# 附录 A

**命题 1 的证明**

化简优化问题 (A) 的两个约束 $(1-m)P-n+\beta\geq 0, Pr\geq 0$ 分别可以得到 $P\geq\dfrac{n-\beta}{1-m}$ 和 $P\leq\tilde{q}(\lambda)+\alpha$, 为了避免约束集为空集带来的不必要讨论, 本文假设 $\dfrac{n-\beta}{1-m}<\tilde{q}(\lambda)+\alpha$. 优化问题 (A)的目标函数 $\pi$ 是关于价格 $P$ 的凸二次函数:

$$\max_P \pi=[(1-m)P-n+\beta]\left(1-\frac{P-\alpha}{\tilde{q}(\lambda)}\right), \tag{A1}$$

其中 $\tilde{q}(\lambda)=\lambda q_H+(1-\lambda)q_L$. 在不考虑约束条件的情况下 $\pi$ 的最大值点 $\widehat{P}$ 为:

$$\widehat{P}=\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}(\lambda)+\alpha}{2}. \tag{A2}$$

本文不考虑 $\pi$ 恒小于 0 的情况, $\pi$ 有两个零点 $\widehat{P}^1=\dfrac{n-\beta}{1-m}, \widehat{P}^2=\tilde{q}(\lambda)+\alpha$ 且 $\widehat{P}^1\leq\widehat{P}^2$. 考虑到优化问题 (A) 的最优求解结果需要满足 $P\geq\alpha$ 的假设, 因而需不等式 $\alpha\leq\widehat{P}(\alpha,\beta,\lambda)$ 成立. 为了避免出现最优定价低于 $\alpha$ 的情况, 本文假定 $\alpha\leq\dfrac{n-\beta}{2(1-m)}+\dfrac{\tilde{q}(\lambda)+\alpha}{2}$, 即 $\alpha\leq\dfrac{n-\beta}{1-m}+\tilde{q}(\lambda)$. 在 $P\geq\dfrac{n-\beta}{1-m}=\widehat{P}^1$ 和 $P\leq\tilde{q}(\lambda)+\alpha=\widehat{P}^2$ 的约束下, 优化问题 (A) 仍能取到无约束条件下的全局最优点

$$P^*(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}(\lambda)+\alpha}{2}. \tag{A3}$$

将 $P^*(\alpha,\beta,\lambda)$ 代入潜在买家购买商品的概率 $Pr$ 可得

$$Pr^*(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n-\beta}{(1-m)\tilde{q}(\lambda)}+\frac{\alpha}{\tilde{q}(\lambda)}\right). \tag{A4}$$

将 $P^*$ 与 $Pr^*$ 代入卖家利润函数 $\pi$ 中可得

$$\pi^*(\alpha,\beta,\lambda)=\frac{((1-m)(\tilde{q}(\lambda)+\alpha)-n+\beta)^2}{4(1-m)\tilde{q}(\lambda)}. \tag{A5}$$

**推论 1 的证明**

在平台决策 $\{\beta,\lambda\}$ 给定的情况下，求解 $P^*$ 关于 $\alpha$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial P^*}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}>0. \tag{A6}$$

求解 $Pr^*$ 关于 $\alpha$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial Pr^*}{\partial\alpha}=\frac{1}{2\tilde{q}(\lambda)}>0. \tag{A7}$$

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial\alpha}=\frac{(1-m)(\tilde{q}(\lambda)+\alpha)-n+\beta}{2\tilde{q}(\lambda)}. \tag{A8}$$

求解 $\pi^*$ 关于 $\alpha$ 的偏导数得:

由 $\dfrac{n-\beta}{1-m}<\tilde{q}(\lambda)+\alpha$ 移项后得 $\tilde{q}(\lambda)+\alpha-\dfrac{n-\beta}{1-m}>0$, 将不等式两边同乘正值 $\dfrac{1-m}{\tilde{q}(\lambda)}$ 可将不等式转换为 $(1-m)+\dfrac{\alpha(1-m)-n+\beta}{\tilde{q}(\lambda)}>0$, 因而 $\dfrac{1}{2}\left(1-m+\dfrac{\alpha(1-m)-n+\beta}{\tilde{q}(\lambda)}\right)>0$, 即 $\dfrac{\partial\pi^*}{\partial\alpha}>0$.

在平台决策 $\{\alpha,\lambda\}$ 给定的情形下，求解 $P^*$ 关于 $\beta$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial P^*}{\partial \beta}=-\frac{1}{2(1-m)}<0. \tag{A9}$$

求解 $Pr^*$ 关于 $\beta$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial Pr^*}{\partial \beta}=\frac{1}{2(1-m)\tilde{q}(\lambda)}>0. \tag{A10}$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta}=\frac{(1-m)(\tilde{q}(\lambda)+\alpha)-n+\beta}{2(1-m)\tilde{q}(\lambda)}. \tag{A11}$$

求解 $\pi^*$关于 $\beta$ 的偏导数得:

将 $\frac{n-\beta}{1-m}<\tilde{q}(\lambda)+\alpha$ 不等式两边同乘正值 $\frac{1}{\tilde{q}(\lambda)}$ 可得 $\frac{n-\beta}{\tilde{q}(\lambda)(1-m)}<1+\frac{\alpha}{\tilde{q}(\lambda)}$, 移项后可得 $1+\frac{\alpha(1-m)-n+\beta}{(1-m)\tilde{q}(\lambda)}$ $>0$, 因而 $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha(1-m)-n+\beta}{(1-m)\tilde{q}(\lambda)}\right)>0$, 即 $\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta}>0$.

**推论 2 的证明**

对 $Pr^*$求导: 当 $m=0$ 时, $\frac{1}{2\tilde{q}(\lambda)}=\frac{1}{2(1-m)\tilde{q}(\lambda)}$, 即 $\frac{\partial Pr^*}{\partial \alpha}=\frac{\partial Pr^*}{\partial \beta}$; 当 $0<m<1$ 时, $\frac{1}{2\tilde{q}(\lambda)}<\frac{1}{2(1-m)\tilde{q}(\lambda)}$, 即 $\frac{\partial Pr^*}{\partial \alpha}<\frac{\partial Pr^*}{\partial \beta}$.

对 $\pi^*$求导: 当 $m=0$ 时, $\frac{(1-m)(\tilde{q}(\lambda)+\alpha)-n+\beta}{2\tilde{q}(\lambda)}=\frac{(1-m)(\tilde{q}(\lambda)+\alpha)-n+\beta}{2(1-m)\tilde{q}(\lambda)}$, 即 $\frac{\partial \pi^*}{\partial \alpha}=\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta}$; 当 $0<m$ $<1$ 时, $\frac{\partial \pi^*}{\partial \alpha}$ 与 $\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta}$ 分子相同但是后者分母较小, 因而 $\frac{\partial \pi^*}{\partial \alpha}<\frac{\partial \pi^*}{\partial \beta}$.

**推论 3 的证明**

在平台决策 $\{\alpha,\beta\}$ 给定的情形下，求解 $P^*(\lambda)$ 关于 $\lambda$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial P^*}{\partial \lambda}=\frac{q_H-q_L}{2}>0. \tag{A12}$$

求解 $Pr^*$ 关于 $\lambda$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial Pr^*}{\partial \lambda}=\frac{(n-\beta-\alpha(1-m))(q_H-q_L)}{2(1-m)(\tilde{q}(\lambda))^2}. \tag{A13}$$

由于 $q_H-q_L>0$、$2(1-m)\left(\tilde{q}(\lambda)\right)^2>0$, $\frac{\partial Pr^*}{\partial \lambda}$的正负取决于 $n-\beta-\alpha(1-m)$的正负. 当 $\alpha\leq\frac{n-\beta}{1-m}$ 时, $\frac{\partial Pr^*}{\partial \lambda}\geq 0$;

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \lambda}=\frac{(q_H-q_L)((1-m)(\alpha-\tilde{q}(\lambda))+\beta-n)(-(1-m)(\alpha+\tilde{q}(\lambda))-\beta+n)}{4(1-m)(\tilde{q}(\lambda))^2}. \tag{A14}$$

当 $\alpha>\frac{n-\beta}{1-m}$, $\frac{\partial Pr^*}{\partial \lambda}<0$. 求解$\pi^*$ 关于 $\lambda$的偏导数得:

将 $\alpha\leq\frac{n-\beta}{1-m}+\tilde{q}(\lambda)$ 不等式两边同乘正值 $1-m$ 可得 $(1-m)\alpha\leq n-\beta+(1-m)\tilde{q}(\lambda)$, 移项后得 $(1-m)\left(\alpha-\tilde{q}(\lambda)\right)$ $+\beta-n\leq 0$. 由 $\frac{n-\beta}{1-m}<\tilde{q}(\lambda)+\alpha$ 移项可得 $\alpha+\tilde{q}(\lambda)-\frac{-\beta+n}{1-m}>0$, 不等式两边同乘负值 $-(1-m)$ 得 $-(1-m)$

$\left(\alpha+\tilde{q}(\lambda)\right)-\beta+n\le 0$. 又因为 $q_H-q_L>0$、$1-m\ge 0$, 因而 $\frac{\partial\pi^*}{\partial\lambda}\ge 0$.

# 附录 B

**命题 2 的证明**

将第二阶段的求解结果 $P^*(\alpha,\beta)=\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}+\alpha}{2}$、$Pr^*(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}-\frac{n-\beta}{2(1-m)\tilde{q}}+\frac{\alpha}{2\tilde{q}}$ 代入优化问题 (C) 中可得:

$$\text{(C)}\quad \max_{\alpha,\beta}\Pi(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2}-\frac{n-\beta}{2(1-m)\tilde{q}}+\frac{\alpha}{2\tilde{q}}\right)\left[m\left(\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)\right]-\frac{k}{2}\lambda^2,$$

$$\text{s.t.}\quad -(1-m)\alpha-\beta+(1-m)\tilde{q}+n\ge 0,\alpha\ge 0,\beta\ge 0, \tag{B1}$$

$$m\left(\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)>0,$$

其中 $\tilde{q}=\lambda q_H+(1-\lambda)q_L$. 当 $0<m<1$ 时, $\frac{\partial\Pi}{\partial\alpha}\neq\frac{\partial\Pi}{\partial\beta}$. 我们先在不考虑约束 $m\left(\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)$ $(\alpha+\beta)>0$ 的条件下进行求解, 该优化问题的拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned}&L(\alpha,\beta,u)\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{n-\beta}{2(1-m)\tilde{q}}+\frac{\alpha}{2\tilde{q}}\right)\left[m\left(\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)\right]-\frac{k}{2}\lambda^2+u_1[-(1-m)\alpha\\&-\beta+(1-m)\tilde{q}+n]+u_2\alpha+u_3\beta.\end{aligned}\tag{B2}$$

该优化问题的 KKT 条件为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\frac{n(2-m-r)+(1-m)(r-1+m)\tilde{q}+\alpha(1-m)(2r+m-2)+\beta(2-m)(r-1)}{2(1-m)\tilde{q}}-(1-m)u_1\\&\quad+u_2=0,\\&\frac{\partial L}{\partial\beta}=\frac{n(2-m-r+rm)+(1-m)^2(r-1)\tilde{q}+\alpha(1-m)(2-m)(r-1)+\beta(-2+m+2r-2rm)}{2(1-m)^2\tilde{q}}-\\&\quad u_1+u_3=0,\\&u_1[-(1-m)\alpha-\beta+(1-m)\tilde{q}+n]=0,\ \ u_2\alpha=0,\ \ u_3\beta=0,\\&-(1-m)\alpha-\beta+(1-m)\tilde{q}+n\ge 0,\ \ \alpha\ge 0,\ \ \beta\ge 0,\\&u_1、u_2、u_3\ge 0.\end{aligned}\tag{B3}$$

(1) $u_1\neq 0$ 时,

A) $u_1\neq 0,u_2\neq 0,u_3\neq 0,\alpha=\beta=0$ 时, $-(1-m)\alpha-\beta+(1-m)\tilde{q}+n=0$ 不满足, 因而该情况不存在.

B) $u_1\neq 0,u_2\neq 0,u_3=0$, 此时模型最优解为 $(0,(1-m)\tilde{q}+n)$, $\Pi_\beta^3=n+\left(n+\tilde{q}(1-m)\right)(r-1)-\frac{k}{2}\lambda^2$.

C) $u_1\neq 0,u_2=0,u_3\neq 0$, 此时模型最优解为 $\left(\frac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m},0\right)$, $\Pi_\alpha^3=\frac{rn}{1-m}+\tilde{q}(m+r-1)-\frac{k}{2}\lambda^2$.

D) $u_1\neq 0,u_2=0,u_3=0$, 此时 $u_1$

$$\begin{aligned}&=\frac{n(2-m-r+rm)+(1-m)^2(r-1)\tilde{q}+\alpha(1-m)(2-m)(r-1)+\beta(-2+m+2r-2rm)}{2(1-m)^2\tilde{q}}\\&=\frac{n(2-m-r)+(1-m)(r-1+m)\tilde{q}+\alpha(1-m)(2r+m-2)+\beta(2-m)(r-1)}{2(1-m)^2\tilde{q}}.\end{aligned}$$

化简后可得 $-(1-m)\alpha-\beta-(1-m)\tilde{q}+n=0$. 由 $u_1\neq 0$ 可得 $-(1-m)\alpha-\beta+(1-m)\tilde{q}+n=0$, 结合两式无法求解. 因而这种情况不存在.

(2) $u_1=0$ 时,

A) $u_1=0,u_2\neq 0,u_3\neq 0$, 此时模型最优解为 $(0,0)$, $\Pi^1=\frac{((1-m)\tilde{q}-n)((2-m)n+m(1-m)\tilde{q})}{4(1-m)^2\tilde{q}}-\frac{k}{2}\lambda^2$.

B) $u_1=0,u_2\neq 0,u_3=0$, 此时模型最优解为 $(0,\frac{n(2-m-r+rm)+(1-m)^2(r-1)\tilde{q}}{2-m-2r+2rm})$, $\Pi_\beta^2=\frac{(\tilde{q}+nr-(1-m)\tilde{q}r)^2}{4\tilde{q}(2-m-2r+2rm)}-\frac{k}{2}\lambda^2$.

C) $u_1=0,u_2=0,u_3\neq 0$, 此时模型最优解为 $(\frac{n(2-m-r)+(1-m)(m+r-1)\tilde{q}}{(1-m)(2-m-2r)},0)$, $\Pi_\alpha^2=\frac{((1-m)(1-r)\tilde{q}-nr)^2}{4\tilde{q}(1-m)^2(2-m-2r)}-\frac{k}{2}\lambda^2$.

D) $u_1=0,u_2=0,u_3=0$, $\alpha=-\frac{\tilde{q}\big(1-r(1-m)\big)+nr}{mr}$, $\beta=\frac{(1-m)(1-r)\tilde{q}+nr}{mr}$. 当 $r<\frac{\tilde{q}}{(1-m)\tilde{q}-n}$ 时, $\alpha<0$; 当 $r>\frac{(1-m)\tilde{q}}{(1-m)\tilde{q}-n}$ 时, $\beta<0$. 因而在 $r$ 的定义域内, $\alpha$、$\beta$ 至少有一负数. 约束不满足, 因而该情况不存在.

比较 $\Pi_1$、$\Pi_\alpha^2$、$\Pi_\alpha^3$ 的大小, 当 $\beta^*=0$ 时, $r$ 取不同值时, $\alpha^*$ 的取值如 (B4) 式所示:

$$\beta^*=0,$$
$$\alpha^*=\begin{cases}0, & 0\le r<1-m \text{ 且 } \tilde{q}>max\left\{\frac{-n(2-m-r)}{(1-m)(m+r-1)},\frac{-n(2-m)}{(1-m)(3m+4r-4)}\right\},\\ \frac{n(2-m-r)+(1-m)(m+r-1)\tilde{q}}{(1-m)(2-m-2r)}, & 1-m\le r<1-\frac{m}{2} \text{ 且 } \tilde{q}>\frac{-n(2-m-r)}{(1-m)(m+r-1)},\\ \frac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m}, & r\ge 1-\frac{m}{2} \text{ 且 } \tilde{q}>max\left\{\frac{-n(2-m-r)}{(1-m)(m+r-1)},\frac{-n(2-m)}{(1-m)(3m+4r-4)}\right\}.\end{cases} \tag{B4}$$

比较 $\Pi_1$、$\Pi_\beta^2$、$\Pi_\beta^3$ 的大小, 当 $\alpha^*=0$ 时, $r$ 取不同值时, $\beta^*$ 的取值如 (B5) 式所示:

$$\beta^*=\begin{cases}0,\\ r\ge 1+\frac{m}{2(1-m)} \text{ 且} \tilde{q}>max\left\{\frac{-n(2-m-r+rm)}{(1-m)^2(r-1)},\frac{-n(2-m)}{(1-m)(3m+4r(1-m)-4)}\right\},\\ \frac{n(2-m-r+rm)+(1-m)^2(r-1)\tilde{q}}{2-m-2r+2rm},\\ 1\le r<1+\frac{m}{2(1-m)} \text{ 且} \tilde{q}>\frac{-n(2-m-r+rm)}{(1-m)^2(r-1)},\\ (1-m)\tilde{q}+n,\\ 0\le r<1 \text{ 且} \tilde{q}>max\left\{\frac{-n(2-m-r+rm)}{(1-m)^2(r-1)},\frac{-n(2-m)}{(1-m)(3m+4r(1-m)-4)}\right\},\end{cases} \tag{B5}$$
$$\alpha^*=0.$$

经过运算, 当 $0\le r<1-m, 1-m\le r<1-\frac{m}{2}, 1-\frac{m}{2}\le r<1, 1\le r<1+\frac{m}{2(1-m)}, r\ge 1+\frac{m}{2(1-m)}$ 时, 分别取 $(0,0)$, $(\frac{n(2-m-r)+(1-m)(m+r-1)\tilde{q}}{(1-m)(2-m-2r)},0)$, $(\frac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m},0)$, $(\frac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m},0)$, $(\frac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m},0)$ 更优. 由命题 1 可知 $P^*=\frac{n-\beta^*}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}+\alpha^*}{2}$, $\tilde{q}=2P^*-\alpha^*-\frac{n-\beta^*}{1-m}>P^*-\frac{n-\beta^*}{1-m}=P^*-\frac{n}{1-m}$. 价格太低没有获利空间的二手商品一般不会在二手市场上再次流通, 且 $m$、$n$、$r$ 的数量级相较于价格 $P^*$ 而言很小, 本文合理假定限制条件中关于 $\tilde{q}$ 的不等式均成立. 综上所述, 不考虑约束 $m\left(\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)>0$ 时, 优化模型 (C)

的最优解为

$$\alpha^* = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1-m, \\ \dfrac{n(2-m-r)+(1-m)(m+r-1)\tilde{q}}{(1-m)(2-m-2r)}, & 1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}, \\ \dfrac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m}, & r \ge 1-\dfrac{m}{2}, \end{cases} \tag{B6}$$

$$\beta^* = 0.$$

现在考虑约束 $m\left(\dfrac{n-\beta}{2(1-m)}+\dfrac{\tilde{q}+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)>0$, 即 $m(n-\beta+(1-m)(\tilde{q}+\alpha))+2(1-m)[n+(r-1)(\alpha+\beta)]>0$. (1) 在 $0 \le r < 1-m$ 的情况下将 $\alpha^*=0$、$\beta^*=0$ 代入 $m\big(n-\beta+(1-m)(\tilde{q}+\alpha)\big)+2(1-m)[n+(r-1)(\alpha+\beta)]$ 中, 化简可得 $(2-m)n+(1-m)m\tilde{q}$. 由于 $0<m<1$、$\tilde{q}>0$、$n\ge 0$, 因此 $(2-m)n+(1-m)m\tilde{q}>0$ 恒成立.

(2) 同样的思路, 在 $1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}$ 的情况下将 $\alpha^*=\dfrac{n(2-m-r)+(1-m)(m+r-1)\tilde{q}}{(1-m)(2-m-2r)}$、$\beta^*=0$ 代入, 化简可得 $rn+(1-m)(1-r)\tilde{q}$. 由于 $0<m<1$、$\tilde{q}>0$、$n\ge 0$、$1-m\le r<1-\dfrac{m}{2}$, 因此 $rn+(1-m)(1-r)\tilde{q}>0$ 恒成立.

(3) 类似的, 在 $r \ge 1-\dfrac{m}{2}$ 的情况下, 将 $\alpha^*=\dfrac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m}$、$\beta^*=0$ 代入, 化简得 $2rn+2(1-m)(m+r-1)\tilde{q}$. 由于 $0<m<1$、$\tilde{q}>0$、$n\ge 0$、$r\ge 1-\dfrac{m}{2}>1-m$, 因此 $2rn+2(1-m)(m+r-1)\tilde{q}>0$ 恒成立.

因此, 在考虑约束 $m\left(\dfrac{n-\beta}{2(1-m)}+\dfrac{\tilde{q}+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)>0$ 后, 模型的最优解不会发生变化. 二手电商平台给予买卖双方的最优绿色补贴总额 $\hat{\delta}^*$ 为

$$\hat{\delta}^* = \alpha^*+\beta^* = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1-m, \\ \dfrac{n(2-m-r)+(1-m)(m+r-1)\tilde{q}}{(1-m)(2-m-2r)}, & 1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}, \\ \dfrac{n+(1-m)\tilde{q}}{1-m}, & r \ge 1-\dfrac{m}{2}. \end{cases} \tag{B7}$$

相应的, 二手电商平台的最优利润 $\hat{\Pi}^*$ 为

$$\hat{\Pi}^* = \begin{cases} \dfrac{((1-m)\tilde{q}-n)((2-m)n+m(1-m)\tilde{q})}{4(1-m)^2\tilde{q}}-\dfrac{1}{2}k\lambda^2, & 0 \le r < 1-m, \\ \dfrac{((1-m)(1-r)\tilde{q}+nr)^2}{4(1-m)^2(2-m-2r)\tilde{q}}-\dfrac{1}{2}k\lambda^2, & 1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}, \\ \dfrac{nr}{1-m}+\tilde{q}(m+r-1)-\dfrac{1}{2}k\lambda^2, & r \ge 1-\dfrac{m}{2}. \end{cases} \tag{B8}$$

# 附录 C

**命题 3 的证明**

$m=0$ 时, 利润函数 $\Pi$ 对$\alpha$、$\beta$ 求导 $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \alpha}=\dfrac{\partial \Pi}{\partial \beta}=\dfrac{n(2-r)+(r-1)(\lambda q_H+(1-\lambda)q_L)+2\alpha(r-1)+2\beta(r-1)}{2(\lambda q_H+(1-\lambda)q_L)}$, $\alpha$、$\beta$ 对平台利润的边际影响相同，能使平台利润达到最大的点有无穷多个，优化问题 (C) 无解. 在这种情况下，只需考虑对买卖双方共计发放多少绿色补贴是最优的. 在 $\lambda$ 给定的情形下，需要求解的优化模型为

$$\text{(E)}\quad \max_{\breve{\delta}} \breve{\Pi} = Pr\,[\,n + (r-1)\,(\alpha+\beta)] - \frac{k}{2}\lambda^2,$$
$$\text{s.t.}\ \ \alpha \le P, \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha+\beta = \breve{\delta}, n + (r-1)(\alpha+\beta) > 0. \tag{C1}$$

将第二阶段的求解结果 $Pr^* = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\breve{\delta}-n}{2(\lambda q_H + (1-\lambda)q_L)}$ 代入优化问题 (E) 中, 可将优化模型 (E) 转化为

$$\max_{\breve{\delta}} \breve{\Pi} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\breve{\delta}-n}{2\tilde{q}}\right)\left[n + (r-1)\breve{\delta}\right] - \frac{k}{2}\lambda^2,$$
$$\text{s.t.}\ \ 0 \le \breve{\delta} \le \tilde{q} + n, n + (r-1)\breve{\delta} > 0, \tag{C2}$$

其中 $\tilde{q} = \lambda q_H + (1-\lambda)q_L$. 我们先在不考虑约束 $n + (r-1)\breve{\delta} > 0$ 的条件下进行求解.

当 $0 \le r < 1$ 时, 目标函数 $\breve{\Pi}$ 是关于 $\breve{\delta}$ 的开口向下的二次函数, 在不考虑约束条件的情况下 $\breve{\Pi}$ 的最大值点 $\tilde{\delta}$ 为:

$$\tilde{\delta} = \frac{(n-\tilde{q})(1-r)+n}{2(1-r)}. \tag{C3}$$

若 $\tilde{\delta} \le 0$, 即 $\tilde{q} \ge \dfrac{(2-r)n}{1-r}$ 时, $\breve{\delta}^* = 0$; 若 $0 < \tilde{\delta} \le \tilde{q} + n$, 即 $\dfrac{rn}{3(1-r)} \le \tilde{q} < \dfrac{(2-r)n}{1-r}$ 时, $\breve{\delta}^* = \dfrac{(n-\tilde{q})(1-r)+n}{2(1-r)}$; 若 $\tilde{\delta} > \tilde{q} + n$, 即 $\tilde{q} < \dfrac{rn}{3(1-r)}$ 时, $\breve{\delta}^* = \tilde{q} + n$.

当 $r = 1$ 时, 目标函数 $\breve{\Pi}$ 是关于 $\breve{\delta}$ 的线性函数, $\breve{\Pi}$ 随着 $\breve{\delta}$ 的增大而增大, 因而 $\breve{\delta}^* = \tilde{q} + n$.

当 $r > 1$ 时, 目标函数 $\breve{\Pi}$ 是关于 $\breve{\delta}$ 的开口向上的二次函数, 最大值可能在 $\breve{\delta}$ 的上界 $\tilde{q} + n$ 或下界 0 处取得, $\breve{\Pi}(0) - \breve{\Pi}(\tilde{q}+n) = -\dfrac{(\tilde{q}+n)\big(n + 2\tilde{q}(r-1)\big)}{2\tilde{q}} < 0$, 因而 $\breve{\delta}^* = \tilde{q} + n$.

$$\breve{\delta}^* = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1 \text{ 且 } \tilde{q} \ge \dfrac{(2-r)n}{1-r}, \\ \dfrac{(n-\tilde{q})(1-r)+n}{2(1-r)}, & 0 \le r < 1 \text{ 且 } \dfrac{rn}{3(1-r)} \le \tilde{q} < \dfrac{(2-r)n}{1-r}, \\ \tilde{q} + n, & r \ge 1 \text{ 或 } 0 \le r < 1 \text{ 且 } \tilde{q} < \dfrac{rn}{3(1-r)}. \end{cases} \tag{C4}$$

由命题 1 可知 $P^* = \dfrac{n-\beta^*}{2} + \dfrac{\tilde{q}+\alpha^*}{2}$, $\tilde{q} = 2P^* - n - \alpha^* + \beta^* > 2P^* - n - \breve{\delta}^*$. 又因为 $\breve{\delta} \le \tilde{q} + n$, 可得 $2P^* - n - \breve{\delta}^* \ge 2P^* - \tilde{q} - 2n$, 因此 $\tilde{q} > 2P^* - \tilde{q} - 2n$, 即 $\tilde{q} > P^* - n$. 由于价格太低没有获利空间的二手商品一般不会在二手市场上再次流通, 且 $m$、$n$、$r$ 数量级相较于价格 $P^*$ 而言很小, 本文合理假定 $\tilde{q} \ge \dfrac{(2-r)n}{1-r}$ 成立而 $\tilde{q} < \dfrac{(2-r)n}{1-r}$、$\tilde{q} < \dfrac{rn}{3(1-r)}$ 不成立.

综上所述, 不考虑约束 $n + (r-1)\breve{\delta} > 0$ 时, 优化模型 (E) 的最优解为

$$\breve{\delta}^* = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1, \\ \tilde{q} + n, & r \ge 1. \end{cases} \tag{C5}$$

现在考虑约束 $n + (r-1)\breve{\delta} > 0$. (1) 在 $0 \le r < 1$ 的情况下将 $\breve{\delta}^* = 0$ 代入 $n + (r-1)\breve{\delta}$ 中, 化简可得 $n$, $n > 0$ 恒成立. (2) 同样的思路, 在 $r \ge 1$ 的情况下将 $\breve{\delta}^* = \tilde{q} + n$ 代入, 化简可得 $n + (r-1)(\tilde{q}+n)$, 由于 $\tilde{q} > 0$、$n > 0$、$r \ge 1$, 因此 $n + (r-1)(\tilde{q}+n) > 0$ 恒成立. 综上, 在考虑约束 $n + (r-1)\breve{\delta} > 0$ 后, 模型的最优解不会发生变化. 相应的, 二手电商平台的最优利润 $\breve{\Pi}^*$ 为

$$\breve{\Pi}^* = \begin{cases} \dfrac{(\tilde{q}-n)n}{2\tilde{q}} - \dfrac{k}{2}\lambda^2, & 0 \le r < 1, \\ nr + \tilde{q}(r-1) - \dfrac{k}{2}\lambda^2, & r \ge 1. \end{cases} \tag{C6}$$

# 附录 D

**推论 4 的证明**

**关于绿色激励系数 $r$ 求导**

(1) 当 $0 \le r < 1-m$ 时, $\hat{\delta}^* = 0$. $\hat{\Pi}^*$ 表达式与 $r$ 无关, 因此 $\dfrac{\partial \hat{\Pi}^*}{\partial r} = 0$.

(2) 当 $1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}$ 时, 求解 $\hat{\delta}^*$ 关于 $r$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial \hat{\delta}^*}{\partial r} = \frac{2n - mn + (m-m^2)\tilde{q}}{(1-m)(2-m-2r)^2}. \tag{D1}$$

由于 $\tilde{q}$ 为正值, 因而 $\tilde{q} > \dfrac{n(m-2)}{m(1-m)}$, $m(1-m)\tilde{q} - n(m-2) > 0$, 即 $2n - mn + (m-m^2)\tilde{q} > 0$. 又因为 $1-m>0$, 故 $\dfrac{\partial \hat{\delta}^*}{\partial r} > 0$. 求解 $\hat{\Pi}^*$ 关于 $r$ 的偏导数得

$$\frac{\partial \hat{\Pi}^*}{\partial r} = -\frac{\big((1-m)(1-r)\tilde{q} + rn\big)\big(n(-2+m+r) + (1-m)(1-m-r)\tilde{q}\big)}{2(1-m)^2(2-m-2r)^2\tilde{q}}. \tag{D2}$$

由 $1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}$ 可得 $1-m-r \le 0$、$-2+m+r < 0$. 由于 $\tilde{q}$ 为正值因而 $\tilde{q} > \dfrac{-n(-2+m+r)}{(1-m)(1-m-r)}$, 即 $n(-2+m+r) + (1-m)(1-m-r)\tilde{q} < 0$, 又因为 $(1-m)(1-r)\tilde{q} + rn > 0$, 因而 $\dfrac{\partial \hat{\Pi}^*}{\partial r} > 0$.

(3) 当 $r \ge 1-\dfrac{m}{2}$ 时, $\hat{\delta}^*$ 表达式与 $r$ 无关, 因此 $\dfrac{\partial \hat{\delta}^*}{\partial r} = 0$. 求解 $\hat{\Pi}^*$ 关于 $r$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial \hat{\Pi}^*}{\partial r} = \frac{n}{1-m} + \tilde{q} > 0. \tag{D3}$$

综上所述, 可整理得:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{\delta}^*}{\partial r} = 0, 0 \le r < 1-m \text{或} r \ge 1-\dfrac{m}{2}, \\ \dfrac{\partial \hat{\delta}^*(r)}{\partial r} > 0, \quad 1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{\Pi}^*}{\partial r} = 0, \quad 0 \le r < 1-m, \\ \dfrac{\partial \hat{\Pi}^*}{\partial r} > 0, \quad r \ge 1-m. \end{cases} \tag{D4}$$

**关于比例成交费费率 $m$ 求导**

(1) 当 $0 \le r < 1-m$ 时, $\hat{\delta}^* = 0$, 故 $\dfrac{\partial \hat{\delta}^*}{\partial m} = 0$.

(2) 当 $1-m \le r < 1-\dfrac{m}{2}$ 时, 求解 $\hat{\delta}^*$ 关于 $m$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial \hat{\delta}^*}{\partial m} = \frac{n((m-2)^2 + r(2r+2m-5)) + (1-m)^2(1-r)\tilde{q}}{(1-m)^2(2-m-2r)^2}. \tag{D5}$$

如果 $\tilde{q} > -\dfrac{n\Big((m-2)^2 + r(2r+2m-5)\Big)}{(1-m)^2(1-r)}$, $\dfrac{\partial \hat{\delta}^*}{\partial m} > 0$. 令 $f(m) = (m-2)^2 + r(2r+2m-5) = m^2 - 2(2-r)m +$

$2r^2-5r+4$, $f(m)$ 是关于 $m$ 的开口向上、对称轴为 $(2-r)$ 的一个二次函数. 由于 $r<1-\frac{m}{2}<1$, $2-r>1$, 因而在 $m$ 的可行域 $[0,1]$ 上, $f(m)$ 是单调递减的, 且在 $m=1$ 时取得最小值. $m=1$ 时, $0\le r<0.5$, $f(1)=2r^2-3r+1=(r-1)(2r-1)$, 在 $r$ 的取值范围内 $f(1)>0$, 因此在取值范围内 $f(m)>0$, $-\frac{n\left((m-2)^2+r(2r+2m-5)\right)}{(1-m)^2(1-r)}\le 0$. 由于 $\tilde{q}$ 为正值, 因而 $\tilde{q}>-\frac{n\left((m-2)^2+r(2r+2m-5)\right)}{(1-m)^2(1-r)}$, $\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial m}>0$.

(3) 当 $r\ge 1-\frac{m}{2}$时, 求解 $\hat{\delta}^*$ 关于 $m$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial m}=\frac{n}{(1-m)^2}>0. \tag{D6}$$

综上所述，可整理得:

$$\begin{cases}\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial m}=0, 0\le r<1-m,\\ \frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial m}>0, \quad r\ge 1-m.\end{cases} \tag{D7}$$

**关于固定成交费 $\boldsymbol{n}$ 求导**

(1) 当 $0\le r<1-m$ 时, $\hat{\delta}^*=0$, 故 $\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial n}=0$.

(2) 当 $1-m\le r<1-\frac{m}{2}$ 时, 求解 $\hat{\delta}^*$ 关于 $n$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial n}=\frac{2-m-r}{(1-m)(2-m-2r)}. \tag{D8}$$

由 $1-m\le r<1-\frac{m}{2}$ 可得 $2-m-2r>0$、$2-m-r>0$, 因而 $\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial n}>0$.

(3) 当 $r\ge 1-\frac{m}{2}$ 时, 求解 $\hat{\delta}^*$ 关于 $n$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial n}=\frac{1}{1-m}>0. \tag{D9}$$

综上所述，可整理得:

$$\begin{cases}\frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial n}=0, 0\le r<1-m,\\ \frac{\partial\hat{\delta}^*}{\partial n}>0, \quad r\ge 1-m.\end{cases} \tag{D10}$$

**推论 5 的证明**

**关于绿色激励系数 $\boldsymbol{r}$ 求导**

(1) 当 $0\le r<1$ 时, $\breve{\delta}^*=0$. $\breve{\Pi}^*$ 表达式与 $r$ 无关, 因此 $\frac{\partial\breve{\Pi}^*}{\partial r}=0$.

(2) 当 $r\ge 1$ 时, $\breve{\delta}^*$ 表达式与 $r$ 无关, 因此 $\frac{\partial\breve{\delta}^*}{\partial r}=0$. 求解 $\breve{\Pi}^*$ 关于 $r$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial\breve{\Pi}^*}{\partial r}=n+\tilde{q}>0. \tag{D11}$$

综上所述，可整理得:

$$\frac{\partial\breve{\delta}^*}{\partial r}=0,\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\breve{\Pi}^*}{\partial r}=0,\ \ 0\le r<1,\\ \dfrac{\partial\breve{\Pi}^*}{\partial r}>0,\quad r\ge 1.\end{cases} \tag{D12}$$

**关于固定成交费 $\boldsymbol{n}$ 求导**

(1) 当 $0\le r<1$ 时, $\breve{\delta}^*=0$, 故 $\dfrac{\partial\breve{\delta}^*}{\partial n}=0$.

(2) 当 $r\ge 1$ 时, 求解 $\breve{\delta}^*$ 关于 $n$ 的偏导数得:

$$\frac{\partial\breve{\delta}^*}{\partial n}=1. \tag{D13}$$

综上所述, 可整理得:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\breve{\delta}^*}{\partial n}=0, 0\le r<1,\\ \dfrac{\partial\breve{\delta}^*}{\partial n}>0,\quad r\ge 1.\end{cases} \tag{D14}$$

## 附录 E

**命题 4 的证明**

将第二阶段的求解结果 $P^*(\lambda)=\dfrac{n-\beta}{2(1-m)}+\dfrac{\tilde{q}(\lambda)+\alpha}{2}$、$Pr^*(\lambda)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{(1-m)\alpha-n+\beta}{(1-m)\tilde{q}(\lambda)}\right)$ 代入优化问题 (D) 中可得:

$$\text{(D)}\qquad \max_{\lambda}\Pi(\lambda)=\frac{1}{2}(1+\frac{(1-m)\alpha-n+\beta}{(1-m)\tilde{q}(\lambda)})\left[m\left(\frac{n-\beta}{2(1-m)}+\frac{\tilde{q}(\lambda)+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)\right]-\frac{k}{2}\lambda^2,$$
$$\text{s.t.}\ \ -(1-m)\alpha-\beta+(1-m)\tilde{q}(\lambda)+n\ge 0, 0\le\lambda\le 1, mP(\lambda)+n+(r-1)(\alpha+\beta)>0, \tag{E1}$$

其中 $\tilde{q}(\lambda)=\lambda q_H+(1-\lambda)q_L$.

平台利润函数 $\Pi(\lambda)$ 可以看做由收益函数 $R(\lambda)$ 和成本函数 $C(\lambda)$ 两部分组成, $\Pi(\lambda)=R(\lambda)-C(\lambda)$. $R(\lambda)=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{(1-m)\alpha-n+\beta}{(1-m)\tilde{q}(\lambda)})\left[m\left(\dfrac{n-\beta}{2(1-m)}+\dfrac{\tilde{q}(\lambda)+\alpha}{2}\right)+n+(r-1)(\alpha+\beta)\right]$, $C(\lambda)=\dfrac{k}{2}\lambda^2$. 对 $R(\lambda)$ 求二阶导数 $\dfrac{d^2R(\lambda)}{d\lambda^2}=-\dfrac{X\,(q_H-q_L)^2}{2(1-m)^2(\lambda q_H+(1-\lambda)q_L)^3}$, 其中 $X=[n-\beta-(1-m)\alpha]\big[m(n-\beta+(1-m)\alpha)+2(1-m)\big(n+(r-1)(\alpha+\beta)\big)\big]$. 根据边际收益递减规律 $\dfrac{d^2R(\lambda)}{d\lambda^2}<0$, 因而本文假设 $X>0$. $\dfrac{d^2\Pi(\lambda)}{d\lambda^2}=-\dfrac{X\,(q_H-q_L)^2}{2(1-m)^2(\lambda q_H+(1-\lambda)q_L)^3}-k\le 0$ 成立, 目标函数是关于 $\lambda$ 的凹函数. 化简一阶最优性条件 $\dfrac{d\Pi}{d\lambda}=(q_H-q_L)\left(\dfrac{X}{4(1-m)^2\tilde{q}(\lambda)^2}+\dfrac{m}{4}\right)-\lambda k$. 令 $\dfrac{d\Pi}{d\lambda}=0$, 即可求得 $\lambda^*$, 因而最优解满足 $(1-m)^2\tilde{q}^2(\lambda^*)[4\lambda^*k-m(q_H-q_L)]=X(q_H-q_L)$.

将该式整理可得关于 $\lambda$ 的一元三次方程 $\mathrm{W}_1\lambda^3+\mathrm{W}_2\lambda^2+\mathrm{W}_3\lambda+\mathrm{W}_4=0$, 其中 $\mathrm{W}_1=-4k(1-m)^2(q_H-q_L)^2$、$\mathrm{W}_2=(1-m)^2(q_H-q_L)\big(m(q_H-q_L)^2-8kq_L\big)$、$\mathrm{W}_3=2(1-m)^2q_L\big(m(q_H-q_L)^2-2kq_L\big)$、$\mathrm{W}_4=(q_H-q_L)(X+mq_L{}^2(1-m)^2)$. 将方程转化为 $\rho^3+Y\rho+Z=0$ 的标准形式, 则 $Y=\dfrac{-\mathrm{W}_2{}^2+3\mathrm{W}_1\mathrm{W}_3}{3\mathrm{W}_1{}^2}=-\dfrac{\big(m(q_H-q_L)^2+4kq_L\big)^2}{48k^2(q_H-q_L)^2}$、$Z=\dfrac{2\mathrm{W}_2{}^3-9\mathrm{W}_1\mathrm{W}_2\mathrm{W}_3+27\mathrm{W}_1{}^2\mathrm{W}_4}{27\mathrm{W}_1{}^3}=\dfrac{\big(8kq_L-m(q_H-q_L)^2\big)^3}{864k^3(q_H-q_L)^3}+\dfrac{q_L\big(8kq_L-m(q_H-q_L)^2\big)\big(m(q_H-q_L)^2-2kq_L\big)}{24k^2(q_H-q_L)^3}-$

$\dfrac{X+(1-m)^2 mq_L{}^2}{4k(1-m)^2(q_H-q_L)}$、$\lambda=\rho-\dfrac{\mathrm{W}_2}{3\mathrm{W}_1}$. 记 $\psi=-\dfrac{\mathrm{W}_2}{3\mathrm{W}_1}$. 化简后得 $\psi=\dfrac{m(q_H-q_L)^2-8kq_L}{12k(q_H-q_L)}$. 若判别式 $\Omega=\left(\dfrac{Z}{2}\right)^2+\left(\dfrac{Y}{3}\right)^3$ $\geq 0$, 则该一元三次方程方程有一个实根. 根据卡尔丹公式,

$$\rho=\sqrt[3]{-\frac{Z}{2}+\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2+\left(\frac{Y}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{Z}{2}-\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2+\left(\frac{Y}{3}\right)^3}}. \tag{E2}$$

因而, 优化问题 (D) 的最优解为

$$\lambda^*=\sqrt[3]{-\frac{Z}{2}+\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2+\left(\frac{Y}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{Z}{2}-\sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2+\left(\frac{Y}{3}\right)^3}}+\psi. \tag{E3}$$

**推论 6 的证明**

**关于比例成交费费率 $\boldsymbol{m}$ 求导**

根据多元函数求导的链式法则 $\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial m}=\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Y(m)}\dfrac{\partial Y(m)}{\partial m}+\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Z(m)}\dfrac{\partial Z(m)}{\partial m}+\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial\psi(m)}\dfrac{\partial\psi(m)}{\partial m}$.

$\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Y(m)}=\left[-\left(-9C-\sqrt{12Y^3+81Z^2}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(-9C+\sqrt{12Y^3+81Z^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]\dfrac{2^{\frac{2}{3}}Y^2}{3^{\frac{1}{6}}\sqrt{4Y^3+27Z^2}}\leq 0$、$\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Z(m)}=$ $\left[\left(-9Z-\sqrt{12Y^3+81Z^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(-9C+\sqrt{12Y^3+81Z^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}\sqrt{4Y^3+27Z^2}}\leq 0$、$\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial\psi(m)}\geq 0$. $\dfrac{\partial Y(m)}{\partial m}=-$ $\dfrac{m(q_H-q_L)^2+4kq_L}{24k^2}\leq 0$、$\dfrac{\partial Z(m)}{\partial m}=-\dfrac{72k^2D+(1-m)^3\left(m(q_H-q_L)^2+4kq_L\right)^2}{288k^3(1-m)^3(q_H-q_L)}\leq 0$, 其中 $D=\alpha^2(-1+m)^3$ $+2\alpha(1-m)(\beta-n)(1-r)+(\beta-n)\left((-3+m)n+\beta\left(3-2r+m(-1+2r)\right)\right)$、$\dfrac{\partial\psi(m)}{\partial m}=\dfrac{q_H-q_L}{12k}\geq 0$.

因而 $\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial m}\geq 0$.

**关于固定成交费 $\boldsymbol{n}$ 求导**

根据多元函数求导的链式法则 $\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial n}=\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Y(n)}\dfrac{\partial Y(n)}{\partial n}+\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Z(n)}\dfrac{\partial Z(n)}{\partial n}+\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial\psi(n)}\dfrac{\partial\psi(n)}{\partial n}$. 由于 $\dfrac{\partial Y(n)}{\partial n}=0$、$\dfrac{\partial\psi(n)}{\partial n}=0$, $\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial n}=\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Z(n)}\dfrac{\partial Z(n)}{\partial n}$. 同上, $\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial Z(n)}\leq 0$. $\dfrac{\partial Z(n)}{\partial n}=\dfrac{(-2+m)n+\beta(2+m(-1+r)-r)+\alpha(1-m)(2-m-r)}{2k(1-m)^2(q_H-q_L)}$.

若平台不给予绿色补贴, 即 $\alpha=\beta=0$ 时, $\dfrac{\partial Z(n)}{\partial n}=\dfrac{(-2+m)n}{2k(1-m)^2(q_H-q_L)}$, 由于 $0<m<1$, $\dfrac{\partial Z(n)}{\partial n}<0$, 故 $\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial n}\geq 0$.

若平台给予绿色补贴, 由命题 2 知, 政府绿色激励系数 $r$ 在其有效区间内, 即 $1-m\leq r\leq 1-\dfrac{m}{2}$ 时, $\alpha^*\geq$ $\dfrac{n(2-m-r)+(1-m)(m+r-1)q_L}{(1-m)(2-m-2r)}$、$\beta^*=0$. $q_L$ 恒为正, $q_L>\dfrac{-r^2n}{(1-m)(2-m-r)(m+r-1)}$. 因此, $\alpha^*\geq\dfrac{n(2-m-r)+\dfrac{-r^2n}{(2-m-r)}}{(1-m)(2-m-2r)}$. 又因为 $\beta^*=0$, $\beta(2+m(-1+r)-r)+\alpha(1-m)(2-m-r)\geq(2-m)n$ 成立, $\dfrac{\partial Z(n)}{\partial n}>0$, 故 $\dfrac{\partial\lambda^*}{\partial n}\leq 0$.

**关于诚信建设成本系数 $\boldsymbol{k}$ 求导**

$MR = \frac{dR(\lambda)}{d\lambda} = (q_H - q_L)\left(\frac{X}{4(1-m)^2\tilde{q}(\lambda)^2} + \frac{m}{4}\right)$、$MC = \frac{dC(\lambda)}{d\lambda} = \lambda k, MR = MC$ 时,λ取得最优解. 由于 $\frac{d^2R(\lambda)}{d\lambda^2} < 0, MR$是单调递减的. 如图 $\mathrm{E}-1$ 所示,$MC^1$与 $MR$ 于 $\lambda_1^*$ 处相交. 当 $k$ 增大时,$MC^1$ 移动至 $MC^2$, 与 $MR$ 相交于 $\lambda_2^*$. $\lambda_2^* < \lambda_1^*$, 因此 $\frac{\partial\lambda^*}{\partial k} \leq 0$.

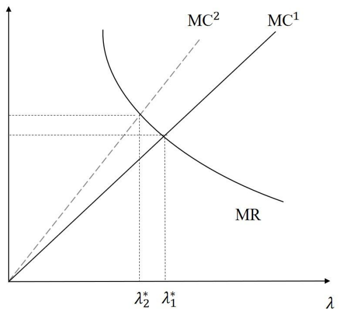


图 E-1 ***k*** 对诚信建设努力水平的影响分析