第2卷第1期
1999年3月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 2 No. 1
Mar. 1999

一种证券收益与风险动态模型的辨识方法[①]

37-41

刘海龙[②]
（沈阳大学工商管理学院）

樊治平 潘德惠
（东北大学工商管理学院）

【摘要】 在假设证券瞬时收益率满足伊藤随机微分方程的基础上，把证券的收益和风险分别定义为瞬时收益率的数学期望和方差. 通过利用柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)方程，推导出了证券收益与风险所满足的微分方程，并且基于非参数估计理论为证券瞬时收益率方程提供了一种参数辨识方法. 最后，把这种建模与辨识方法应用于中国证券市场的分析中，并给出了仿真结果.

关键词： 证券收益 与风险，随机过程，柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)方程，辨识

分类号： F832.5

动态模型

0 引 言

描述和预测证券的收益与风险的未来变化情况，在证券投资分析中具有重要的意义. 通常，证券的收益与风险分别用其收益率的均值和方差来度量. 虽然金融经济学中的证券组合理论[1]、资本资产定价模型[2]和套利定价理论[3]，对证券的收益与风险进行了深入的研究，使证券收益与风险的静态分析发展得比较完善. 但是，关于证券收益和风险的动态分析还很不成熟. 因此，如何描述证券收益与风险的动态变化情况是人们关注的热点问题之一[4].

本文在连续时间金融理论框架的基础上，研究了证券收益与风险动态模型的参数辨识问题. 首先，采用伊藤随机微分方程描述证券瞬时收益率的动态变化规律，并在此基础上推导出证券收益与风险所满足的微分方程. 然后，讨论证券瞬时收益率方程的参数辨识问题，在一定假设条件下给出了一种非参数辨识方法；此模型的建立对于证券收益与风险的预测及进行科学的投资决策分析具有重要的意义. 最后，通过仿真实验研究了沪深两市成份指数和综合指数及若干种股票收益和风险的变化规律.

1 证券收益与风险的动态模型

假设证券的价格 $P(t)$ 是连续变化的，证券的瞬时收益率定义为

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{P(t)} \tag{1}$$

证券的收益率是衡量证券投资价值的重要指标. 一般来说，收益率 $r(t)$ 是一个随机变量，它的均值越大，波动性（即方差）越小，该证券的投资价值就越高；反之，投资价值就越低. 因此，可以分别采用证券收益率的均值和方差来直接度量证券投资的收益与风险.

定义1 设证券 t 时刻的收益率 $r(t)$ 是一个随机变量，那么它的收益 $R(t)$ 和风险 $V(t)$ 分别用瞬时

---

① 国家自然科学基金资助项目(79600006)和辽宁省博士启动基金资助项目(971023).

② 刘海龙：博士生，副教授. 通讯地址：沈阳市大东区望花南街21号沈阳大学34信箱，邮政编码：110044.

本文1998年9月7日收到.

收益率 $r(t)$ 的均值和方差来表示，即

$$R(t) = E[r(t)] \tag{2a}$$

$$V(t) = D[r(t)] = E[r(t) - R(t)]^2 \tag{2b}$$

假设证券的瞬时收益率 $r(t)$ 可以采用如下伊藤随机微分方程来描述

$$\mathrm{d}r(t) = \mu(r,\theta)\mathrm{d}t + \sigma(r,\theta)\mathrm{d}w(t) \tag{3}$$

其中，$w(t)$ 是标准布朗运动；$\mu(r,\theta)$ 和 $\sigma(r,\theta)$ 分别是漂移系数和扩散系数，它们分别表示证券收益率变化速度的均值和方差；θ 表示待定的参数. 在这种情况下，证券收益率 $r(t)$ 在 t 时刻的值将与其初值有关. 实际上，定义 1 中的均值和方差分别是条件均值和条件方差. 为了方便起见，在表示的符号中省略了它们对初值的这种依赖关系. 因此

$$R(t) = E[r(t)|r(0) = r_0] \tag{4a}$$

$$V(t) = D[r(t)|r(0) = r_0] = E[[r(t) - R(t)]^2|r(0) = r_0] \tag{4b}$$

为了计算证券的收益与风险，有必要知道证券收益率在 t 时刻的条件概率分布，即在初始时刻为 t_0 收益率为 r_0 时，收益率在 t 时刻转移到 $r(t)$ 的转移概率密度为 $p(r,t|r_0,t_0)$.

定理 1 （Kolmogorov 定理）[6] 假设随机过程 $r(t)$ 由方程(3)描述，$r(t)$ 的转移概率密度 $p(r,t|r_0,t_0)$ 存在，则 $p(r,t|r_0,t_0)$ 满足如下偏微分方程

$$\frac{\partial p(r,t|r_0,t_0)}{\partial t} = -\frac{\partial \mu(r,\theta)p(r,t|r_0,t_0)}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \sigma^2(r,\theta)p(r,t|r_0,t_0)}{\partial r^2} \tag{5}$$

方程(5)称为 Kolmogorov 方程.

如果已知证券收益率的转移概率密度，那么，就可以由式(4)得到证券在任意时刻 t 的收益与风险分别为

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} rp(r,t|r_0,t_0)\mathrm{d}r \tag{6a}$$

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [r - R(t)]^2 p(r,t|r_0,t_0)\mathrm{d}r \tag{6b}$$

上面的分析表明，只要确定出方程(3)的漂移系数和扩散系数，得到瞬时收益率满足的随机微分方程，就可以计算出证券的收益与风险. 为了便于确定漂移系数和扩散系数，需要根据实际背景对 $\mu(r,\theta)$ 和 $\sigma(r,\theta)$ 的结构作进一步简化. 根据资本资产定价理论[2]，证券的收益率一般在一段时间内存在一个相对稳定的值，瞬时收益率将绕围该值波动. 收益率的易变性大小则与其值大小有关，值越大易变性越大；反之越小. 因此，对 μ 和 σ 的结构作如下假设(H1)：

$$\mu(r,\theta) = \beta(\alpha - r) \tag{7a}$$

$$\sigma(r,\theta) = \lambda|r| \tag{7b}$$

其中(7a)表示证券瞬时收益率将围绕稳定值 α 波动，α 将由该证券的内在价值决定，β 则反映了这种波动的快慢程度；(7b)表示瞬时收益率易变性的大小与 r 值成正比. 这样收益率方程(3)可写成

$$\mathrm{d}r(t) = \beta(\alpha - r)\mathrm{d}t + \lambda|r|\mathrm{d}w(t) \tag{8}$$

式(8)就是所要建立的证券收益率模型，α、β 和 λ 就是所要辨识的参数.

定理 2 在假设(H1)成立的条件下，证券的收益 $R(t)$ 和风险 $V(t)$ 分别满足下列方程

$$\dot{R}(t) = \beta[\alpha - R(t)] \qquad R(t_0) = r_0 \tag{9a}$$

$$\dot{V}(t) = 2\beta R^2(t) + (\lambda^2 - 2\beta)Y(t) \qquad V(t_0) = 0 \tag{9b}$$

其中，辅助变量 $Y(t)$ 满足如下方程

$$\dot{Y}(t) = 2\alpha\beta R(t) + (\lambda^2 - 2\beta)Y(t) \qquad Y(t_0) = r_0^2 \tag{9c}$$

证明 在 Kolmogorov 方程(5)两边乘以 r 后，对方程两边积分，同时利用部分积分法及收益率转移到 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的概率为 0(即 $p(-\infty,t|r_0,t_0) = p(+\infty,t|r_0,t_0) = 0$)的性质，根据式(6a)中关于 $R(t)$ 的定义，易证定理中的式(9a)成立.

对式(6b)两端关于时间求导，运用部分积分法可得

$$\dot{V}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[2(R(t)-r)\dot{R}(t)p(r,t|r_0,t_0)+(R(t)-r)^2\dot{p}(r,t|r_0,t_0)]\mathrm{d}r$$
$$=0+\int_{-\infty}^{\infty}(R(t)-r)^2\dot{p}(r,t|r_0,t_0)\mathrm{d}r$$

把方程(5)代入上式，并继续使用部分积分法，得

$$\dot{V}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(R(t)-r)^2[-\partial(\mu p)/\partial r+\frac{1}{2}\partial^2(\sigma^2 p)/\partial r^2]\mathrm{d}r$$
$$=-(R(t)-r)^2\mu p\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\mu p\cdot 2(r-R(t))\mathrm{d}r$$
$$+\frac{1}{2}(R(t)-r)^2\partial(\sigma^2 p)/\partial r\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial(\sigma^2 p)/\partial r\cdot 2(r-R(t))\mathrm{d}r$$
$$=0+2\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\alpha-r)(r-R(t))p\mathrm{d}r+0+\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda\cdot r)^2 p\mathrm{d}r$$
$$=2\beta R^2(t)+(\lambda^2-2\beta)\int_{-\infty}^{\infty}r^2 p\mathrm{d}r$$

若记 $Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}r^2 p(r,t|r_0,t_0)\mathrm{d}r$，则有式(9b)成立. 下面推导 $Y(t)$ 满足的方程，将方程(5)两端乘以 r^2 后积分，运用部分积分法得

$$\dot{Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}2r\mu p\mathrm{d}r-\int_{-\infty}^{\infty}\partial(\sigma^2 p)/\partial r\cdot r\mathrm{d}r$$
$$=2\beta[\alpha R(t)-Y(t)]+\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}r^2 p\mathrm{d}r=2\alpha\beta R(t)+(\lambda^2-2\beta)Y(t)$$

因此，定理中式(9c)成立. 证毕

综上，建立了证券的收益 $R(t)$ 和风险 $V(t)$ 与随机微分方程(8)中的参数 α、β 和 λ 之间的直接联系. 如果能估计出这些参数，那么就可以得到证券的收益和风险.

2 模型的辨识

为了计算证券收益和风险的动态变化情况，就要确定出证券瞬时收益率方程，也就是要辨识出式(8)中的参数 α、β 和 λ. 下面根据文献[6,7]，给出非参数辨识方法. 首先对随机过程 $r(t)$ 作如下假设(H2)：假设方程(8)描述的随机过程是稳态的，也就是说，给定变量 $r(t)$ 的初始分布后，它在任意时刻的概率分布都是不变的(但是，$r(t)$ 在不同初值下的条件概率密度是变化的，$r(t)$ 的具体采样路径也是不同的).

设 $\pi(r)$ 是方程(8)的初始概率分布. 随机过程的稳态性可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(r,t+\Delta t|u,t)\pi(u)\mathrm{d}u=\pi(r)\qquad\forall\ \Delta t>0\tag{10}$$

令 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 表示不同时刻对某一证券收益率的采样，采样周期为 Δt. 利用 Kolmogorov 方程可以表示出 t 时刻证券收益率为 r_t 时，$t+\Delta t$ 时刻证券收益率的均值为

$$E[r(t+\Delta t)|r(t)=r_t]=\int_{-\infty}^{\infty}rp(r,t+\Delta t|r_t,t)\mathrm{d}r\tag{11}$$

由定理2的证明过程可知，此均值满足方程(9a). 因此，解常微分方程(9a)可得

$$E[r(t+\Delta t)|r(t)=r_t]=R(t+\Delta t)=\alpha+e^{-\beta\cdot\Delta t}(r_t-\alpha)\tag{12}$$

因此，可以认为采样数据之间满足如下关系

$$r_{t+\Delta t}=\alpha(1-e^{-\beta\cdot\Delta t})+e^{-\beta\cdot\Delta t}r_t+\varepsilon_t\tag{13}$$

其中，ε_t 表示拟合误差. 利用最小二乘法可以估计出参数 α 和 β.

再根据非参数辨识的理论，在假设(H1)和(H2)成立的条件下，由随机过程的稳态性，可以认为把

在不同时刻采样得到的数据看成是同一时刻的采样，并用非参数的方法构造出变量的概率密度. 因此，证券收益率的分布密度可以近似地表示为

$$\hat{\pi}(r) = (1/nh_n)\sum_{i=1}^{n} K[(r - r_i)/h_n] \tag{14}$$

其中，$K(\cdot)$ 为某一已知的核函数，h_n 是满足某些条件的带宽. 把 Kolmogorov 方程代入条件(10)，并运用部分积分法可得

$$\frac{d^2}{dr^2}[\sigma^2(r)\pi(r)] = 2\frac{d}{dr}[\mu(r)\pi(r)] \tag{15}$$

从而可以得到

$$\sigma^2(r) = \frac{2}{\pi(r)}\int_{-\infty}^{r}\mu(u)\pi(u)du \tag{16}$$

在辨识得到漂移系数 $\mu(\cdot)$ 和稳态分布 $\hat{\pi}(\cdot)$ 之后，根据上式就可以计算出许多关于扩散系数 $\sigma(\cdot)$ 的数据. 利用这些数据可以辨识出方程(8) 中的参数 λ.

3 实证分析

为了检验证券收益和风险动态模型辨识方法的有效性，分别对 1997 年沪深两市的成份指数和综合指数及若干种股票进行了实证研究，具体步骤如下：

1° 以周为单位收集股票或指数在周末的收盘数据[5]（由于篇幅所限，这里没有把这些数据列出）. 按下列公式计算收益率

$$r_t = (P_{t+1} - P_t)/P_t \qquad t = 1,2,\cdots,n-1 \tag{17}$$

2° 用最小二乘法估计出如下方程的参数 a 和 b，

$$r_{t+1} - r_t = a + b\cdot r_t + \varepsilon_t \qquad t = 1,2,\cdots,n-1 \tag{18}$$

然后再对照方程(13)，并取 $\Delta t = 1$，可得

$$a = \alpha(1 - e^{-\beta})$$
$$b = e^{-\beta} - 1$$

从而可以计算出参数 $\alpha = -\dfrac{a}{b}$ 和 $\beta = -\ln(1 + b)$.

3° 用非参数方法估计出证券收益率的分布密度 $\hat{\pi}(\cdot)$. 这里取核函数为 $K(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{u^2}{2})$，带宽为 $h_n = c\cdot n^{-1/5}$，其中 c 为经验参数. 在仿真实验中发现，当 $c = 2.2$ 时的拟合效果最好.

4° 利用式(10) 计算出关于 $\sigma(\cdot)$ 的数据，再用最小二乘法估计出参数 λ.

参数辨识结果见表 1. 通过辨识得到这些参数后，把它们代入证券收益与风险所满足的方程(8) 中，便可以得到沪深两市指数及其中若干种股票的发展趋势，例如上海证券交易所成份指数的辨识结果为图 1 所示. 从图 1 中可以看出，证券的收益将收敛于某一稳定值 α；证券的风险将随着时间的增加而增大. 证券收益率收敛的速度取决于 β，风险增大的速度主要受 λ 的影响. 可见，本文的分析方法可以简单有效地刻划证券收益与风险的变化规律.

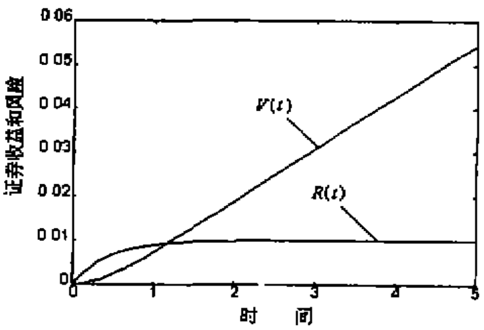

图 1 上海证券交易所成份指数的收益与风险变化趋势

表1　基于沪深证券市场指数及若干种股票周收盘数据得到的仿真结果

参数	上证综合指数	上证成份指数	深圳综合指数	深圳成份指数	东方电机	广船国际	河北威远	石油大明	四川长玄
α	0.006 1	0.09	0.003 7	0.005 6	−0.003 2	−0.004 5	0.020	0.003 1	0.019
β	1.661 3	2.454 3	2.825 9	3.022	3.088 6	1.240 7	4.065 6	1.047 8	3.808
λ	0.128 1	0.101 4	0.181 9	0.202	0.114 4	0.108 5	0.070	0.230 1	0.162

4　结束语

本文在连续时间金融理论的框架下，讨论了证券收益与风险动态模型的参数辨识问题. 基于随机过程理论，为证券收益和风险的描述提供了一个简单有效的方法，对证券投资分析和金融风险管理有一定的实用价值.

参考文献

1　Markowitz H. Portfolio selection. Journal of Finance，1952；7(1)：77～91

2　Sharpe W F. Capital asset prices：a theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance，1964；19：425～442

3　Ross S A. The arbitrage theory of capital asset pricing. Journal of Economic Theory，1976；13(12)：341～360

4　Andersen T G. Stochastic autoregressive volatility：A framework for volatility modeling. Mathematical Finance，1993；2(4)：75～102

5　武宝亭，李庆士，杨跃武. 随机过程与随机微分方程. 成都：电子科技大学出版社，1993. 62～98

6　Ait-sahalia Y. Nonparametric pricing of interest rate derivative securities. Econometric，1996；64(3)：527～560

7　童恒庆. 经济回归模型及计算，武汉：湖北科学技术出版社，1997. 303～324

8　戴小京，息曙光. 证券市场. 北京：证券市场周刊编辑部，1997

The Identification of Dynamic Model for the Returns and Risks of Security

Liu Hailong

Faculty of Business Administration，Shenyang University

Fan Zhiping，Pan Dehui

Faculty of Business Administration，Northeastern University

Abstract　Under the assumption that the spot return rate of a security follows the Ito stochastic differential equation，the return and risk of the security is defined as the expectation of the spot rate and the variance of the rate. The differential equation for the return and the risk are derived by using the Kolmogorov equation. Based on the theory of non-parametric estimation，a method for identifying the equation of spot rate is provided. Finally，the modeling method and the identifying method are applied to the analysis of Chinese financial market，and simulation results are presented.

Keywords：　return and risk of security，stochastic process，Kolmogorov equation，identifying