mathrm{d}t + \frac{\delta}{\sigma_D}\mathrm{d}\bar{Z}_t \tag{20}$$

式(3)和式(4)刻画了完全信息条件下社会产出e及期望增长率μ的真实动态过程③,式(19)和式(20)代表在部分信息条件下,社会产出D和消费者感知的期望增长率x的动态过程. 其中,式(20)中的λ均体现了当感知的期望增长率x偏离长期水平$\bar{x}$时增长率回复到均衡水平的速度.

根据心理学研究结论——人类在决策和判断时往往表现出外推偏差(extrapolative bias),即高估客观事物维持现状的时间或者趋势[28],所以在此假设消费者在推断产出增长率时具有外推偏差. 事实上,金融经济学家根据推测对象的不同,讨论了两种不同类型的外推偏差. 第一种是资产价格外推,比如 Barberis 等[23]以及 Greenwood 和 Shleifer[29]. 第二种属于基本面外推,比如 Alti 和 Tetlock[25]以及 Hirshleifer 等[26]. 本文采用第二种外推方式,即基本面外推. 具体而言,如果消费者在推断产出增长率时,其感知的均值回复速度λ小于真实值,那么在消费者的感知下,增长率x维持当前状态的时间比实际长,从而意味着消费者在更新关于期望增长率信念时过度外推了增长率的当前趋势. 在外推信念偏差下,投资者感知的社会产出增长率满足如下的动态过程

$$\mathrm{d}x_t = \lambda_B(\bar{x} - x_t)\mathrm{d}t + \frac{\delta_B}{\sigma_D}\mathrm{d}\bar{Z}_t \tag{21}$$

其中$\lambda_B(<\lambda)$表示投资者的外推偏差,$\lambda - \lambda_B$度量了投资者的过度外推程度,δ_B表示基于投资者过度外推信念偏差λ_B在稳态分布条件下的波动率

$$\delta_B = \sigma_D(-\lambda_B\sigma_D + \sqrt{\sigma_D{}^2\lambda_B^2 + \sigma_\mu^2}) \tag{22}$$

显然,上式有$\mathrm{d}\delta_B/\mathrm{d}\lambda_B < 0$,即随着过度外推信念偏差的增加,即$\lambda_B$不断减小,消费者感知的稳态波动率越大,即式(21)的波动项越大. 所以,消费者的过度外推信念偏差增加了经济的不确定性. 这在一定程度上类似于 Bansal 和 Yaron[8]在经济中引入的长期风险,但不同之处在于 Bansal 和 Yaron[8]外生给定长期风险的均值回复过程,而此处的不确定性来自于投资者的过度外推偏差. 这也不同于 Hirshleifer 等[26]的过度外推不影响经济波动率的假设.

为了确定投资者的最优消费—投资策略,记风险资产的价格为P_t和投资者的财富为W_t,并假设(在均衡求解时验证)风险资产的附息回报率满足如下过程

$$\mathrm{d}R_t(x) = \mu_R(x)\mathrm{d}t + \sigma_R(x)\mathrm{d}\bar{Z}_t \tag{23}$$

具有过度外推信念偏差的投资者将基于感知的禀赋过程(19)和预测的增长率过程(21),通过选择风险资产的持有头寸π_t和消费水平C_t,最大化式(1)~式(2)所表示的终身效用,即

$$V_t(W, x) = \max_{\pi, C}\mathrm{E}_t\left[\int_t^\infty f(C_u, V_u)\mathrm{d}u\right] \tag{24}$$

并且受到如下财富动态过程的约束

$$\mathrm{d}W_t = [r(x)W_t + \pi_t\varphi(x)W_t - C_t]\mathrm{d}t + \pi_t\sigma_R(x)W_t\mathrm{d}\bar{Z}_t \tag{25}$$

其中$\mathrm{E}_t[\cdot]$是基于t时刻信息和投资者外推信念偏差的期望算子,$\varphi(x) = \mu_R(x) - r(x)$表示均衡条件下风险资产的超额回报率,$r(x)$是均衡

③ e是完全信息社会产出,D是部分信息社会总产出.

利率.

2 模型求解

基于上一节的模型,利用标准的随机动态规划方法,过度外推投资者的价值函数 $V(W,x)$ 满足如下的汉密尔顿 - 雅克比 - 贝尔曼(HJB) 方程

$$0 = \max_{C,\pi} f(C,V) + [rW + \pi_t \varphi W - C] V_W + \lambda_B(\bar{x} - x) V_x + \frac{\pi^2 \sigma_R^2}{2} W^2 V_{WW} + \frac{\delta_B^2}{2\sigma_D^2} V_{xx} + \frac{\pi \delta_B}{\sigma_D} \sigma_R W V_{Wx} \tag{26}$$

根据最优化决策理论,过度外推投资者的最优消费和投资策略分别满足如下条件

$$f_C(C,V) = V_W \tag{27}$$

$$\pi = -\frac{\varphi V_W + \frac{\delta_B \sigma_R}{\sigma_D} V_{Wx}}{\sigma_R^2 W V_{WW}} \tag{28}$$

通过猜测 - 验证的方法,可知投资者的价值函数具有如下形式

$$V(W,x) = \frac{(b(x) W)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{29}$$

其中 函数 $b(x)$ 由如下的微分方程确定

$$0 = \frac{\rho^{\psi} b(x)^{1-\psi} - \rho}{1 - \psi^{-1}} + x - \frac{\gamma}{2}\sigma_D^2 + \lambda_B \psi(\bar{x} - x) \frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{\psi \delta_B^2}{2\sigma_D^2} \frac{b''(x)}{b(x)} + (1-\gamma)\psi \delta_B \frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{(\psi - 1 - \gamma\psi)\psi}{2} \frac{\delta_B^2}{\sigma_D^2} \frac{b'(x)^2}{b(x)^2} \tag{30}$$

将价值函数式(29) 代入式(27) 和式(28) ,并结合市场出清条件 $C = D$ 和 $\pi = 1$,可得基于部分信息条件和过度外推信念偏差的市场均衡. 下文的定理刻画了这一均衡.

定理 1　在不完全信息条件下,如果代表性消费者在推断社会禀赋期望增长率时具有过度外推信念偏差 $\lambda_B(\lambda_B < \lambda)$,那么在均衡条件下,消费 - 财富比率为

$$\frac{C}{W} = c(x) = \rho^{\psi} b(x)^{1-\psi} \tag{31}$$

风险资产的超额回报率为

$$\varphi(x) = \left(\gamma\sigma_D + (\gamma\psi - 1)\frac{\delta_B}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)}\right) \times \left(\sigma_D + (\psi - 1)\frac{\delta_B}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)}\right) \tag{32}$$

且风险资产回报的波动率为

$$\sigma_R(x) = \sigma_D + (\psi - 1)\frac{\delta_B}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)} \tag{33}$$

无风险利率为

$$r(x) = \rho + \psi^{-1} x - \frac{\gamma(1 + \psi^{-1})}{2}\sigma_D^2 + (1 - \gamma\psi)\delta_B \frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{(\psi - 1)(1 - \gamma\psi)}{2}\frac{\delta_B^2}{\sigma_D^2}\frac{b'(x)^2}{b(x)^2} \tag{34}$$

其中 $b(x)$ 满足微分方程(30) ,外推性投资者感知的社会禀赋增长率 x 服从如下的均值 - 回复过程

$$\mathrm{d}x_t = \lambda_B(\bar{x} - x_t)\mathrm{d}t + \frac{\delta_B}{\sigma_D}\mathrm{d}\bar{Z}_t \tag{35}$$

其中 δ_B 是稳态分布条件下的波动率并由(22) 给出.

证明　具体证明过程见附录.

根据定理 1 不难发现,代表性投资者的外推信念偏差 λ_B 对市场均衡具有直接和间接影响. 直接影响方面,从式(30) ~式(34) 不难看出,外推信念偏差 λ_B 通过扭曲禀赋增长率在稳态分布下的波动率,即 δ_B ,直接影响风险资产的超额回报率及其波动性和均衡的无风险利率. 而间接影响方面,外推信念偏差 λ_B 影响代表性投资者的确定性等价财富 $b(x)$ (即式(30)) 而间接影响社会的消费 - 财富比率和均衡利率、风险资产的超额回报率和波动性. 进一步比较式(30) ~式(34) 和式(9) ~式(13) 可发现,在部分信息条件下,一方面,消费者通过学习过程增加了其感知的期望增长率与财富波动性之间的关系而影响均衡的资产价格和财富 - 消费比率; 另一方面,消费者的过度外推信念偏差通过影响稳态分布下的波动率而间接改变经济的不确定性,进而影响均衡的资产价格和财富 - 消费比率. 特别地,这些影响离不开递

归效用函数和非单位替代弹性的假设. 比如，当消费者拥有 CRRA 效用函数，即 $\gamma\psi = 1$，那么过度外推信念偏差将不会影响均衡的无风险利率; 如果消费者具有单位替代弹性，即 $\psi = 1$，那么其过度外推信念偏差将不会改变风险资产价格的波动性.

3 数值分析

下文将基于表 1 提供的参数取值分别讨论部分信息和投资者的过度外推信念偏差对消费 – 财富比率、均衡利率、市场风险溢价以及风险资产收益率波动性的影响. 在这些参数取值中，社会禀赋的波动率为 $\sigma_D = 0.1$，禀赋增长率的波动性为 $\sigma_\mu = 0.06$. 而根据式(34) 可知，主观贴现因子 ρ 和社会禀赋增长率 x 都对均衡利率 $r(x)$ 产生正面影响，所以同时选取较低(较高) 的主观贴现率和较高(较低) 的均衡增长率不会影响模型的定性结论. 为了保证模型在长期均衡条件下产生较低的无风险利率，设定长期增长率为 $\bar{x} = 0.05$，主观贴现因子 $\rho = 0.052$. 在资产定价模型中，风险厌恶系数和跨期替代弹性是两个非常重要的参数，而关于这两个参数的取值也有较大的争议，不同文献具有不同的取值[8,30]. 为此，在基准模型中，设定风险厌恶系数 $\gamma = 4$ 和跨期替代弹性 $\psi = 4$. 为了保证结论的稳健性，下文将提供了关于风险厌恶系数和跨期替代弹性的比较静态分析. 最后，为了讨论投资者过度外推信念偏差的影响，选择了两种不同的外推信念偏差: $\lambda_B = 0.90$ 和 $\lambda_B = 0.81$.

表 1 模型基本参数取值

Table 1 Baseline parameters for the model

参数名称	符号	取值	参数名称	符号	取值
禀赋长期增长率	$\bar{x}$	0.05	主观贴现因子	ρ	0.052
禀赋波动率	σ_D	0.10	风险厌恶系数	γ	4
禀赋增长波动率	σ_μ	0.06	跨期替代弹性	ψ	4
禀赋增长回复速度	λ	1.00	过度外推参数	λ_B	0.90(0.81)

3.1 过度外推对消费 – 财富比率的影响

图 1 刻画了在均衡条件下，消费 – 财富比率 $c(x)$ 与社会禀赋期望增长率 x 的关系. 其中左图刻画了代表性消费者关于禀赋增长率的不完全信息对消费 – 财富比率的扭曲. 如果投资者不存在过度外推信念偏差(即 $\lambda = 1$)，部分信息条件下的消费 – 财富比率 $c(x)$ 高于完全信息条件下的消费 – 财富比率. 注意到，在纯交换经济中，当期社会总禀赋 D 是外生的而且必须被当期消费，因此式(31) 表明，在其他条件不变的情况下，部分信息导致了社会财富的损失. 右图显示，代表性消费者在学习过程中表现的过度外推信念偏差进一步增加了这种扭曲效应. 具体而言，随着投资者过度外推信念偏差程度的增加，即 λ 从 1.00 变化到 0.90 和 0.81，消费 – 财富比率进一步上升. 比如，在增长率长期均衡条件下，即 $x = 0.05$，消费 – 财富比率从 3.34% 上升到 3.43% 到 3.54%，增长幅度分别为 2.7% 和 3.12%. 所以，代表性消费者在学习过程中表现的外推信念偏差越严重，外推信念偏差对消费 – 财富比率的扭曲效应越大. 除此之外，右图还表明，代表性投资者的过度外推信念偏差不但扭曲了均衡的消费 – 财富比率，而且增加了消费 – 财富比率对禀赋期望增长率 x 的敏感性和波动性. 更进一步，由式(31) 可得

$$P = \frac{D}{c(x)} = \rho^{-\psi} b(x)^{\psi-1} D \tag{36}$$

该式意味着过度外推信念偏差通过扭曲消费 – 财富比率对期望增长率 x 的敏感性和波动性而影响风险资产价格及其收益率和波动性.

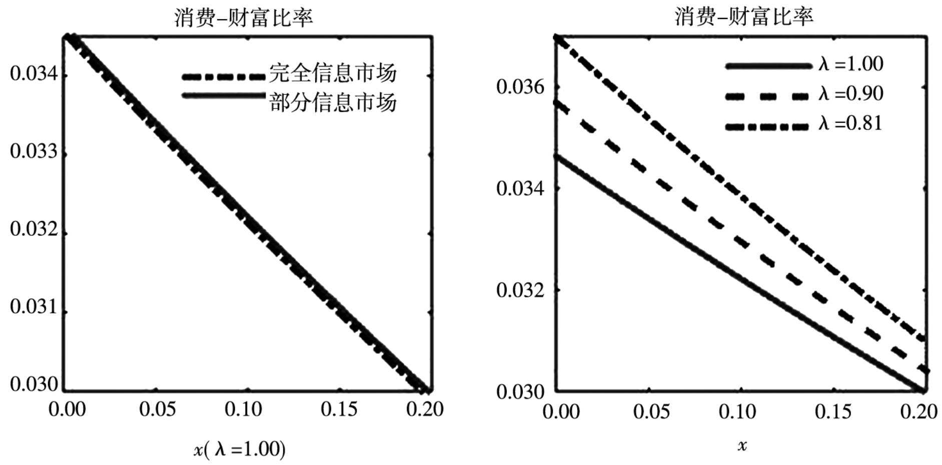

图1　过度外推对消费－财富比率的影响

Fig. 1 Effect of over-extrapolation on consumption-wealth ratio

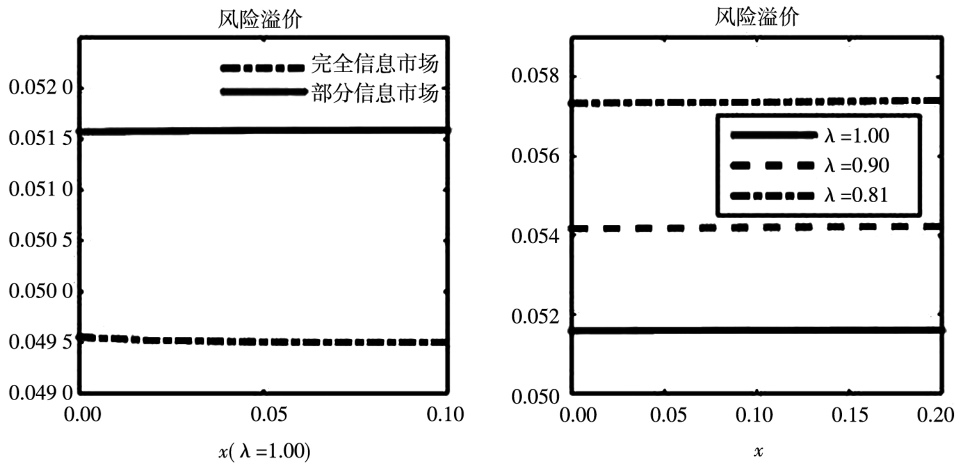

图2　过度外推对风险溢价的影响

Fig. 2 Effect of over-extrapolation on risk premium

3.2　过度外推对风险溢价的影响

图2刻画了均衡风险溢价 $\varphi(x)$ 与期望增长率 x 的关系. 其中左图表明在市场均衡条件下，部分信息市场的风险资产超额收益率高于完全信息市场的超额收益率. 这是因为在部分信息经济中，投资者不能观测社会禀赋的真实增长率，因此相对于完全信息经济，投资者面临更多的风险，并要求更多回报补偿其承担的额外风险. 除此之外，左图还表明，在一定程度上，完全信息经济的风险溢价 $\varphi(x)$ 对禀赋期望增长率 x 的敏感性大于部分信息经济的敏感性. 这主要是因为在部分信息条件下，投资者需要根据总产出 D 推断增长率 x，这种滤波效应削弱了预测的增长率 x 对风险溢价的影响.

除此之外，右图则进一步表明，随着投资者外推信念偏差程度的增加，即 λ 减小，均衡的风险溢价进一步上升，并且随着外推信念偏差等比例增加，即 λ 等比例缩小，风险溢价上升的幅度不断增大. 比如，当 λ 从1.00等比例缩小至0.90和0.81时，在长期均值 $x = 0.05$ 下，风险溢价从5.16%分别上升到5.42%和5.74%，上升幅度分别为5.04%和5.90%. 与此同时，从右图不难看出，部分信息市场的风险溢价水平几乎不受禀赋期望增长率 x 的影响，但是严重依赖于投资者的过度外推信念偏差. 因此，无论经济增长率是高还是低，在给定投资者风险厌恶水平的条件下，不完全信息市场下投资者的过度外推信念偏差可以导致更高的风险溢价水平. 这说明基于部分信息，投

资者在预测禀赋增长率时体现的过度外推信念偏差可以在一定程度上解释“股权溢价之谜”.

3.3 过度外推对波动率的影响

图 3 刻画了风险资产收益率的波动性 $\sigma_R(x)$ 与禀赋期望增长率 x 的关系，结论与图 2 十分相似，即在部分信息条件下的风险资产收益率波动性大于完全信息市场下的收益率波动性，这也与经济直觉非常一致. 右图刻画了在部分信息条件下，投资者的外推信念偏差对波动率的直接影响. 显然，随着投资者外推信念偏差程度的不断增加，波动率 $\sigma_R(x)$ 不断上升，而且上升的幅度不断增大. 比如，在图示参数下，波动率分别上升了 2.23% 和 2.62%. 更为重要的是，波动率的上升幅度几乎不依赖于禀赋的期望增长率 x，但主要依赖于投资者的过度外推信念偏差. 因此，基于有关禀赋增长率的部分信息，投资者过度外推信念偏差不但可以推高均衡的风险溢价水平，而且还能提高收益率的波动性.

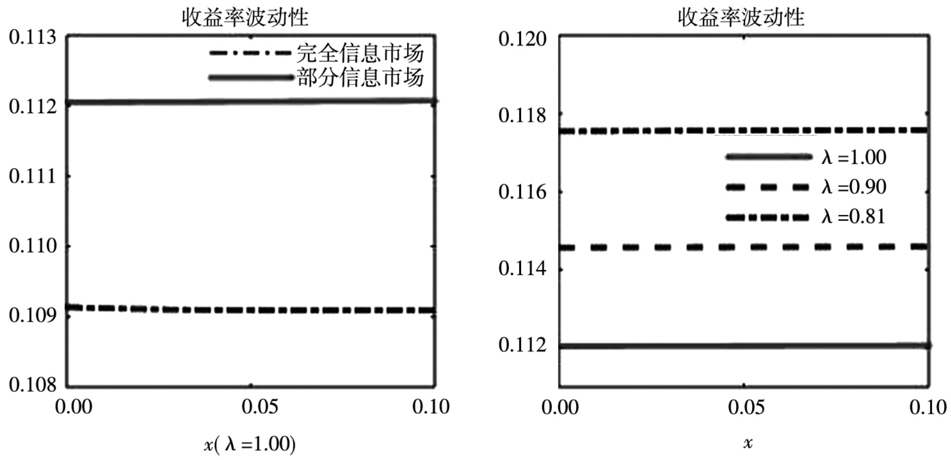

图 3 过度外推对回报率波动性的影响

Fig. 3 Effect of over-extrapolation on return volatility

3.4 过度外推对均衡利率的影响

图 4 刻画了市场无风险利率 $r(x)$ 与社会禀赋期望增长率 x 的关系. 左图表明，在部分信息条件下，均衡利率 r 低于完全信息市场的均衡利率. 而右图进一步表明，随着投资者外推信念偏差的增加，均衡利率不断下降，且下降幅度与禀赋增长率 x 无关. 具体而言，在其他条件不变的情况下，随着 λ 从 1.00 等比例缩小至 0.90 和 0.81 时，均衡利率分别下降了 4.23% 和 5.68%. 这表明，基于有关禀赋增长率的不完全信息，投资者的过度外推信念偏差导致了更低的均衡利率. 这意味着模型和结论可以为实证研究发现的“利率之谜”提供理论支持

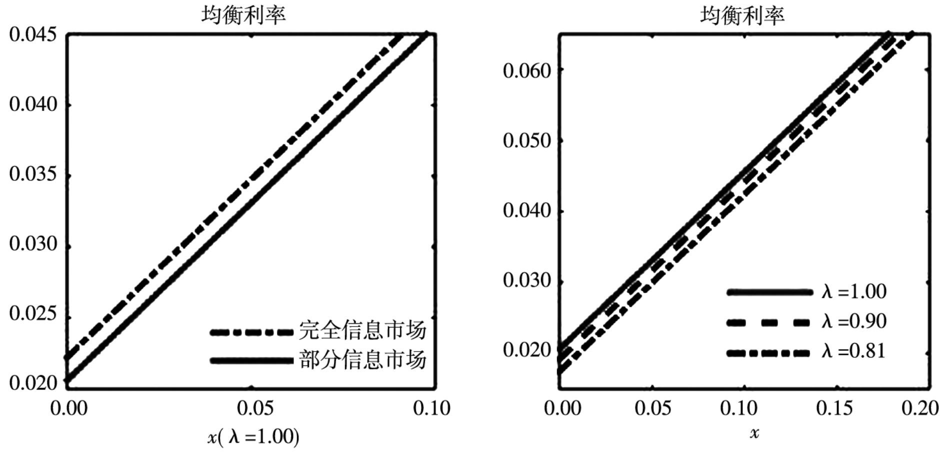

图 4 过度外推对均衡利率的影响

Fig. 4 Effect of over-extrapolation on equilibrium interest rate

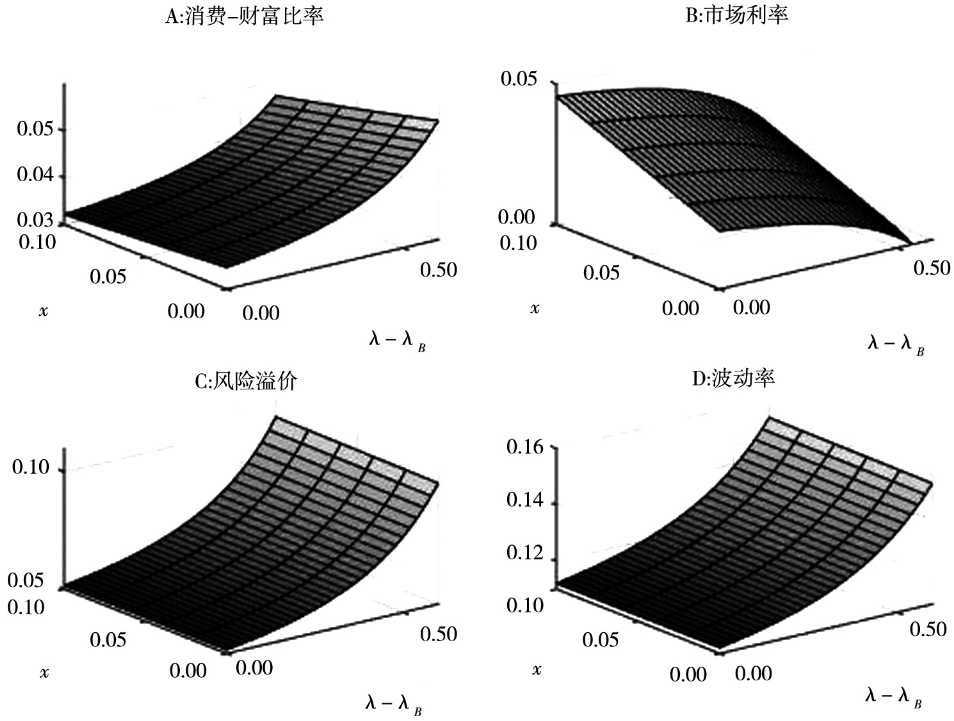

图 5 过度外推信念偏差的影响

Fig. 5 Effects of over-extrapolative belief biases

3.5 外推信念偏差的影响

图 5 以三维形式展示了均衡的消费 - 财富比率、均衡利率、风险溢价和收益率波动性与禀赋期望增长率 x 和绝对外推信念偏差 $\lambda - \lambda_B$ 之间的关系. 很显然,除了均衡的无风险利率与增长率 x 具有正相关关系之外,消费 - 财富比率、均衡无风险利率和收益波动性与期望增长率 x 的相关性很低. 但是,无论是消费 - 财富比率、风险溢价和收益率波动性,还是均衡的无风险利率,都随着代表性消费者过度外推信念偏差的增加(即 $\lambda - \lambda_B$ 增加) 而不断变化. 同时,子图 A 和子图 C 暗含了社会消费和股票回报率之间的正相关关系.

特别地,图 6 刻画了在长期均衡条件下($x = \bar{x} = 0.05$) ,风险溢价、风险资产收益率波动性、无风险利率以及夏普比率随着绝对外推信念偏差 $\lambda - \lambda_B$ 变化而变化的趋势. 随着绝对外推信念偏差 $\lambda - \lambda_B$ 从 0 增加到 0.6,均衡的风险溢价从大约 5.1% 增加到 10% ,股票市场的波动率从大约 11% 增加到 15.3% ,这意味着市场的夏普比率从 0.46 上升到 0.67. 但与此相反,无风险利率却从 3.31% 下降到 1.64% . 这些结论支持了资产定价实证研究发现的"异象"——基于合理的风险厌恶水平和经济变量,不但复制了低市场利率的实证结论,同时再现了符合实际情况的股权溢价和波动率水平. 因此,基于部分信息假设,从投资者过度外推信念偏差出发,模型为"股权溢价之谜"、"无风险利率之谜"和"超常波动之谜"提供了一个统一的理论框架.

3.6 参数稳健性检验

基于表 1 提供的基本参数值,表 2 列举了在长期均衡条件下,即 $\bar{x} = 0.05$ 时,有关风险厌恶系数 γ 和跨期替代弹性 ψ 的比较静态分析结果. 参照有关的实证研究文献[31,32] ,结论只考虑了跨期替代弹性大于 1 的情形. 其中,分表 A 列举了在长期均衡条件下,投资者的过度外推信念偏差对消费 - 财富比率、风险资产溢价、股票价格波动率以及无风险利率的影响. 分表 B 和分表 C 则分别采用 Bansal 和 Yaron[8] 、Jahan-Parvar 和 Liu[30] 的风险厌恶系数和跨期替代弹性参数值,报告了消费者过度外推信念偏差对均衡价格的影响. 无论是分表 B 还是分表 C 都表明,随着代表性消费者表现的外推信念偏差的增加,均衡的无风险利

率不断下降,而风险溢价和收益率波动性却不断增加. 因此,表 2 的结果表明,除了数量方面的差异之外,过度外推信念偏差对均衡资产价格变化趋势的影响并不依赖于风险厌恶系数和跨期替代弹性参数取值,这说明对于这两个关键的参数,模型的结论是稳健的.

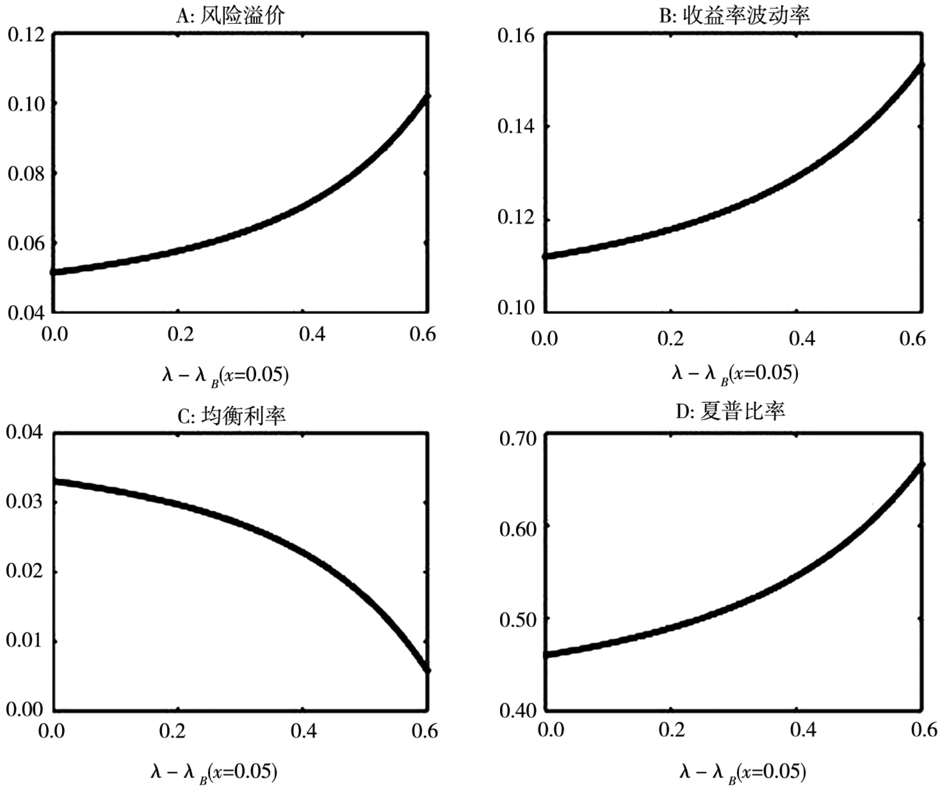

图 6 长期均衡条件下过度外推信念偏差的影响

Fig. 6 Effects of over-extrapolative belief biases in long-term equilibrium

表 2 基于风险厌恶系数和跨期替代弹性的比较静态分析($\bar{x}$ = 0.05)

Table 2 Comparative statics with respect to risk-aversion coefficient and elasticity of intertemporal substitution with $\bar{x}$ = 0.05

(感知的) 均值回复速率	消费 - 财富比率	风险溢价	波动率	无风险利率
分表 A: ψ = 4.0 , γ = 4				
1.00	0.033 4	0.051 6	0.112 1	0.033 1
0.90	0.034 3	0.054 2	0.114 6	0.031 7
0.81	0.035 4	0.057 4	0.117 6	0.029 9
分表 B: ψ = 1.5 , γ = 7.5				
1.00	0.051 5	0.090 3	0.105 3	0.011 8
0.90	0.052 4	0.093 6	0.106 4	0.009 4
0.81	0.053 4	0.097 6	0.107 6	0.006 6
分表 C: ψ = 2.0 , γ = 4				
1.00	0.039 6	0.049 2	0.108 0	0.041 2
0.90	0.040 2	0.051 3	0.109 7	0.039 9
0.81	0.040 9	0.053 7	0.111 6	0.038 4

4　结束语

自 Mehra 和 Prescott 于 1985 年提出“股权溢价之谜”后,学术界为了对此提供理论依据和解释,创建了各种各样的模型和理论. 然而,随着研究的不断深入,学术界发现“股权溢价”之“异象”并非单独存在,而是与“无风险利率之谜”和“超常波动之谜”紧密相连. 这三个谜题不但对传统的基于理性代表性经济人的资产定价模型构成挑战,而且为后续的资产定价理论提出了严格的检验标准. 为了解释这三大谜题以及实证研究发现的其他“异象”,学术界开始对传统的基于理性经济人的资产定价模型进行修正和完善. 区别于已有的资产定价模型,本文另辟蹊径,借助于部分信息经济,研究了代表性消费者在学习过程中表现的过度外推信念偏差对市场均衡的影响. 研究结果表明,在均衡条件下,代表性消费者的过度外推信念偏差不但减低了无风险利率,而且提高风险溢价和风险资产收益率的波动性. 所以,基于部分信息以及投资者在学习过程表现的过度外推信念偏差,模型为“股权溢价之谜”、“利率之谜”和“波动之谜”提供了一个统一的解释框架,扩展和完善了现有的资产定价理论.

参 考 文 献:

[1] Mehra R, Prescott E C. The equity premium: A puzzle [J]. Journal of Monetary Economics, 1985, 15: 145 – 161.

[2] Weil P. The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle [J]. Journal of Monetary Economics, 1989, 24: 401 – 421.

[3] Campbell J Y. Asset prices, consumption, and the business cycle [J]. Handbook of Macroeconomics, 1999, 1: 1231 – 1303.

[4] Campbell J Y, Cochrane J H. By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior [J]. Journal of Political Economy, 1999, 107(2): 205 – 251.

[5] Epstein L G, Zin S E. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical analysis [J]. Journal of Political Economy, 1991, 99: 263 – 286.

[6] Gârleanu N, Panageas S. Young, old, conservative, and bold: The implications of heterogeneity and finite lives for asset pricing [J]. Journal of Political Economy, 2015, 123(3): 670 – 685.

[7] Hansen L P, Sargent T J. Robust control and model uncertainty [J]. American Economic Review, 2001, 91(2): 60 – 66.

[8] Bansal R, Yaron A. Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles [J]. Journal of Finance, 2004, 59(4): 1481 – 1509.

[9] Croitoru B, Lu L. Assetpricing in a monetary economy with heterogeneous beliefs [J]. Management Science, 2015, 61: 2203 – 2219.

[10] Barro R J. Rare disasters and asset markets in the twentieth century [J]. Quarterly Journal of Economics, 2006, 121(3): 823 – 866.

[11] Lu L. Assetpricing and welfare analysis with bounded rational investors [J]. Financial Review, 2010, 45: 485 – 499.

[12] He Z, Krishnamurthy A. Intermediary asset pricing [J]. American Economic Review, 2013, 103(2): 732 – 70.

[13] Barberis N, Greenwood R, Jin L, et al. X-CAPM: An extrapolative capital asset pricing model [J]. Journal of Financial Economics, 2015, 115: 1 – 24.

[14] Glaeser E L, Nathanson C G. An extrapolative model of house price dynamics [J]. Journal of Financial Economics, 2017, 126(1): 147 – 170.

[15] 徐绪松, 陈彦斌. 基于相对财富和习惯形成的资本资产定价模型 [J]. 管理科学学报, 2004, 7(3): 1 – 6.
Xu Xusong, Chen Yanbin. CAPM based on relative wealth and habit formation [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(3): 1 – 6. (in Chinese)

[16] 陈国进, 晁江锋, 赵向琴. 灾难风险、习惯形成和含高阶矩的资产定价模型 [J]. 管理科学学报, 2015, 18(4): 1 –

17.
Chen Guojin, Chao Jiangfeng, Zhao Xiangqin. Disaster risk, habit formation and an asset pricing model with higher moments [J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(4): 1 - 17. (in Chinese)

[17] 熊和平，李淑懿，余　均. 消费习惯、异质偏好与资产定价[J]. 管理科学学报，2012，15(9)：64 - 73.
Xiong Heping, Li Shuyi, Yu Jun. Habits formation, heterogeneous preferences and asset pricing [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(9): 64 - 73. (in Chinese)

[18] 袁　宁，施嘉岳. 异质性时间偏好与资产定价[J]. 管理科学学报，2012，15(8)：50 - 59.
Yuan Ning, Shi Jiayue. Heterogeneous time preference and asset pricing [J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(8): 50 - 59. (in Chinese)

[19] 曾　燕，康俊卿，陈树敏. 基于异质性投资者的动态情绪资产定价[J]. 管理科学学报，2016，19(6)：87 - 97.
Zeng Yan, Kang Junqing, Chen Shumin. Dynamic sentiment asset pricing with heterogeneous investors [J]. Journal of Management Sciences in China, 2016, 19(6): 87 - 97. (in Chinese)

[20] 吴卫星，汪勇祥，梁衡义. 过度自信、有限参与和资产价格泡沫[J]. 经济研究，2006，4：115 - 127.
Wu Weixing, Wang Yongxiang, Liang Hengyi. Overconfidence, limited participation and asset price bubbles [J]. Economic Research Journal, 2006, 4: 115 - 127. (in Chinese)

[21] 贺志芳，文凤华，黄创霞，等. 投资者情绪与时变风险补偿系数[J]. 管理科学学报，2017，20(12)：29 - 38.
He Zhifang, Wen Fenghua, Huang Chuangxia, et al. Investor sentiment and time-varying coefficient of risk compensation [J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(12): 29 - 38. (in Chinese)

[22] 许海川，周炜星. 情绪指数与市场收益：纳入中国波指(iVX)的分析[J]. 管理科学学报，2018，21(1)：88 - 96.
Xu Haichuan, Zhou Weixing. Sentiment index and market return considering the iVX [J]. Journal of Management Sciences in China, 2018, 21(1): 88 - 96. (in Chinese)

[23] 姚尧之，王坚强，刘志峰. 混频投资者情绪与股票价格行为[J]. 管理科学学报，2018，21(2)：104 - 113.
Yao Yaozhi, Wang Jianqiang, Liu Zhifeng. Mixed-frequency investor sentiment and stock price behavior [J]. Journal of Management Sciences in China, 2018, 21(2): 104 - 113. (in Chinese)

[24] 彭　涓，靳玉英，杨金强. 基于过度外推的最优投资与消费策略[J]. 管理科学学报，2017，20(3)：56 - 62.
Peng Juan, Jin Yuying, Yang Jinqiang. Optimal investment and consumption based on over-extrapolation [J]. Journal of Management Sciences in China, 2017, 20(3): 56 - 62. (in Chinese)

[25] Alti A, Tetlock P C. Biased beliefs, asset prices, and investment: A structural approach [J]. Journal of Finance, 2014, 69: 325 - 361.

[26] Hirshleifer D, Li J, Yu J. Asset pricing in production economies with extrapolative expectations [J]. Journal of Monetary Economics, 2015, 76: 87 - 106.

[27] Liptser R S, Shiryaev A N. Statistics of Random Processes: I General Theory [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.

[28] Gilovich T, Vallone R, Tversky A. The hot hand in basketball: On the misperception of random sequences [J]. Cognitive Psychology, 1985, 17(3): 295 - 314.

[29] Greenwood R, Shleifer A. Expectations of returns and expected returns [J]. Review of Financial Studies, 2014, 27(3): 714 - 746.

[30] Jahan-Parvar M R, Liu H. Ambiguity aversion and asset prices in production economies [J]. Review of Financial Studies, 2014, 27(10): 3060 - 3097.

[31] Attanasio O P, Vissing-Jørgensen A. Stock-market participation, intertemporal substitution, and risk-aversion [J]. American Economic Review, 2003, 93(2): 383 - 391.

[32] Bansal R, Gallant A R, Tauchen G. Rational pessimism, rational exuberance, and asset pricing models [J]. Review of Economic Studies, 2007, 74(4): 1005 - 1033.

Asset pricing based on over-extrapolation

PENG Juan[1], *MU Cong-ming*[2*], *ZHU Xiao-neng*[1,3], *YANG Jin-qiang*[1,3]

1. School of Finance, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China;
2. College of Finance and Statistics, Hunan University, Changsha 410082, China;
3. Shanghai Institute of International Finance and Economics, Shanghai 200433, China

Abstract: Based on the pure exchange economic model of Lucas and the partial information assumptions, this paper investigates the effects of over-extrapolation belief biases that the representative agent exhibits in the learning process on the market equilibrium and asset prices. The conclusions show that even with a low coefficient of relative risk aversion, the over-extrapolation belief biases can not only reduce the risk-free rate, but also enhance the risk premium and return volatility of the risky asset. Therefore, this paper provides a unified theoretical framework that can simultaneously explain the equity premium puzzle, interest rate puzzle, and volatility puzzle.

Key words: over-extrapolation; the equity premium puzzle; the excess-volatility puzzle; the risk-free rate puzzle

附录:

引理 1 的证明

根据式(7)、式(4)和式(6)刻画的最优问题,价值函数 V^0 满足如下 HJB 方程

$$\begin{aligned}0 = \max_{C^0,\pi^0} & f(C^0,V^0) + [r_0(\mu)W^0+\pi^0\varphi_0(\mu)W^0-C^0]V^0_W + \\ & \frac{1}{2}(\pi^0 W^0)^2[\sigma^2_{0,1}(\mu)+\sigma^2_{0,2}(\mu)]V^0_{WW} + \\ & \lambda(\bar{\mu}-\mu)V^0_\mu + \frac{1}{2}\sigma^2_\mu V^0_{\mu\mu} + \pi^0 W^0\sigma_\mu\sigma_{0,2}(\mu)V^0_{W\mu}\end{aligned} \tag{37}$$

为了方便,记 $\sigma^2_0 = \sigma^2_{0,1}(\mu)+\sigma^2_{0,2}(\mu)$,并取关于消费 C^0 和投资策略 π^0 的一阶条件,可得

$$f_{C^0}(C^0,V^0) = V^0_W$$

$$\pi^0 = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_0(\mu)}{\sigma^2_0(\mu)}\frac{V^0_W}{(W^0)^2V^0_{WW}} - \frac{\sigma_\mu\sigma_{0,2}(\mu)}{\sigma^2_0(\mu)}\frac{V^0_{W\mu}}{V^0_W V^0_{WW}}$$

将价值函数(8)代入上述一阶条件可得

$$c_0(\mu) = b_0(\mu)^{1-\psi}\rho^\psi \tag{38}$$

$$\pi^0(\mu) = \frac{\varphi_0(\mu)b_0(\mu)+(1-\gamma)\sigma_{0,2}(\mu)\sigma_\mu b_0'(\mu)}{\gamma\,\sigma_0(\mu)^2 b_0(\mu)} \tag{39}$$

根据金融市场出清条件 $\pi^0 = 1$,式(39)化简为

$$\gamma\sigma^2_0 b_0(\mu) = \varphi_0 b_0 + (1-\gamma)\sigma^2_0\sigma_\mu b_0' \tag{40}$$

将式(38)~式(40)以及价值函数(8)代入 HJB 方程(37),化简可得

$$\begin{aligned}0 = & \left(\frac{b_0(\mu)^{1-\psi}\rho^\psi-\psi\rho}{\psi-1}+r_0(\mu)+\frac{\gamma\sigma_0(\mu)^2}{2}\right)b_0(\mu) - \\ & \kappa(\bar{\mu}-\mu)b_0'(\mu) + \frac{\sigma^2_u}{2}\left(b_0''(\mu)-\frac{\gamma b_0'(\mu)^2}{b_0(\mu)}\right)\end{aligned} \tag{41}$$

另外,根据商品市场出清条件可知

$$P^0 = \rho^{-\psi}b_0(\mu)^{\psi-1}e$$

利用伊藤引理,可知风险资产均衡价格 $P^0(\mu)$ 具有如下的动态方程

$$\frac{dP^0_t}{P^0_t} = \mu^0_p(\mu_t)dt + \sigma_D dZ^D_t + \frac{(\psi-1)b_0'(\mu_t)}{b_0(\mu_t)}\sigma_\mu dZ^\mu_t$$

其中

$$\mu_p^0(\mu) = \mu + \lambda(\psi - 1)(\bar{\mu} - \mu)\frac{b_0'(\mu)}{b_0(\mu)} + \frac{\sigma_\mu^2(\psi - 1)}{2}\left(\frac{b_0''(\mu)}{b_0(\mu)} + \frac{(\psi - 2)b_0'(\mu)^2}{b_0^2(\mu)}\right)$$

同时，注意到在均衡条件下，风险资产的总回报为 $\mathrm{d}R_{0,t} = (\mathrm{d}P_t^0 + e_t\mathrm{d}t)/P_t^0$. 通过对比两种形式的风险资产回报率动态过程，可得

$$\begin{aligned}\mu_{0,R}(\mu) &= \varphi_0(\mu) + r_0(\mu)\\ &= \mu + b(\mu)^{1-\psi}\rho^\psi + \lambda(\bar{\mu} - \mu)(\psi - 1)\frac{b_0'(\mu)}{b_0(\mu)} + \frac{\sigma_\mu^2(\psi - 1)}{2}\left(b_0''(\mu) + \frac{(\psi - 2)b_0'(\mu)^2}{b_0^2(\mu)}\right)\end{aligned}$$

以及式(11)和

$$\sigma_{0,2} = \frac{(\psi - 1)b_0'(\mu)}{b_0(\mu)}\sigma_\mu$$

再结合式(40)，可得风险溢价(10). 最后将风险溢价以及均衡利率表达式代入式(41)，化简可得 $b_0(\mu)$ 满足的常微分方程式(13). 至此，引理 1 证明完毕.

定理 1 的证明

将代表性消费者的价值函数(29)代入一阶条件式(27)和式(28)，可得

$$c(x) = \frac{C}{W} = b(x)^{1-\psi}\rho^\psi$$

$$\pi = \frac{\varphi(x) + (1 - \gamma)\delta_B\frac{\sigma_R}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)}}{\gamma\sigma_R^2}$$

根据市场出清条件 $\pi = 1$ 和 $C_t = D_t$ 可得

$$\varphi(x) + (1 - \gamma)\delta_B\frac{\sigma_R}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)} = \gamma\sigma_R^2$$

$$c(x_t)P_t = c(x_t)W_t = C_t = D_t$$

所以，在均衡情况下，风险资产的价格为

$$P_t = \frac{1}{c(x_t)}D_t = \rho^{-\psi}b(x)^{\psi-1}D_t$$

根据 Ito 引理，(除权)价格过程 P_t 满足

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \left[x_t + \lambda_B(\psi - 1)(\bar{x} - x_t)\frac{b'(x)}{b(x)} + (\psi - 1)\delta_B\frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{\psi - 1}{2}\frac{\delta_B^2}{\sigma_D^2}\left(\frac{b''(x)}{b(x)} + (\psi - 2)\frac{b'(x)^2}{b(x)^2}\right)\right]\mathrm{d}t + \left(\sigma_D + (\psi - 1)\frac{\delta_B}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)}\right)\mathrm{d}\bar{Z}_t$$

根据风险资产价格的定义，其期望回报率为

$$\mu_R(x) = x_t + \lambda_B(\bar{x} - x_t)(\psi - 1)\frac{b'(x)}{b(x)} + (\psi - 1)\delta_B\frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{(\psi - 1)\delta_B^2}{2\sigma_D^2}\left(\frac{b''(x)}{b(x)} + (\psi - 2)\frac{b'(x)^2}{b(x)^2}\right) + \rho^\psi b(x)^{1-\psi}$$

波动率为

$$\sigma_R(x) = \sigma_D + (\psi - 1)\frac{\delta_B}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)}$$

将 $\sigma_R(x)$ 代入风险资产的超额回报率有

$$\varphi(x) = \left(\gamma\sigma_D + (\gamma\psi - 1)\frac{\delta_B}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)}\right)\left(\sigma_D + (\psi - 1)\frac{\delta_B}{\sigma_D}\frac{b'(x)}{b(x)}\right)$$

进一步可得无风险利率

$$r(x) = \rho + \psi^{-1}x - \frac{\gamma(1 + \psi^{-1})}{2}\sigma_D^2 + (1 - \gamma\psi)\delta_B\frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{(\psi - 1)(1 - \gamma\psi)}{2}\frac{\delta_B^2}{\sigma_D^2}\frac{b'(x)^2}{b(x)^2}$$

将上述的最优消费、投资策略和价值函数(29)以及 $\sigma_R(x)$ 和 $r(x)$ 代入 HJB 方程(26)，化简有

$$0 = \frac{\rho^\psi b(x)^{1-\psi} - \rho}{\psi - 1} + \psi^{-1}x - \frac{\gamma\psi^{-1}}{2}\sigma_D^2 + \lambda_B(\bar{x} - x)\frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{\delta_B^2}{2\sigma_D^2}\frac{b''(x)}{b(x)} + (1 - \gamma)\delta_B\frac{b'(x)}{b(x)} + \frac{(\psi - 1 - \gamma\psi)}{2}\frac{\delta_B^2}{\sigma_D^2}\frac{b'(x)^2}{b(x)^2}$$

至此，定理 1 证明完毕.