

doi: 10.19920/j.cnki.jmsc.2021.05.006

投资行为对房地产价格及其政策的影响^①

郑敏

(中央财经大学中国精算研究院, 北京 100081)

摘要: 在给定的经济环境下, 研究自住购房者、投资购房者和开发商之间的供需均衡模型. 通过与刚性需求的房地产市场比较, 发现投资购房者的行为是影响房地产价格变化的重要因素. 特别地, 外推型投资者对房地产价格的走势有推波助澜的作用; 回复型投资者虽然具有稳定市场的作用, 但也会增加市场的复杂性. 当房地产市场的不同主体之间存在相互作用时, 房地产价格会出现偏离基准价格、路径依赖、巨额波动和陷入低房价陷阱等现象. 政府通过调整基础经济变量(如首付比和开发成本), 能起到调控房地产市场的目的. 相对首付比调节来说, 开发成本调节既能调整基准价格, 又能改变投资购房者对房地产市场的影响, 可以起到综合调控房地产市场的作用, 是比较有效的房地产调控措施.

关键词: 房地产价格; 外推型投资者; 回复型投资者; 首付比; 开发成本

中图分类号: F830.9; F293.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2021)05-0097-13

0 引言

从20世纪90年代后期开始, 包括澳大利亚、加拿大、法国、印度、意大利、韩国、俄罗斯、英国、美国以及中国在内, 全球的房地产价格都出现了明显的上涨, 比如从1996年~2008年, 伦敦的房地产价格翻了近3倍; 拉斯维加斯的房价2003年涨了10%, 紧接着2004年又增长了近50%; 美国整体房地产价格从1997年~2006年上涨85%. 1998年~2017年, 中国商品房平均销售价格由2063元/m²迅速上升至7892元/m², 年复合增长率达到7.32%; 2003年~2007年, 年复合增长率甚至达到13.13%, 部分城市则表现出更高的上涨幅度. 房地产价格居高不下, 有可能助长房地产泡沫的形成, 进而对实体经济造成严重的冲击^[1]. 然而什么是推高房地产价格的主要因素? 至今尚未有一致的看法.

传统的研究主要是基于基本面信息(包括人口、收入、利率、信贷和税收等)对房地产价格进行分析. Stein^[2]分析了首付比对房地产价格以及交易量的影响, 发现首付比是影响房地产价格波动的重要原因, 并且决定着房地产价格和交易量之间的相关程度. Mankiw和Weil^[3]利用美国数据分析了婴儿潮和婴儿荒对房地产价格的影响, 发现出生率影响着房地产需求, 进而对房地产价格产生重要影响. Jeanty等^[4]利用密歇根人口普查数据说明了人口变动与房地产价格之间存在空间依赖性. Gallin^[5]应用标准误差修正模型和长期均值回复模型, 发现租金房价比有助于预测未来4年的房地产价格. Van Nieuwerburgh和Weill^[6]在一般均衡框架下研究收入与房地产价格的关系, 并通过美国大城市的实际数据发现收入的差距可以解释房地产价格的差异. McQuinn和O'Reilly^[7]通过一个房地产价格的理论模型,

① 收稿日期: 2019-01-31; 修订日期: 2020-03-04.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571197; 11671411); 高等学校学科创新引智计划资助项目(B17050); 北京市自然科学基金资助项目(9152016).

作者简介: 郑敏(1979—), 女, 博士, 副研究员, 硕士生导师. Email: mzheng@cufe.edu.cn

分析收入和利率对房地产需求的影响,发现购房者的收入水平和经济环境的利率水平决定购房者的贷款能力,进而影响房地产价格. Agnello 和 Schuknecht^[8]利用从1980年~2007年18个工业化国家的数据,发现信贷政策和利率是影响房地产价格波动的重要原因. Eerola 和 Määttä^[9]通过理论模型发现紧缩的信贷政策恶化房地产市场的流动性,进而导致房地产价格的差异. 王海勇^[10]从现代资产定价理论的角度,认为对房地产征税会降低人们对房地产未来收益的预期,从而使现期房地产价格下降. 况伟大^[11]通过 Granger 因果关系检验发现短期房地产价格和地价相互影响,长期地价是房地产价格的 Granger 因. 杨海珍等^[12]通过面板门槛回归模型发现2009年以后我国城市房地产价格很大程度上受土地财政、土地供给和个人住房信贷可获得性的影响. 陈创练和戴明晓^[13]通过关于房地产价格和银行信贷的局部均衡模型,发现次贷危机以来价格型和数量型货币政策均以房价目标为政策导向,特别地数量型货币政策在管控房价上更为有效.

从房地产市场的基本面信息出发,虽然能在一定程度上解释房地产价格的波动,但是如 Shiller^[14,15]所说,基本面信息揭示房地产价格的能力是有限的,而且当房地产价格大幅上涨时,很难用基本面信息来解释. 沈悦和刘洪玉^[16]利用我国14个城市的数据,发现1998年之后我国各城市房地产价格的增长已经无法很好地用基本面信息来解释. Granziera 和 Kozicki^[17]在 Lucas 资产定价模型的框架下,利用美国房地产价格数据发现理性预期模型能解释租金房价比的均值,但不能解释它剧烈且持续的波动. 事实上, Wheaton^[18]的研究结果表明只有在理性预期假设下,房地产价格才主要受经济基本面因素的影响. 然而, Case 和 Shiller^[19,20]的研究发现在房地产市场中理性预期假设不能成立. Clayton^[21]运用协整分析以及随机系数的方法,利用温哥华公寓价格的数据,发现房地产价格的迅速上涨是非理性预期或者是市场摩擦导致的. Zhang 等^[22]利用我国33个城市的房地产价格数据,发现非理

性预期是房地产价格产生泡沫的重要因素. Liu 等^[23]利用动态戈登增长模型发现市场泡沫会产生正反馈效应,进而导致了房地产价格的剧烈波动和持续上涨. Shiller^[15]指出房地产价格的高涨主要是得到了人们非理性买卖和炒作行为的支持;他们的外推预期方式、悲观或乐观的市场情绪、从众心理以及社交媒体信息传播方式和人们对市场信息的正反馈效应都是影响房地产价格的重要因素.

以上研究不再局限于分析基本面信息对房地产价格的影响,而且还在一定程度上突破了理性预期的假设,对房地产市场中出现的巨大波动、周期运动等现象给予了一定解释. 但是他们没有考虑房地产市场中主体的异质性. 特别是在个性化、信息化和市场化的今天,开发商和购房者均不是同质的(即不能用1个代理人来刻画整体开发商或者购房者的特征),他们努力消化庞大的资讯,但是因为没有能力深入了解所有的可能性,每个人只能根据自己的能力(也即有限理性)对市场进行判断. 事实上,大量实证研究^[24-27]表明市场中的交易者存在很强的异质性. 在房地产市场中,自住购房者主要关注房地产的自然属性,而投资购房者则更多地关注房地产的价值属性. 由于异质性的存在使得房地产市场中的不同主体对经济环境、市场状态以及政府的政策调控等有不同的反映,进而使得房地产价格的演化成为动态、演化和博弈的过程. 近年来,越来越多的学者开始关注异质性对房地产市场的影响. Si-los^[28]从异质代理人的角度解释房地产市场的周期性变化. Burnside 等^[29]通过信念变化的异质代理人模型,从购房者的异质信念角度对房地产市场的波动给予解释. Zheng 等^[30]将基本面和技术分析方法引入到房地产市场供需关系的演化过程中,发现购房者的投资需求是房地产市场出现泡沫的主要原因. Bao 和 Hommes^[31]认为购房者的投资需求会增加市场泡沫及市场崩溃的风险,但房地产供应的内生性会对市场泡沫产生抑制作用. 以上研究侧重购房者的需求和预期,但是没有考虑房地产开发商的行为对房地产价格的影响(除了文献[30,31]). 虽然有研究^[19,32,33]表明房

地产开发商的供给行为对房地产价格的波动影响巨大,特别是开发商的投机性供给是决定未来房地产价格波动的关键因素之一,但是这些研究又忽略了购房者的行为,只关心房地产供给一方对房地产市场的影响。

在实际的房地产市场中,开发商和购房者是这个市场两个重要的主体,二者的行为共同对房地产价格产生影响。因此,综合研究开发商和购房者的决策及相互作用更符合实际房地产市场的情况。利用 Zheng 等^[30]给出的框架,本文将购房者对房地产的自住需求和投资需求与房地产开发商的供给相结合,通过供需平衡分析不同的主体行为对房地产价格的影响,进而从政策层面评估不同房地产宏观调控政策的有效性。本文与已有的文献相比主要有两点不同。一是对于投资行为的分析,已有文献强调外推型投资者对价格走势的推波助澜作用以及回复型投资者的稳定市场作用,而本文研究发现回复型投资者实际具有双刃剑的作用,换句话说就是虽然由于回复型投资者的存在,价格不会偏离其基准值太远,在一定程度上起到稳定市场的作用,但回复型投资者仍然是投资者,他们的存在会增加市场的复杂性。二是本文将开发商和购房者将客观的基本面信息与各自的主观信念相结合进行决策,从房地产市场内部展示基本面信息和主观信念对房地产价格的影响,揭示房地产市场陷入低房价陷阱的原因,并从政策制定者的角度分析不同房地产调控政策的有效性及其规避低房价陷阱的可能性。

1 模型

考虑由政府、开发商和两类购房者(自住购房者和投资购房者)组成房地产市场^②。政府决定着此市场的基本面数据,如购房首付比和地价等。开发商决定每一期房地产的供应量。自住购房者根据自己的收入决定自己对房地产的刚性需

求,而投资购房者则根据自己对未来房地产市场的预期决定每一期的购(卖)房量。最终房地产的价格由房地产市场的供需均衡来决定。为了更清晰地分析投资购房者在房地产市场中的作用,首先分析不含投资购房者的市场,也即刚性需求的房地产市场。以此为基准,再分析投资行为对房地产价格的影响。

1.1 刚性需求的房地产市场

刚性需求的房地产市场主体是自住购房者和开发商。市场中自住购房者 B 对房地产的需求是为了满足自己自住的需要,房地产是自住购房者 B 的必需品。因此,自住购房者 B 对房地产的需求是刚性的,假设此需求的弹性为 1,即

$$h_n^B P_n = F(Y_n^B) \quad (1)$$

式中 h_n^B 表示自住购房者 B 在时刻 n 对房地产的需求; P_n 是时刻 n 的房地产价格; Y_n^B 代表自住购房者 B 在时刻 n 的收入; $F(\cdot)$ 是单调增函数。式(1)说明自住购房者买多少房地产与当时的房地产价格以及自己的收入水平有关:当收入上升时,购房量增加;当房地产价格上涨时,购房量减少。为便于说明,这里取 $F(x) = x/\theta^B$,其中 $\theta^B \in (0, 1]$ 代表自住购房者 B 的首付能力,或者说 $1/\theta^B \in [1, \infty)$ 代表自住购房者 B 的融资能力。为了简化起见,假设自住购房者 B 的收入为常量,即在任意时刻 n , $Y_n^B \equiv Y^B$ 。基于如上假设,可以得到自住购房者 B 的购房量 h_n^B 为

$$h_n^B = \frac{Y^B}{\theta^B P_n} (> 0) \quad (2)$$

自住购房者 B 需要的房地产由房地产开发商 D 供给。开发商的开发量以成本和收益为导向:价格越高,开发越多;成本越低,供给越多。为简化模型,这里用线性供给曲线来刻画开发商 D 的供给,即开发商 D 的供给量 h_n^D 为

$$h_n^D = \frac{P_n}{C} \quad (3)$$

式中 C 为开发商 D 的开发成本 $C > 0$ 。

② 假设房地产在满足购房者自住需求的同时,还具有投资功能。文中侧重分析投资购房行为对房地产价格的影响,因此假设在使用和投资房地产的过程中,房地产具有任意分割性。当考虑房地产不可任意分割的特殊属性时,系统会变得不连续,大大增加系统的复杂程度,这超出了本文的研究范围,将它作为未来的研究方向。

房地产价格来自房地产市场的供需均衡,即

$$h_n^B = h_n^D \quad (4)$$

将式(2)与式(3)相结合,在均衡条件式(4)

下可以得到刚性需求的房地产价格为 $P_n = \bar{P}$,

$$\bar{P} = \left(\frac{C Y^B}{\theta^B} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

这个价格被称为房地产的基准价格. 该基准价格由购房者的收入水平(Y^B)、开发商的开发成本(C)以及购房的首付比(θ^B)决定. 收入越高、开发成本越高或者购房首付比越低,房地产价格就会越高. 下面考虑含有投资购房者的房地产市场,通过与刚性需求的房地产市场相比较,分析投资购房者对房地产价格及相应政策的影响.

1.2 含有投资购房者的房地产市场

房地产不仅是满足人们自住需求的商品,也是很好的投资工具. 因此,房地产市场中除了自住购房者和开发商,还有投资者. 投资购房者 I 的决策依赖于他自己对未来房地产价格的预期^③,即

$$h_n^I = \alpha^I R_{n+1}^I \quad (6)$$

式中 h_n^I 为时刻 n 投资购房者 I 在房地产市场中的投资量; α^I 为度量投资购房者 I 对自己预期的反应强度 $\alpha^I > 0$. R_{n+1}^I 为投资购房者 I 对时刻($n+1$)房地产市场的预期. $R_{n+1}^I > 0$ 意味着投资购房者 I 认为如果在时刻 n 投资房地产市场,那么在时刻($n+1$)会拥有正回报. 这使得投资购房者 I 愿意在时刻 n 购买房地产,即 $h_n^I > 0$. 反之, $R_{n+1}^I < 0$ 说明投资购房者 I 预测价格要下降,因此他愿意卖出房地产,即 $h_n^I < 0$. 在给定投资购房者 I 预期的情况下,如果他对自己预期的反应强度(α^I)越大,那么他愿意交易房地产的量就越大.

在这样的市场中,房地产的价格由自住购房者、投资购房者和开发商之间的供需关系决定,

即房地产价格使得市场中的供需达到均衡,满足^④

$$h_n^B + h_n^I = h_n^D \quad (7)$$

将式(4)与式(7)比较,可以看到除了刚性需求和供给对房地产价格有影响,投资购房者对未来市场的预期也成为影响房地产价格走势的重要因素. 根据式(2)、式(3)、式(6)和式(7),不难得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_n}{\partial Y^B} > 0, \quad \frac{\partial P_n}{\partial \theta^B} < 0, \quad \frac{\partial P_n}{\partial C} > 0, \quad \frac{\partial P_n}{\partial R_{n+1}^I} > 0, \\ \frac{\partial P_n}{\partial \alpha^I} R_{n+1}^I > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

因此,类似于刚性需求的房地产市场,收入越大、首付比越小(融资能力越强)或者成本越高,房地产价格就越高. 然而在含有投资购房者的房地产市场中,房地产价格还正相关于投资购房者的预期. 投资购房者越乐观,越容易将房地产价格推高,而且投资购房者对市场趋势(上升或下降)的反应强度越大,房地产价格变化(上升或下降)就越剧烈. 因此,投资购房者在整个房地产市场中起着非常重要的作用. 下面将具体分析投资购房者的不同预期对房地产价格的影响.

2 房地产价格

根据上一节的描述,可以看出房地产市场的主体是自住购房者、投资购房者和房地产开发商,其中自住购房者和房地产开发商的决策行为较为稳定,分别由式(2)和式(3)决定,而投资购房者的决策过程依赖于其自身对未来房地产价格的预期. 假设投资购房者是有限理性的,他们会利用历史信息不断更新自己对未来房地产市场的预期. 类似于文献[30],假设有两种投资购房者存在于市场中,即外推型投资者(E)和回复型投资者(MR),他们在时刻 n 会基于前一期的房地产

③ 假设投资购房者有雄厚的财力. 此财力可能来自于他们自己的钱,也可能是通过加杠杆或者其他方式实现的. 这里不考虑此财力来源的约束,也就是说只要投资购房者有这个财力,就假设他们可以根据自己的策略进行决策,而不会受这个财力来源的限制.

④ 不失一般性,假设自住购房者、投资购房者和开发商的数量均为 1. 这是因为自住购房者和投资购房者之间不能相互转化,如果假设自住购房者的市场份额为 φ^B ,那么可以将 φ^B 和 Y^B 合在一起定义新的参数 $\tilde{Y}^B (= \varphi^B Y^B)$ 为总收入,这不会影响文中的主要结果. 对于投资购房者和开发商的市场份额,可以做类似的变换转化为 1.

价格 P_{n-1} 做出自己的投资决策.

对于外推型投资者, 他们认为房地产价格的变动具有连续性, 即如果前一期价格高于(低于)基准价格, 那么下一期价格会进一步上涨(下跌). 因此, 外推型投资者的信念用公式可以表示为

$$R_{n+1}^E = \tilde{f}(P_{n-1} - \bar{P}) \quad (9)$$

式中 \tilde{f} 是外推型投资者的反应强度, $\tilde{f} > 0$. 进而根据式(6), 外推型投资者的需求可以表示为

$$\begin{aligned} h_n^E &= \alpha^E R_{n+1}^E \\ &= \alpha^E \tilde{f}(P_{n-1} - \bar{P}) = \tilde{f}(P_{n-1} - \bar{P}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\tilde{f} = \alpha^E \tilde{f}$ 度量了外推型投资者总的外推强度, $\alpha^E \tilde{f} > 0$.

相对而言, 回复型投资者则认为如果前一期的价格高(低)于基准值, 说明房地产价格被高(低)估了, 那么下一期的价格就会下降(上涨)进而回归它的基准值, 即

$$R_{n+1}^{MR} = \tilde{g}(\bar{P} - P_{n-1}) \quad (11)$$

式中 \tilde{g} 度量了回复型投资者的反应强度 $\tilde{g} > 0$. 相应地, 回复型投资者的需求为

$$\begin{aligned} h_n^{MR} &= \alpha^{MR} R_{n+1}^{MR} \\ &= \alpha^{MR} \tilde{g}(\bar{P} - P_{n-1}) = \tilde{g}(\bar{P} - P_{n-1}) \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\tilde{g} = \alpha^{MR} \tilde{g}$ 是回复型投资者总的回复强度, $\alpha^{MR} \tilde{g} > 0$. 因此, 市场总的投资需求^⑤可以表示为

$$\begin{aligned} h_n^I &= \omega_n h_n^E + (1 - \omega_n) h_n^{MR} \\ &= [\omega_n \tilde{f} - (1 - \omega_n) \tilde{g}](P_{n-1} - \bar{P}) \end{aligned} \quad (13)$$

式中 ω_n 代表时刻 n 外推型投资者在所有投资购房者中占有的比例.

因为投资购房者具有有限理性, 所以他们每一期会根据市场情况来选择自己对未来的预期方式, 也即每一期外推型投资者和回复型投资者在市场中所占的比例是变化的. 类似于文献 [34], 取 ω_n 为

$$\omega_n = \frac{1}{1 + \mu (P_{n-1} - \bar{P})^2} \quad (14)$$

式中 μ 是选择强度, $\mu > 0$, μ 越大代表市场中的投资者越保守, 会有越多的人采用回复型投资策略; 反之, μ 越小代表市场对风险资产的基准价格越不敏感, 使得越多的人倾向于从市场趋势中挖掘投资信息. 式(14)说明当价格偏离基准值越远时, 会有越多的投资者认为价格偏离真实值, 因此回复型投资者越多, 即 ω_n 下降.

将式(2)、式(3)和式(13)代入市场出清条件(7)中, 可以得到此时的房地产价格需要满足

$$m_0 P_n^2 - m_{1n} P_n - m_2 = 0 \quad (15)$$

式中 m_0 代表成本因子 $m_0 = \frac{1}{C}$; m_{1n} 代表投资因子, $m_{1n} = m_{1n}(P_{n-1}) h_n^I$; m_2 代表刚性需求因子, $m_2 = \frac{Y^B}{\theta^B}$. 因此, 在含有投资购房者的房地产市场中, 房地产的价格由一维动力系统描述, 即

$$\begin{aligned} P_n &= G(P_{n-1}) \\ &= \frac{m_{1n}(P_{n-1}) + \sqrt{m_{1n}^2(P_{n-1}) + 4m_0 m_2}}{2m_0} \end{aligned} \quad (16)$$

图 1 和图 2 为特定条件下房地产价格的一维动力学性质.

从系统(16)可以看出, 投资购房者的预期对房地产价格有直接而重要的影响. 以外推型投资者为例说明投资行为对房地产价格的影响, 回复型投资者的行为可以类似分析.

对于系统(16), 首先研究它的稳态^⑥ P^* 需要满足

$$(P^* - \bar{P}) T(P^*) = 0 \quad (17)$$

$$T(P^*) = a(P^*)^3 + b(P^*)^2 + cP^* + d = 0 \quad (18)$$

式中

$$a = \mu(m_0 + g), \quad b = -\mu\bar{P}(m_0 + 2g),$$

$$c = m_0(1 - \mu\bar{P}^2) - f + \mu\bar{g}\bar{P}^2,$$

$$d = m_0\bar{P}(1 + \mu\bar{P}^2)$$

因此, 式(18)的根所对应的判别式 Δ 为

⑤ 不失一般性, 假设 $\alpha^I = 1$, 那么市场总的投资需求根据式(6)可分解为 $\alpha^I = 1$ 和 $R_{n+1}^I = \omega_n h_n^E + (1 - \omega_n) h_n^{MR}$.

⑥ 这里所说的稳态是指价格达到这一水平后就不再变动了. 用数学术语表述就是达到了系统(16)的不动点.

$$\Delta = 27 a^2 d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4 b^3 d - b^2 c^2$$

进而可以得到如下结果.

命题 1 (稳态的存在性、稳定性及其分岔) 记 f^* 为 $\Delta = 0$ 的唯一正根和 $f^{**} = 2 C^{-1}$.

1) 当 $0 < f < f^*$ 时, 基准价格 \bar{P} 是系统(16) 的唯一稳态且稳定.

2) 在 $f = f^*$ 处, 系统(16) 发生了一次鞍结分岔(saddle-node bifurcation), 出现了两个不同于基准价格的稳态^⑦(P_1^*, P_2^*), 其中 $P_2^* \geq P_1^* > 0$.

3) 当 $f^* < f < f^{**}$ 时, P_1^* 是不稳定的而 P_2^* 是稳定的, 同时基准价格 \bar{P} 仍然保持稳定.

4) 在 $f = f^{**}$ 处, 系统(16) 经历了一次跨临界分岔(transcritical bifurcation).

5) 当 $f > f^{**}$ 时, 基准价格 \bar{P} 丧失稳定性, 同时 P_1^* 变成稳定的稳态.

命题 1 说明一旦投资购房者存在于市场中, 房地产的基准价格 \bar{P} 就不一定能反映整个市场的情况. 当外推型投资者的外推强度较小时, 即 $0 < f < f^*$, 基准价格 \bar{P} 是系统(16) 的唯一稳态且稳定. 这说明此时不管初始价格在哪里, 系统(16) 经过一段时间的演化, 价格都会回归到其基准价格 \bar{P} . 换句话说, 在这种情况下, 房地产价格主要由其基准价格决定.

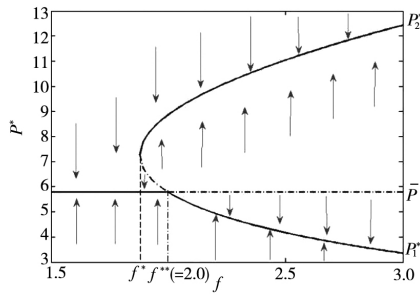
然而, 当外推型投资者提高其外推强度使得 $f^* < f < f^{**}$ 时, 也即他们认为房地产的价格将会以较大的强度继续维持前一期的趋势, 那么系统(16) 会经历一次鞍结分岔, 使得两个不同于基准价格的稳态(P_1^*, P_2^*) 出现, 其中 P_2^* 稳定而 P_1^* 不稳定. 此时, 基准价格 \bar{P} 继续保持其稳定性. 这使得系统(16) 出现双吸引子 P_2^* 和 \bar{P} . 双吸引子的存在意味着在这样的系统中价格最终的走向是状态依赖的, 不同的初始状态最终会有不同的价格走势. 如图 1(b) 所示, 当初始价格高于 P_1^* 时, 价格会慢慢收敛到 P_2^* ; 而当初始价格低于 P_1^* 时, 价格会慢慢收敛到 \bar{P} . 对于这样简单的演化系统, 出现稳定的基准价格和稳定的非基准价格共存的现象, 可以有如下的经济直观解

释. 如果外推型投资者采用相对较高的外推强度 ($f^* < f < f^{**}$), 但此强度不足以使向上偏离基准价格不大的房地产价格进一步远离其基准值, 那么价格最终会回归到基准价格. 另外, 由于刚性需求的存在, 价格向下偏离基准值也不会太远, 因此也会最终回归到基准价格. 但是如果价格向上偏离基准值较远, 那么这个趋势就会被加强. 这是因为刚开始的时候, 由于上升趋势的存在使得采用外推型投资策略的购房者较多, 他们认为房地产价格会进一步上涨而偏离基准价格, 所以他们愿意购买房地产, 进而增大对房地产的需求, 使得房地产价格进一步上涨. 而价格的上涨反过来又验证了外推型投资者的信念使得他们愿意买更多, 进而价格上涨得也更多. 但是这种上涨不是无止境的, 因为回复型投资者存在于市场中, 他们相信市场最终应该回归其基准值. 当价格上涨超过基准价格时, 回复型投资者就会卖房地产, 而且随着房地产价格的进一步上涨, 回复型投资者变多, 使得卖房地产的增加, 进而与外推型投资者的购买需求在一定程度上达到平衡, 最终让价格稳定在高于基准的价格水平 P_2^* 上. 从这里可以看出, 市场主体的多元化在活跃市场的同时, 也为市场提供了达到不同平衡的可能性, 进而有稳定市场的作用.

随着外推型投资者进一步提高其外推强度使得 $f > f^{**}$, 基准价格将最终丧失其稳定性, 原来不稳定的非基准价格 P_1^* 变成稳定的, 而另一个非基准价格 P_2^* 在一定范围内仍然可以保持其稳定性. 此时系统仍然存在双吸引子 P_1^* 和 P_2^* , 它们的吸引域被基准价格 \bar{P} 所分割. 换句话说, 也就是在这种情况下房地产价格偏离其基准值已不可避免. 特别是当初始价格高于基准价格时, 由于外推型投资者的作用, 价格会进一步向上偏离; 最终在外推型和回复型投资者的相互作用下, 价格稳定到 P_2^* . 类似地, 如果初始价格低于基准价格, 那么外推型投资者认为价格会进一步下降进而卖出房地产, 使得价格继续下降. 但是随着价格偏离其基准值越来越远, 认为价格被低估的投资者也越来越多, 使得回复型投资者的购买需求

⑦ 后文称不同于基准价格的稳态(P_1^*, P_2^*) 为非基准价格.

与外推型投资者的卖出需求在一定程度上达到平衡,进而把价格稳定到 P_1^* (如图 1(a) 所示).

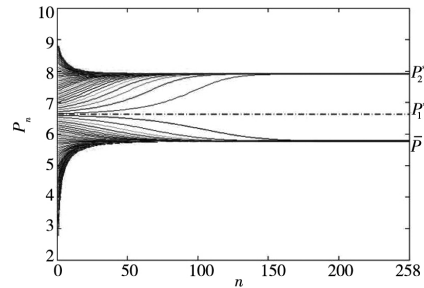


(a) 分岔图

在 $f^* = 1.879$ 处发生鞍结分岔; 在 $f^{**} = 2.0$ 处发生跨临界分岔

(a) Bifurcation plot

A saddle-node bifurcation at $f^* = 1.879$; A transcritical bifurcation at $f^{**} = 2.0$



(b) 双吸引子 \bar{P} 和 P_2^*

在 $f=1.9$ 处的双吸引子^⑧.

(b) Two attractors, \bar{P} and P_2^*

Two attractors at $f=1.9$ ^⑧

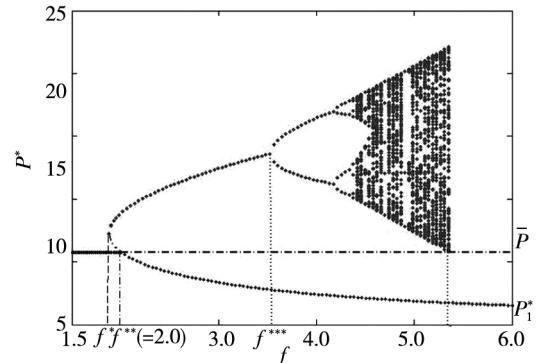
图 1 房地产价格的一维动力学性质 I

$Y^B = 10, \theta^B = 0.3, \mu = 0.01, C = 1$ 和 $g = 2$

Fig. 1 One dimensional dynamical system characteristics of housing prices I

$Y^B = 10, \theta^B = 0.3, \mu = 0.01, C = 1$ and $g = 2$

根据以上分析,可以看到投资购房者对未来房地产市场的预期影响着房地产价格的走向,投资购房者的存在是造成房地产价格偏离其基准值的重要因素. 另外,也可以看到在系统(16)中,房地产价格朝哪个方向偏离基准价格是随着购房者外推强度的变化而不断变化的. 比如当外推型投资者的外推强度增强时,依赖市场的情况,房地产价格不但能向上偏离基准价格,而且可以向下偏离,这是因为较小的非基准价格 P_1^* 从不稳定变成稳定. 对于较大的非基准价格 P_2^* , 它的稳定性也不是一成不变的. 下面的结果描述了 P_2^* 的稳定性随着外推型投资者的外推强度增加而变化的情况.

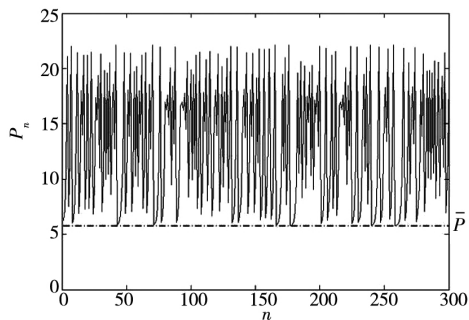


(a) P_2^* 的二次分岔图

星号(*)代表稳定的吸引子,点划线(- -)代表不稳定的吸引子

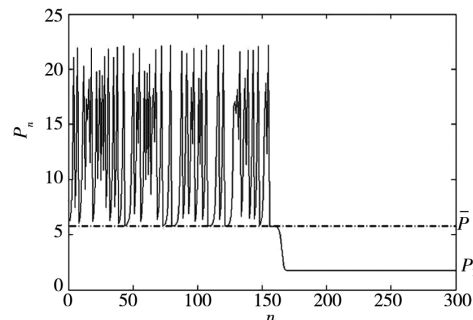
(a) Secondary bifurcation plot of P_2^*

stars (*) represent stable attractors while unstable attractors are on point lines (- -).



(b) 在 $f=5.360 \leq f^\#$ 处的时间序列图

(b) Time series at $f=5.360 \leq f^\#$



(c) 在 $f=5.361 \geq f^\#$ 处的时间序列图

(c) Time series at $f=5.361 \geq f^\#$

图 2 房地产价格的一维动力学性质 II

⑧ 文中所列的结论对所有参数均成立. 图形参数的选取仅为了更好地进行图形展示. 比如对于参数 μ , 由于 μ 越大 f^* 和 f^{**} 越接近, 因此为了在图形中更清晰地展示系统发生了鞍结和跨临界两次分岔, 文中取 $\mu = 0.01$.

$$Y^B = 10, \theta^B = 0.3, \mu = 0.01, C = 1 \text{ 和 } g = 2$$

Fig. 2 One dimensional dynamical system characteristics of housing prices II

$$Y^B = 10, \theta^B = 0.3, \mu = 0.01, C = 1 \text{ and } g = 2$$

命题2 (二次分岔) 存在 $f^{***} > f^*$ 使得在 $f = f^{***}$ 处, P_2^* 经历一次倍周期分岔(period-doubling bifurcation) .

命题2 说明虽然回复型投资者可以平衡外推型投资者的头寸使得价格不是无限远离基准价格而是稳定在其他的稳态处,但是如果外推型投资者的外推强度很强,复杂的价格波动仍然会发生. 特别当 $f = f^{***}$ 时,系统会出现一次倍周期分岔(如图2(a)所示),使得当 $f > f^{***}$ 时, P_2^* 丧失其稳定性,同时一个稳定的二周期轨出现. 而且,当外推型投资者的外推强度进一步增加时,系统会继续产生一连串的倍周期分岔,使得系统出现混沌,相应的吸引子也越来越大. 最终,在 $f = f^\#$ 处,该吸引子的边界到达了房地产的基准价格 \bar{P} . 当 $f > f^\#$ 时,因为倍周期分岔的吸引子已经进入到非基准价格 P_1^* 的吸引域中,所以所有的价格都会最终收敛到 P_1^* ,也就是进入了低房价陷阱,如图2(b)和图2(c)所示. 通过上述分析可以看到,当外推型投资者的外推强度很大时,房地产市场可以被投资购房者的行为短暂推高,但是这种高价格只是瞬间的,投资者因为一点悲观信息(如 $P_{n-1} < \bar{P}$),就会大量清空自己手中的头寸,进而使得市场陷入萧条. 因此,对于政策制定者来说,应该采取措施避免投资者的过度行为,进而避免房地产市场陷入长期的萧条.

3 价格影响因素及政策建议

3.1 投资购房者行为的综合影响

结合命题1和命题2,可以看到外推型投资者的存在使得系统(16)会出现价格偏离基准价格、路径依赖、超额波动以及陷入低房价陷阱等现象,这些现象貌似与回复型投资者的关系不大. 特别地,跨临界分岔边界 ($f^{**} = 2C^{-1}$) 仅依赖开发成本 C ,是回复型投资者回复强度 (g) 的常值函数,也就是说基准价格的稳定性不依赖回复型投资者的行为. 基准价格只有当外推型投资者

的外推强度 (f) 大于 $2C^{-1}$ 时才会丧失稳定性,但是这并不意味着可以忽略回复型投资者的作用. 实际上,回复型投资者具有双面作用. 一方面,第2节展示了回复型投资者可以平衡外推型投资者的头寸,让市场稳定在另一个稳态上. 图3为 $f-g$ 关系图,显示鞍结分岔的边界 (f^*) 关于回复型投资者的回复强度 (g) 单调上升. 这也就是说当回复型投资者强烈地觉得房地产价格远远偏离了其基准值应该回归时,他们可以起到稳定市场的作用,因为他们延迟了市场中其他稳态的出现. 换句话说就是回复型投资者延迟了房地产价格偏离其基准值的时间,使市场波动变小. 另一方面,回复型投资者仍然是投资购房者,他们的存在也会让市场变得更复杂. 这体现在倍周期分岔的边界 (f^{***}) 是关于回复型投资者回复强度 (g) 的减函数. 也就是说当房地产价格偏离其基准值时,回复型投资者的存在实际加大了市场的复杂性. 这是因为回复型投资者的回复强度越大,系统非基准价格 P_2^* 越早出现倍周期分岔进而丧失稳定性,使得市场波动加大,甚至出现混沌现象,最终陷入低房价陷阱.

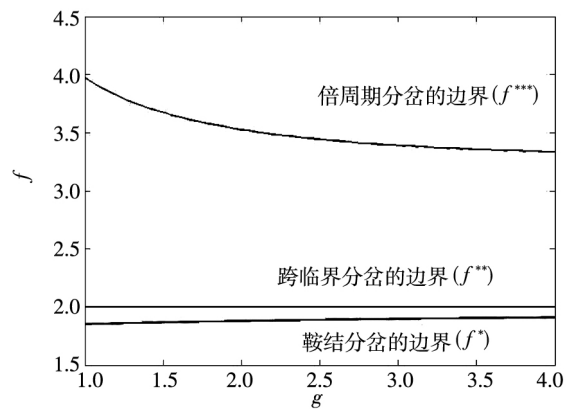


图3 在 $f-g$ 平面中不同类型的分岔边界

$$Y^B = 10, \theta^B = 0.3, \mu = 0.01, C = 1$$

Fig. 3 Different bifurcation boundaries on the $f-g$ plane

$$Y^B = 10, \theta^B = 0.3, \mu = 0.01, C = 1$$

综上可见,房地产市场是在经济大环境下所有主体综合作用的市场. 然而,如果经济环境变化了,那么对不同的市场主体会产生不同的影

响,进而会改变房地产价格的走势. 因此,政府可以通过一些措施改变经济环境,进而起到调控房地产市场的作用. 下面将分析和检验常见房地产调控政策的有效性.

3.2 政策变量的影响

虽然房地产市场的主体是购房者和开发商,但是由式(5)及命题 1 和命题 2 可以看出,基准价格 \bar{P} 以及分岔参数 (f^* , f^{**} , f^{***}) 都依赖市

场中的一些基础经济变量,如首付比和开发成本. 这说明房地产市场的演化依赖市场环境. 因此,当房地产市场由于投资开始出现泡沫时,政府可以通过调整这些基础经济变量来调控房地产市场^[35,36]. 因而,政府是房地产市场重要的参与者.

下面将以首付比和开发成本为例说明在第 2 节给出的框架下,政府对基础经济变量的调整与房地产价格演化之间的关系.

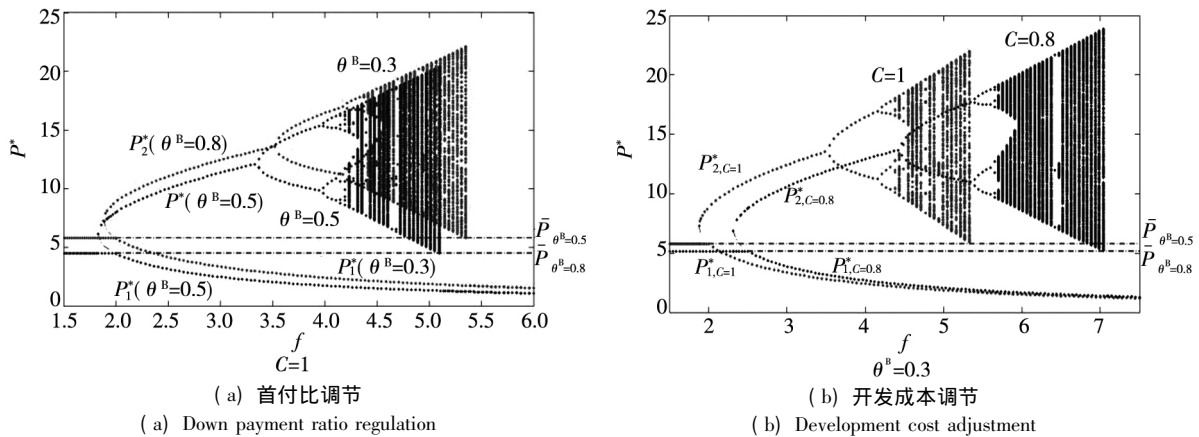


图 4 不同房地产调节政策的效果

$$Y^B = 10, \mu = 0.01, g = 2$$

Fig. 4 Different housing regulation policies have different effects

$$Y^B = 10, \mu = 0.01, g = 2$$

3.2.1 首付比

由式(2)和式(5)可知首付比可以影响购房者的刚性需求,进而对房地产的基准价格产生影响: 较低的首付比对应较高的刚性需求,因此有较高的房地产基准价格; 提高首付比会降低房地产的基准价格,使得相应的房地产价格水平整体下降. 如图 4(a) 所示,当首付比调高时,基准价格 \bar{P} 、较大的非基准价格 P_2^* 和较小的非基准价格 P_1^* 都下降了. 因为投资购房者将房地产的基准价格作为参考价格,所以首付比调节也会间接影响投资购房者的行为. 因此,首付比调节是政策制定者可以采用的一种调控房地产市场的措施,但是它的调控效果不明显而且有时会恶化市场环境. 这主要有两方面的原因. 第一,由图 4

(a) 可以看出,首付比调节主要是影响刚性需求,不会改变基准价格的稳定性,因此对房地产价格的调控效果不明显^⑨. 第二,如果市场过热而且投资购房者的外推强度超强(如 $f = 5.3$ 接近 f^*),那么通过首付比调控房地产市场会让调整后的市场更容易陷入低房价陷阱,因为首付比提高后的市场对价格更敏感,进而使得房地产价格提前进入萧条的时刻($f^{\#}$),如图 4(a) 所示. 当市场低迷时,如果通过降低首付比来刺激市场,那么基准价格虽然上升了,但是其稳定性并没有改变,因此可能会让房地产价格稍有回升,但是作用有限^⑩. 于是,从整体来看,通过调节首付比来调控房地产市场的效果并不理想.

3.2.2 开发成本

⑨ 这里所说的首付比调节对房地产价格的调控效果不明显是指: 比如当市场过热的时候,首付比调高可能会使价格下降,但这取决于政策执行的时机. 如果时机合适,那么首付比调高会使价格下降,但是下降的幅度有限. 如果时机不合适,那么首付比调高后价格仍然会继续上涨(只是上涨的幅度稍微有所减小). 更详细的内容请参见文献[30].

⑩ 类似文献[30]这里的任何因素都不是孤立起作用的,不能单独看 f (或者 g) 相对于 θ^B 或者 C 来说是让市场稳定或不稳定,价格具体会朝哪个方向运行是由经济基本面(m_2)、投资者行为(μ, f, g)和开发商成本(C)共同决定的.

根据式(3)和式(5)及命题1和命题2,可以看出开发成本(C)不但影响开发商的供给和基准价格,而且还直接决定了投资购房者外推强度的分岔参数(f^* , f^{**} , f^{***}),也即决定了投资购房者对房地产价格的影响。这里的开发成本可以包括土地成本、融资成本以及建筑成本等,其中土地成本是开发商最重要的成本。在许多国家,土地由政府管理,因此政府可以通过调整土地供给来改变开发商的开发成本,进而起到调控房地产市场的作用。这里以 C 从1降到0.8为例说明调低开发成本对房地产市场的影响。首先,从图4(b)可以看出,当开发成本下降时,开发商的供给量会增加,相应的基准价格会下降。然而,不同于首付比的情况,房地产价格的整体水平没有下降。特别地,对于非基准价格,当开发成本下降时,较大的非基准价格(P_2^*)会下降,而较小的非基准价格(P_1^*)会上升。其次,开发成本降低也减弱了投资购房者对房地产价格的影响,因为房地产基准价格的稳定域扩大了,房地产价格可以更多地反映基本面信息。最后,降低开发成本还可以推迟非基准价格的倍周期分岔(f^{***} 变大),进而降低房地产价格进入低房价陷阱的可能性(如图4(b)所示, $f^\#$ 变大)。因此,通过降低开发成本来调控房地产市场会起到与首付比调节不同的效果,即降低开发成本具有稳定市场,让房地产价格回归基准值的作用。

相反地,不管市场是过热还是低迷,如果调高开发成本,对于房地产市场都不是好的调节方式,甚至可能恶化房地产市场环境。这是因为开发成本的提升会提高房地产的基准价格,同时会加强投资购房者对房地产市场的影响(f^{**} 减小,基准价格更易不稳定),这进一步会增强房地产价格上涨或者下跌的可能性,进而恶化整个房地产市场环境,甚至陷入低房价陷阱。

综合以上对两种房地产调控措施的分析,可

以发现相对首付比调节来说,开发成本调节在调整自住购房者需求的同时,也改变投资购房者对房地产价格的影响,因此能起到综合调控房地产市场的作用。由此可见,开发成本调节对房地产市场的调控更有效。特别地,降低开发商的开发成本能增强市场的理性程度,降低外推型投资者的影响,有助于基准价格的稳定,可以起到稳定市场的作用。

4 结束语

房地产不但是人们生活的必需品,也是很好的投资工具。本文在考虑房地产自然属性的同时,也考虑了它的投资属性,把投资购房者作为房地产市场的重要主体,将购房者的投资行为纳入房地产价格的研究中,构造了自住购房者、投资购房者和开发商之间的供需均衡模型。通过与刚性需求的房地产市场相比较,发现基本面信息(如收入、成本、首付比等)仅决定了房地产价格的基准值,投资购房者的行为才是影响房地产价格变化的重要因素。特别地,外推型投资者追逐价格趋势,对房地产价格的走势有推波助澜的作用;回复型投资者虽然相信价格回归基准,他们的买卖行为能平衡外推型投资者的需求,进而起到稳定市场的作用,但是作为投资购房者,他们的存在会增加市场的复杂性。当房地产市场的不同主体相互作用时,房地产价格会出现偏离基准价格、路径依赖、巨额波动、低房价陷阱等现象。政府通过调整基础经济变量(如首付比和开发成本),能起到调控房地产市场的作用,但是不同调控措施的效果是不一样的。相对首付比调节来说,开发成本的调节既能调整房地产的基准价格,又能改变投资购房者对房地产价格的影响,可以起到综合调控房地产市场的作用,是比较有效的措施。

参考文献:

- [1]原鹏飞,魏巍贤. 房地产价格波动经济影响的一般均衡研究[J]. 管理科学学报, 2012, 15(3): 30-43.
Yuan Pengfei, Wei Weixian. Effects of real-estate price fluctuation on economy: From general equilibrium view[J]. Journal of Management Sciences in China, 2012, 15(3): 30-43. (in Chinese)

- [2]Stein J. Prices and trading volume in the housing market: A model with downpayment effects[J]. Quarterly Journal of Economics, 1995, 110(2): 379–406.
- [3]Mankiw N, Weil D. The baby boom, the baby bust, and the housing market[J]. Regional Science and Urban Economics, 1989, 19(2): 235–258.
- [4]Jeanty P, Patridge M, Irwin E. Estimation of a spatial simultaneous equation model of population migration and housing price dynamics[J]. Regional Science and Urban Economics, 2010, 40(5): 343–352.
- [5]Gallin J. The long-run relationship between house prices and rents[J]. Real Estate Economics, 2008, 36(4): 635–658.
- [6]Van Nieuwerburgh S, Weill P. Why has house price dispersion gone up? [J]. Review of Economic Studies, 2010, 77(4): 1567–1606.
- [7]McQuinn K, O'Reilly G. Assessing the role of income and interest rates in determining house prices[J]. Economic Modelling, 2008, 25(3): 377–390.
- [8]Agnello L, Schuknecht L. Booms and busts in housing markets: Determinants and implications[J]. Journal of Housing Economics, 2011, 20(3): 171–190.
- [9]Eerola E, Määttänen N. Borrowing constraints and housing market liquidity[J]. Review of Economic Dynamics, 2018, 27: 184–204.
- [10]王海勇. 房地产税收的一般经济分析[J]. 税务与经济, 2004, (6): 61–63.
Wang Haiyong. The general economic analysis of the housing and land tax[J]. Taxation and Economy, 2004, (6): 61–63. (in Chinese)
- [11]况伟大. 房价与地价关系研究: 模型及中国数据检验[J]. 财贸经济, 2005, (11): 56–63.
Kuang Weida. A study on the relationship between housing pricing and land pricing: Basic model and evidence from China [J]. Finance & Trade Economics, 2005, (11): 56–63. (in Chinese)
- [12]杨海珍, 向悦, 王开阳. 推动中国商品住宅价格的主要因素: 时期与城市差异[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(9): 2256–2266.
Yang Haizhen, Xiang Yue, Wang Kaiyang. Determinants of Chinese urban house price: Time variation and city disparity [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2018, 38(9): 2256–2266. (in Chinese)
- [13]陈创练, 戴明晓. 货币政策、杠杆周期与房地产市场价格波动[J]. 经济研究, 2018, 53(9): 52–67.
Chen Chuanglian, Dai Mingxiao. Monetary policy, leverage cycle and house price fluctuation [J]. Economic Research Journal, 2018, 53(9): 52–67. (in Chinese)
- [14]Shiller R. Irrational Exuberance[M]. 2 ed. Princeton: Princeton University Press, 2005.
- [15]Shiller R. The Subprime Solution[M]. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [16]沈悦, 刘洪玉. 住宅价格与经济基本面: 1995–2002年中国14城市的实证研究[J]. 经济研究, 2004, 39(6): 78–86.
Shen Yue, Liu Hongyu. Housing prices and economic fundamentals: A cross city analysis of China for 1995–2002 [J]. Economic Research Journal, 2004, 39(6): 78–86. (in Chinese)
- [17]Granziera E, Kozicki S. House price dynamics: Fundamentals and expectations[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2015, 60: 152–165.
- [18]Wheaton W. Real estate “cycles”: Some fundamentals[J]. Real Estate Economics, 1999, 27(2): 209–230.
- [19]Case K, Shiller R. The efficiency of the market for single-family homes[J]. American Economic Review, 1989, 79(1): 125–137.
- [20]Case K, Shiller R. Forecasting prices and excess returns in the housing market[J]. Real Estate Economics, 1990, 18(3): 253–273.
- [21]Clayton J. Are housing price cycles driven by irrational expectations? [J]. Journal of Real Estate Finance and Economics, 1997, 14(3): 341–363.
- [22]Zhang D, Liu Z, Fan G. Price bubbles and policy interventions in the Chinese housing market[J]. Journal of Housing and

- the Built Environment ,2017 ,32(1) : 133 – 155.
- [23]Liu R , Hui E , Lv J , et al. What drives housing markets: Fundamentals or bubbles [J]. Journal of Real Estate Finance and Economics ,2017 ,55: 395 – 415.
- [24]Garfinkel J , Sokobin J. Volume , opinion divergence , and returns: A study of post-earnings announcement drift [J]. Journal of Accounting Research ,2006 ,44(1) : 85 – 112.
- [25]Chang E , Xu J , Zheng L. Short sale constraints , heterogeneous interpretations , and asymmetric price reactions to earnings announcements [J]. Journal of Accounting and Public Policy ,2013 ,32(6) : 435 – 455.
- [26]Chia W , Li M , Zheng H. Behavioral heterogeneity in the Australian housing market [J]. Applied Economics ,2017 ,49(9) : 872 – 885.
- [27]陈国进 , 刘金娥. 异质信念、通货幻觉和我国房地产价格泡沫 [J]. 经济管理 ,2011 ,33(2) : 46 – 53.
Chen Guojin , Liu Jine. Heterogeneous beliefs' money illusion and the housing bubbles in China [J]. Economic Management ,2011 ,33(2) : 46 – 53. (in Chinese)
- [28]Silos P. Housing , portfolio choice and the macroeconomy [J]. Journal of Economic Dynamics and Control ,2007 ,31(8) : 2774 – 2801.
- [29]Burnside C , Eichenbaum M , Rebelo S. Understanding booms and busts in housing markets [J]. Journal of Political Economy ,2016 ,124(4) : 1088 – 1147.
- [30]Zheng M , Wang H , Wang C , et al. Speculative behavior in a housing market: Boom and bust [J]. Economic Modelling ,2017 ,61: 50 – 64.
- [31]Bao T , Hommes C. When speculators meet suppliers: Positive versus negative feedback in experimental housing markets [J]. Journal of Economic Dynamics and Control ,2019 ,107: 103730.
- [32]Abraham J , Hendershott P. Bubbles in metropolitan housing markets [J]. Journal of Housing Research ,1996 ,7(2) : 191 – 207.
- [33]Levin E , Wright R. The impact of speculation on house prices in the United Kingdom [J]. Economic Modelling ,1997 ,14(4) : 567 – 585.
- [34]He X , Westerhoff F. Commodity markets , price limiters and speculative price dynamics [J]. Journal of Economic Dynamics and Control ,2005 ,29: 1577 – 1596.
- [35]郭 琨 , 崔 啸 , 王 珏 , 等. “京十二条”房地产调控政策的影响——基于 TEI@I 方法论 [J]. 管理科学学报 ,2012 ,15(4) : 4 – 11.
Guo Kun , Cui Xiao , Wang Jue , et al. Effects of the “Beijing Twelve Measures” real estate regulation policy: Based on TEI @I methodology [J]. Journal of Management Sciences in China ,2012 ,15(4) : 4 – 11. (in Chinese)
- [36]张李登 , 唐齐鸣 , 张誉航. 房价波动、住房信贷与宏观审慎政策 [J]. 中国管理科学 ,2019 ,27(6) : 1 – 9.
Zhang Lideng , Tang Qiming , Zhang Yuhang. Housing price volatility , housing credit , and macroprudential policy [J]. Chinese Journal of Management Science ,2019 ,27(6) : 1 – 9. (in Chinese)

The impact of investment behavior on housing prices and policies

ZHENG Min

China Institute for Actuarial Science , Central University of Finance and Economics , Beijing 100081 , China

Abstract: Under the given economic environment , this paper studies the equilibrium model of supply and demand among self-owned house buyers , investors , and developers. By comparing with the housing market with rigid demand , it is found that the speculative behavior of investors is an important factor affecting the change of housing prices. In particular , extrapolative investors have a boosting effect on the trend of housing prices , and

mean-reverting investors not only have a stabilizing effect on the market but also increase the market complexity. When there is an interaction among different trading agents in the housing market, housing prices will deviate from their benchmark price, depend on their paths, fluctuate hugely, and fall into the trap of low housing prices. The government can regulate the housing market by adjusting basic economic variables such as down payment ratio and development cost. Compared with the down payment ratio regulation, the development cost adjustment not only can adjust the benchmark price, but also can change the impact of investors' behavior on housing prices and play a comprehensive role in adjusting the market. Therefore, the development cost adjustment is more effective than the down payment ratio regulation.

Key words: housing prices; extrapolative investors; mean-reverting investors; down payment ratio; development cost

附录

命题 1 的证明 1) 根据系统(16), 可以得到

$$\left. \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}} \right|_{P_{n-1}=\bar{P}} = \frac{f}{2m_0}$$

因此, 当 $f < f^{**} = 2C^{-1}$ 时, 基准价格 \bar{P} 是稳定的; 而当 $f > f^{**}$ 时, \bar{P} 变得不稳定.

2) 因为 $\Delta(0) > 0$ 而 $\Delta(f^{**}) < 0$, 所以存在 f^* 满足 $0 < f^* < f^{**}$, 而且当 $f \leq f^*$ 时, $\Delta(f) \geq 0$.

3) 当 $f = f^*$ 时, $\Delta = 0$, 因此系统(16)除了基准价格 \bar{P} , 还有另外两个新的稳态价格 $P_1^*, P_2^* > \bar{P}$ 且满足

$$\left. \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}} \right|_{P_{n-1}=P_2^*, f=f^*} = 1$$

进而可以得到当 $(P_{n-1}, f) = (P_2^*, f^*)$ 时, 系统(16)经历了一次鞍结分岔. 当 $f > f^*$ 时, P_2^* 稳定而 P_1^* 不稳定.

4) 根据跨临界分岔的定义, 可以验证系统(16)在 $(P_{n-1}, f) = (\bar{P}, f^{**})$ 处满足跨临界分岔的条件, 使得当 $f > f^{**}$ 时, \bar{P} 丧失了它的稳定性而 P_1^* 从不稳定变成稳定.

命题 2 的证明 系统(16)在非基准价格 P_2^* 处的特征值为

$$\left. \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}} \right|_{P_{n-1}=P_2^*} = \frac{P_2^*}{\sqrt{m_{1,n}^2(P_2^*) + 4m_0m_2}} \times [\omega^* f(2\omega^* - 1) - (1 - \omega^*)g(2\omega^* + 1)]$$

式中 $\omega^* = (1 + \mu(P_2^* - \bar{P})^2)^{-1}$, 特别地在 $(P_{n-1}, f) = (P_2^*, f^*)$ 处,

$$\left. \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}} \right|_{P_{n-1}=P_2^*, f=f^*} = 1$$

另外, 由 Vieta 公式可知方程(18)的解满足

$$\begin{aligned} P_1^* P_2^* P_3^* &= \frac{-d}{a}, \\ P_1^* + P_2^* + P_3^* &= \frac{-b}{a}, \end{aligned} \tag{A1}$$

$$P_1^* P_2^* + P_1^* P_3^* + P_2^* P_3^* = \frac{c}{a}$$

注意到 a 和 b 不依赖于 f , 但 c 与 f 线性相关. 因此, 可以得到当 $f \rightarrow +\infty$ 时 $P_1^* \rightarrow 0, P_2^* \rightarrow +\infty$ 且 $P_3^* \rightarrow -\infty$, 进而有 $\omega^* \rightarrow 0$. 于是, 当 f 充分大时, Vieta 公式(A1)可以近似为

$$P_2^* + P_3^* \approx \frac{-b}{a} \text{ 和 } P_2^* P_3^* \approx \frac{c}{a}$$

进而 $(P_2^*)^2$ 近似为 $-\frac{c}{a}$ 且

$$\omega^* f \approx \frac{f}{1 + \mu(P_2^*)^2} \approx \frac{f}{1 - \mu \frac{c}{a}} \approx \frac{f}{1 + \mu \frac{f}{a}} \rightarrow \frac{a}{\mu} = q$$

式中 $q = g + \frac{1}{C}$. 于是可以得到当 $f \rightarrow +\infty$ 时

$$\left. \frac{\partial P_n}{\partial P_{n-1}} \right|_{P_{n-1}=P_2^*} \rightarrow \frac{-q - g}{|q - g|} = -2gC - 1 < -1$$

因此, 存在 f^{***} 使得当 $f = f^{***}$ 时, P_2^* 的特征根为 -1 , 也即发生倍周期分岔.