维普资讯 http://www.cqvip.com

第 2 卷第 1 期
1999 年 3 月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol. 2 No. 1
Mar. 1999

7
42-49
A

具有模糊系数的两层线性规划[①]

付永红[②] 杜 纲
（天津大学管理学院）

【摘要】研究具有模糊系数的两层线性规划问题，分别对模糊系数的隶属函数为单调和非单调两种情形，给出将其转为具有确定系数的两层线性规划求解的方法，并给出数值例.

关键词：模糊系数，隶属函数，单调，两层线性规划
分类号：O221

0 引 言

两层优化问题是多层优化问题中最简单的形式，也是多层优化问题的基础。两层优化通常用来研究两层递阶决策系统的优化决策问题. 上层决策者控制决策变量 $x_1 \in R^{n_1}$，其目标函数为 $f_1(x_1, x_2)$，下层决策者控制决策变量 $x_2 \in R^{n_2}$，其目标函数为 $f_2(x_1, x_2)$，$n_1 + n_2 = n$，x_1，x_2 经常要满足不可分离的约束 $G(x_1, x_2) \leqslant 0$，在这个两层决策系统中，上层决策者（主者）首先选择自己的策略 x_1，然后下层决策者（从者）根据主者的策略 x_1，选择自己的策略 x_2 来优化自己的目标函数.

如果目标函数 $f_1(x_1, x_2)$，$f_2(x_1, x_2)$，约束函数 $G(x_1, x_2)$ 均是线性的，则构成一两层线性规划问题（BLPP），其模型表示如下：

$$
(\mathrm{BLPP})\begin{cases}
\max\limits_{x_1} f_1(x_1, x_2) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \\
\text{s.t. } x_2 \text{ 是如下问题的解} \\
\qquad \max\limits_{x_2} f_2(x_1, x_2) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \\
\qquad \text{s.t.} \quad A_1x_1 + A_2x_2 \leqslant b \\
\qquad \qquad\quad x_1, x_2 \geqslant 0
\end{cases} \tag{1}
$$

近年来，人们对两层优化问题求解方法，尤其是两层线性规划求解方法已作了不少研究. 对上述的 BLPP 的求解方法大致可分为以下几类：1° 顶点枚举法[1]，2° 基于双目标规划的格子搜寻方法（GSA）[2]，3° 基于K－T条件和罚函数的转换方法[1,3,4,5]，4° Yonng-Jou Lai 等人最近利用隶属度概念提出的满意解求解方法[6,7].

以往的研究，（BLPP）中的系数一般都是一精确常量，但现实生活中，由于问题所处环境的不确定性，其中某些或全部系数（包括 b）都有可能是模糊的. 比如，产品的价格在一定时期内随市场供求而上下波动；每件产品所耗工时、材料等也可能有偏差；可用工时的上限，可由于工人延时加班而增加；可供分配的某项资源，由于潜在供应者的存在而可能获得额外的资源. 这样，在式（1）中假设全部系数均是模糊的，则构成一模糊两层线性规划问题（FBLPP），其一般形式表示如下：

① 国家自然科学基金资助项目（79670065）.
② 付永红：硕士生，通讯地址：天津大学管理学院，邮编：300072.
本文 1998 年 6 月 30 日收到.

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$
(\text{FBLPP})\begin{cases}\max\limits_{x_1} f_1(x_1,x_2)=\tilde{c}_{11}x_1-\tilde{c}_{12}x_2\\ \text{s.t. } x_2 \text{ 是如下问题的解}\\ \quad \max\limits_{x_2} f_2(x_1,x_2)=\tilde{c}_{21}x_1+\tilde{c}_{22}x_2\\ \quad \text{s.t. } \tilde{A}_1x_1+\tilde{A}_2x_2\leqslant\tilde{b}\\ \qquad x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}
$$

其中 $x_k=(x_{k1},\cdots,x_{kn_k}),k=1,2,(\tilde{c}_{11},\tilde{c}_{12})=((\tilde{c}_{11j_1})_{1\times n_1},(\tilde{c}_{12j_2})_{1\times n_2}),(\tilde{c}_{21},\tilde{c}_{22})=((\tilde{c}_{21j_1})_{1\times n_1},(\tilde{c}_{22j_2})_{1\times n_2})$, $\tilde{A}=(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)=((\tilde{a}_{ij_1})_{m\times n_1},(\tilde{a}_{ij_2})_{m\times n_2})_{m\times n},\tilde{b}=(\tilde{b}_i)_{m\times 1}$,这里 $\tilde{c}_{11j_1},\tilde{c}_{21j_1}(j_1=1,\cdots,n_1),\tilde{c}_{12j_2},\tilde{c}_{22j_2}(j_2=1,\cdots,n_2),\tilde{a}_{ij_k}(i=1,\cdots,m,j_k=1,\cdots,n_k,k=1,2),\tilde{b}_i(i=1,\cdots,m)$ 都是模糊数,都可分别建立他们各自的隶属函数.

本文将对(FBLPP)问题进行研究,提出将模糊两层线性规划转化为确定两层线性规划问题求解的方法. 为讨论问题的方便,根据模型系数的隶属函数的类型不同(从而处理方法不同),分为两种情形进行讨论:系数的隶属函数为单调和非单调的模糊两层线性规划问题.

1　系数的隶属函数为单调的模糊两层线性规划

系数的隶属函数为单调函数的情形,其典型例是所谓基于满意概念的模糊两层优化问题,即模型中含有的模糊系数所具有的隶属函数的意义是表示决策者对该模糊系数取值的满意程度,这在实际的决策问题中具有广泛的背景.

现实生活中,模糊资源普遍存在,如可从供应方获得额外的材料,可要求工人加班延时工作以获得额外的工作时间等. 当所使用的资源量越少,决策者越满意. 设当所使用的资源量小于某一确定值时,决策者绝对满意,满意程度为 1;当所使用的资源量大于某一确定值时,决策者完全不满意,满意度为 0;当所使用的资源量限制在某一确定范围内时,决策者的满意程度随所使用资源量的增加而线性减少.

假设 $\tilde{b}_i$ 的变化范围是$[b_i^l,b_i^l+p_i](i=1,\cdots,m)$ 则可建立基于满意概念的 $\tilde{b}_i$ 的隶属函数(如图 1)

$$
\mu_{\tilde{b}_i}(b_i)=\begin{cases}0 & b_i>b_i^l-p_i\\ 1-[b_i-b_i^l]/p_i & b_i^l\leqslant b_i\leqslant b_i^l+p_i\\ 1 & b_i<b_i^l\end{cases}\tag{3}
$$

$\mu_{\tilde{b}_i}(b_i)$ 是单减的连续函数.

现实生活中,目标函数中的价值系数也可能不是一确定数,而是随市场供求而变化. 一种常见的情形是,价值系数越大,决策者越满意,但价值系数不可能无限制地增大,也不可能无限制地减少,因为价值系数的大小取决于现实的市场供求关系和经济环境的影响,通常价值系数是在一定区间范围内变化. 假设决策者对小于某一确定值的价值系数完全不满意,满意度为 0;对大于某一确定值的价值系数绝对满意,满意度为 1;对界于某区间范围内的价值系数的满意程度随其增加而线性增加. 假定 $\tilde{c}_{ikj_k}$ 变化范围分别是$[c_{ikj_k}^l,c_{ikj_k}^l+p_{ikj_k}],i=1,2,j_k=1,2,\cdots,n_k,k=1,2$ 则可建立 $\tilde{c}_{ikj_k}$ 的基于满意概念的隶属函数(如图 2).

$$
\mu_{\tilde{c}_{ikj_k}}(c_{ikj_k})=\begin{cases}1 & c_{ikj_k}>c_{ikj_k}^l+p_{ikj_k}\\ (c_{ikj_k}-c_{ikj_k}^l)/p_{ikj_k} & c_{ikj_k}^l\leqslant c_{ikj_k}\leqslant c_{ikj_k}^l+p_{ikj_k}\\ 0 & c_{ikj_k}<c_{ikj_k}^l\end{cases}\tag{4}
$$

$\mu_{\tilde{c}_{ikj_k}}(c_{ikj_k})$ 是单增的连续函数.

现实生活中,技术系数也可能是不确定的,如单位产品耗用工时、材料等,随劳动生产率和工艺水平的变化而变化,有时也受劳动条件的影响. 在保持产品质量的前提下,当然单位产品所耗用的某种资源

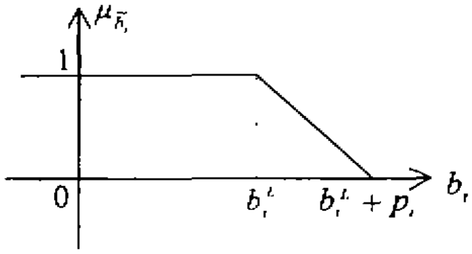

图 1 $\tilde b_i$ 的隶属函数

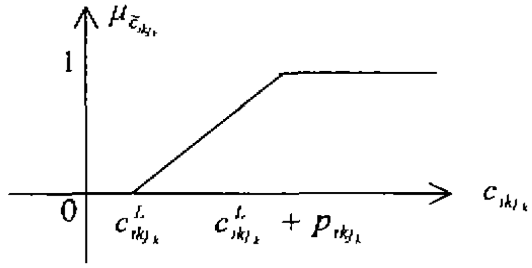

图 2 $\tilde c_{kj_k}$ 的隶属函数

越少，决策者越满意，通常技术系数也是由劳动生产率决定在一定范围内变动. 设某技术系数小于某一确定值，决策者对其完全满意，满意度为 1；某技术系数大于某一确定值，决策者对其完全不满意，满意度为 0；某技术系数界于某一区间内，决策者对其满意程度随其值增加而线性减少. 若 $\tilde a_{ij_k}$ 的变化范围是 $[a^L_{ij_k}, a^L_{ij_k} + p_{ij_k}]$，$i = 1,\cdots,m, j_k = 1,\cdots,n_k, k = 1,2$，则 $\tilde a_{ij_k}$ 的基于满意概念的隶属函数（如图 3）

$$\mu_{\tilde a_{ij_k}}(a_{ij_k}) = \begin{cases} 1 & a_{ij_k} < a^L_{ij_k} \\ (a^L_{ij_k} + p_{ij_k} - a_{ij_k})/p_{ij_k} & a^L_{ij_k} \leqslant a_{ij_k} \leqslant a^L_{ij_k} + p_{ij_k} \\ 0 & a_{ij_k} > a^L_{ij_k} + p_{ij_k} \end{cases} \tag{5}$$

$\mu_{\tilde a_{ij_k}}(a_{ij_k})$ 是单减的连续函数.

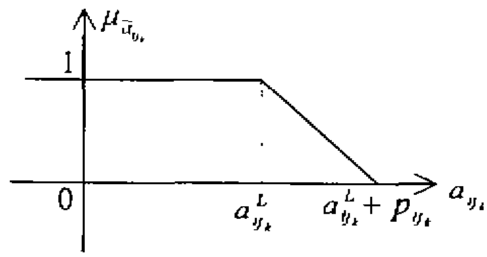

图 3 $\tilde a_{ij_k}$ 的隶属函数

设主从决策者对所有模糊系数能达成共同的满意程度为 μ，令 $\mu_{\tilde b_i} = \mu_{\tilde c_{11}} = \mu_{\tilde c_{12}} = \mu_{\tilde c_{21}} = \mu_{\tilde c_{22}} = \mu_{\tilde a_{ij_k}} = \mu, i = 1,\cdots,m, j_k = 1,\cdots,n_k, k = 1,2$. 这里 $(\mu_{\tilde c_{11}}, \mu_{\tilde c_{12}}) = ((\mu_{\tilde c_{11j_1}})_{1\times n_1}, (\mu_{\tilde c_{12j_2}})_{1\times n_2}), (\mu_{\tilde c_{21}}, \mu_{\tilde c_{22}}) = ((\mu_{\tilde c_{21j_1}})_{1\times n_1}, (\mu_{\tilde c_{22j_2}})_{1\times n_2})$. 由于系数的隶属函数为单调的，其反函数存在，所以，将式(3)、(4)、(5) 代入以上等式，可得

$$b_i = b_i^L + (1-\mu)p_i \qquad i = 1,\cdots,m$$
$$a_{ij_k} = a^L_{ij_k} + p_{ij_k} - \mu p_{ij_k}$$
$$= a^L_{ij_k} + (1-\mu)p_{ij_k} \qquad i = 1,\cdots,m \quad j_k = 1,\cdots,n_k \quad k = 1,2$$
$$c_{ik} = c^L_{ik} + p_{c_{ik}}\mu \qquad i = 1,2 \quad k = 1,2$$

这里 $(c^L_{11}, c^L_{12}) = ((c^L_{11j_1})_{1\times n_1}, (c^L_{12j_2})_{1\times n_2}), (c^L_{21}, c^L_{22}) = ((c^L_{21j_1})_{1\times n_1}, (c^L_{22j_2})_{1\times n_2}), (p_{c_{11}}, p_{c_{12}}) = ((p_{11j_1})_{1\times n_1}, (p_{12j_2})_{1\times n_2}), (p_{c_{21}}, p_{c_{22}}) = ((p_{21j_1})_{1\times n_1}, (p_{22j_2})_{1\times n_2})$. 记 $A_1 = (a^L_{ij_1} + (1-\mu)p_{ij_1})_{m\times n_1}, A_2 = (a^L_{ij_2} + (1-\mu)p_{ij_2})_{m\times n_2}$，则式(2) 可化为如下的参数规划问题

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1} f_1(x_1,x_2) = (c^L_{11} + p_{c_{11}}\mu)x_1 + (c^L_{12} + p_{c_{12}}\mu)x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_2 \text{ 是如下问题的解} \\ \qquad \max\limits_{x_2} f_2(x_1,x_2) = (c^L_{21} + p_{c_{21}}\mu)x_1 + (c^L_{22} + p_{c_{22}}\mu)x_2 \\ \qquad \text{s.t.}\ (A_1x_1 + A_2x_2)_i \leqslant b_i^L + (1-\mu)p_i \quad i = 1,\cdots,m \\ \qquad\quad x_1, x_2 \geqslant 0 \qquad \text{参数 } \mu \in [0,1] \end{cases} \tag{6}$$

求解式(6)，便可得到式(2) 的（含有参数 μ 的）解. 如果 μ 值取定，则成为一精确两层线性规划问题，可以利用已有的两层线性优化算法求解.

例 1

$$\max_{x_1} f_1 = \tilde 2 x_1 - x_2$$

s.t. $\quad x_2$ 是如下问题的解

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$\max_{x_2} f_2 = \tilde{1}\, x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 3x_1 - 5x_2 \leqslant \widetilde{15}$$

$$3x_1 - x_2 \leqslant \widetilde{21}$$

$$\tilde{3}\, x_1 + x_2 \geqslant 27$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

其中的模糊参数具有基于满意概念的隶属函数. $\tilde{c}_{11} = [2,3]$, $\tilde{c}_{21} = [1,3]$, $\tilde{b}_1 = [15,17]$, $\tilde{a}_{31} = [2,3]$, $\tilde{b}_3 = [25,27]$. $\mu_{\tilde{c}_{11}}, \mu_{\tilde{c}_{21}}, \mu_{\tilde{a}_{31}}, \mu_{\tilde{b}_3}$ 是单增的, $\mu_{\tilde{b}_1}$ 是单减的(隶属函数略). 令 $\mu_{\tilde{c}_{11}} = \mu_{\tilde{c}_{21}} = \mu_{\tilde{b}_1} = \mu_{\tilde{a}_{31}} = \mu_{\tilde{b}_3} = \mu$, 则 $c_{11} = 2 + \mu$, $c_{21} = 1 + 2\mu$, $b_1 = 17 - 2\mu$, $b_3 = 25 + 2\mu$, $a_{31} = 2 + \mu$, 代入原方程,得下列辅助问题

$$\max_{x_1} f_1 = (2 + \mu)x_1 - x_2$$

s.t.　x_2 是如下问题的解

$$\max_{x_2} f_2 = (1 + 2\mu)x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 3x_1 - 5x_2 \leqslant 17 - 2\mu$$

$$3x_1 - x_2 \leqslant 21$$

$$(2 + \mu)x_1 + x_2 \geqslant 25 + 2\mu$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

参数 $\mu \in [0,1]$

若 μ 值取定,则上式成为一精确两层线性规划,取 $\mu = 0, 0.1, \cdots, 0.9, 1$, 分别求解上式,则得到对应决策者不同满意程度的模糊两层线性规划的解.

2　系数的隶属函数为非单调的模糊两层线性规划

系数的隶属函数为非单调函数的情形,其在实际决策问题中的一种常见情形是所谓基于可能性分布的模糊两层优化问题,即模型中含有的模糊系数的取值具有某种可能性分布的隶属函数的模糊两层优化问题. 它的意义不同于基于满意概念的隶属函数,它表示系数取值的可能性程度. 下面分别就主从的公共约束和各自的目标中系数具有可能性分布的一些常见情形进行讨论.

2.1　约束中系数具有可能性分布的情形

设 $\tilde{a}_{ij_k}(j_k = 1, \cdots, n_k, k = 1,2)$ 是服从梯形可能性分布的模糊数,用四元组表示 $\tilde{a}_{ij_k}$, $\tilde{a}_{ij_k} = (m_{ij_k}, n_{ij_k}, \alpha_{ij_k}, \beta_{ij_k})$, $\tilde{a}_{ij_k}$ 的可能性分布函数如下(见图4)

$$\pi_{\tilde{a}_{ij_k}}(a_{ij_k}) = \begin{cases} 0 & a_{ij_k} < m_{ij_k} - \alpha_{ij_k} \text{ 或 } a_{ij_k} > n_{ij_k} + \beta_{ij_k} \\ [a_{ij_k} - (m_{ij_k} - \alpha_{ij_k})]/\alpha_{ij_k} & m_{ij_k} - \alpha_{ij_k} \leqslant a_{ij_k} < m_{ij_k} \\ 1 & m_{ij_k} \leqslant a_{ij_k} \leqslant n_{ij_k} \\ [(n_{ij_k} + \beta_{ij_k}) - a_{ij_k}]/\beta_{ij_k} & n_{ij_k} < a_{ij_k} \leqslant n_{ij_k} + \beta_{ij_k} \end{cases} \tag{7}$$

可能性分布函数表示某事件能够发生的可能性程度,如上述 $\pi_{\tilde{a}_{ij_k}}$ 表示 a_{ij_k} 能够取值在区间 $[m_{ij_k}, n_{ij_k}]$ 的可能性最大,可能度为1;而 a_{ij_k} 能够取值在 $[m_{ij_k} - \alpha_{ij_k}, n_{ij_k} + \beta_{ij_k}]$ 区间以外值的可能性为0; a_{ij_k} 能够取值在区间 $[m_{ij_k} - \alpha_{ij_k}, m_{ij_k}]$ 的可能性线性增加, a_{ij_k} 能够取值在区间 $[n_{ij_k}, n_{ij_k} + \beta_{ij_k}]$ 的可能性线性减少.

设 $\tilde{b}_i = (p_i, q_i, t_i, s_i)$, $\tilde{b}_i$ 的可能性分布函数如下(见图5)

$$\pi_{\tilde{b}_i}(b_i) = \begin{cases} 0 & b_i < p_i - t_i \text{ 或 } b_i > q_i + s_i \\ [b_i - (p_i - t_i)]/t_i & p_i - t_i \leqslant b_i < p_i \\ 1 & p_i \leqslant b_i \leqslant q_i \\ [(q_i + s_i) - b_i]/s_i & q_i < b_i \leqslant q_i + s_i \end{cases} \tag{8}$$

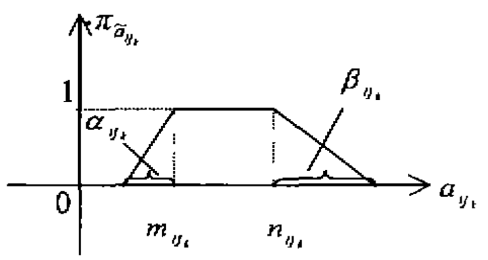

图 4　$\tilde{a}_{ij_k}$ 的可能性分布函数

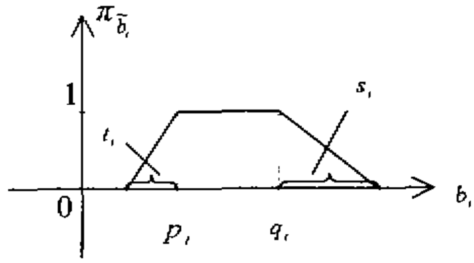

图 5　$\tilde{b}_i$ 的可能性分布函数

由于 $\tilde{a}_{ij_k}(j_k=1,\cdots,n_k,k=1,2)$,$\tilde{b}_i$ 均是模糊数,式(2)中的不等式约束左右两边分别是一模糊集合,上述不等式约束可理解为集合包含关系

$$\sum_{j_1}\tilde{a}_{ij_1}x_{1j_1}+\sum_{j_2}\tilde{a}_{ij_2}x_{2j_2}\leqslant\tilde{b}_i\qquad i=1,\cdots,m$$

"$\leqslant$"相当于普通集合的"$\subset$",运用模糊集合运算关系,式(9)左边等于($\sum_k\sum_{j_k}m_{ij_k}x_{kj_k}$,$\sum_k\sum_{j_k}n_{ij_k}x_{kj_k}$,$\sum_k\sum_{j_k}\alpha_{ij_k}x_{kj_k}$,$\sum_k\sum_{j_k}\beta_{ij_k}x_{kj_k}$),为定义模糊不等式"$\leqslant$",需要利用模糊数排序方法,这里采用文献[9]给出的一种排序法.考虑 $\tilde{a}_i=(m_i,n_i,\alpha_i,\beta_i)$,$\tilde{b}_i=(p_i,q_i,t_i,s_i)$ 均服从梯形可能性分布.定义 $\tilde{a}_i\leqslant\tilde{b}_i$,当且仅当 $m_i\leqslant p_i$,$m_i-\alpha_i\leqslant p_i-t_i$,$n_i\leqslant q_i$,$n_i-\beta_i\leqslant q_i+s_i$ 同时成立.

则上述模糊约束式(9)可化为确定约束

$$\begin{cases}\sum_k\sum_{j_k}m_{ij_k}x_{kj_k}\leqslant p_i\\ \sum_k\sum_{j_k}(m_{ij_k}-\alpha_{ij_k})x_{kj_k}\leqslant p_i-t_i\\ \sum_k\sum_{j_k}n_{ij_k}x_{kj_k}\leqslant q_i\\ \sum_k\sum_{j_k}(n_{ij_k}+\beta_{ij_k})x_{kj_k}\leqslant q_i+s_i\quad i=1,\cdots,m\end{cases}\tag{10}$$

当 $\tilde{a}_{ij_k}$,$\tilde{b}_i(i=1,\cdots,m,j_k=1,\cdots,n_k,k=1,2)$ 具有三角可能性分布(如图 6),用三元组表示

$$\tilde{a}_{ij_k}=(a^m_{ij_k},a^p_{ij_k},a^o_{ij_k})\qquad i=1,\cdots,m\quad j_k=1,\cdots,n_k\quad k=1,2$$

$$\tilde{b}_i=(b_i^m,b_i^p,b_i^o)\qquad i=1,\cdots,m$$

记 $\tilde{a}_{ij_k}$,$\tilde{b}_i$ 的 β— 割集的中间值,左端值,右端值分别为 $(a^m_{ij_k\beta},a^p_{ij_k\beta},a^o_{ij_k\beta})$,$(b^m_{i\beta},b^p_{i\beta},b^o_{i\beta})$(如图 7 所示),则式(2)中的模糊约束可化为下面的确定系数的约束:

$$\begin{cases}A^m_{1\beta}x_1+A^m_{2\beta}x_2\leqslant b^m_\beta\\ A^p_{1\beta}x_1+A^p_{2\beta}x_2\leqslant b^p_\beta\\ A^o_{1\beta}x_1+A^o_{2\beta}x_2\leqslant b^o_\beta\\ \text{参数 }\beta\in[0,1]\end{cases}$$

这里 $(A^m_{1\beta},A^p_{1\beta},A^o_{1\beta})=((a^m_{ij_1\beta})_{m\times n_1},(a^p_{ij_1\beta})_{m\times n_1},(a^o_{ij_1\beta})_{m\times n_1})$ $(A^m_{2\beta},A^p_{2\beta},A^o_{2\beta})=((a^m_{ij_2\beta})_{m\times n_2},(a^p_{ij_2\beta})_{m\times n_2},(a^o_{ij_2\beta})_{m\times n_2})$,$(b^m_\beta,b^p_\beta,b^o_\beta)=((b^m_{i\beta})_{m\times 1},(b^p_{i\beta})_{m\times 1},(b^o_{i\beta})_{m\times 1})$.

2.2　主从的目标中系数具有可能性分布的情形

假设 $\tilde{c}_{11j_1}$,$\tilde{c}_{21j_1}(j_1=1,\cdots,n_1)$,$\tilde{c}_{12j_2}$,$\tilde{c}_{22j_2}(j_2=1,\cdots,n_2)$ 是具有三角可能性分布的模糊数,用三元组表示,$\tilde{c}_{ikj_k}=(c^m_{ikj_k},c^p_{ikj_k},c^o_{ikj_k})$,这里 $i=1,2$,$j_k=1,\cdots,n_k$,$k=1,2$.$\tilde{c}_{ikj_k}$ 的可能性分布函数如下(见图 8).

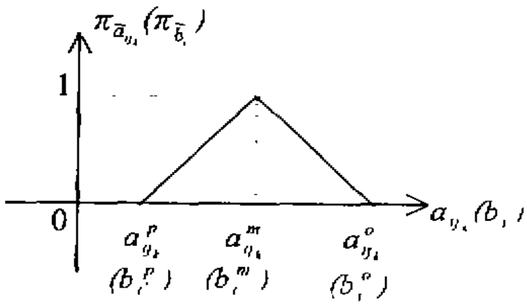

图 6　$\tilde{a}_{ij_k}(\tilde{b}_i)$ 的可能性分布函数

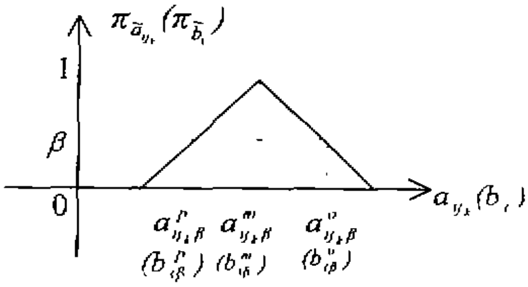

图 7　$\tilde{a}_{ij_k}(\tilde{b}_i)$ 的 β— 割集

$$\pi_{\tilde{c}_{ikj_k}}(c_{ikj_k})=\begin{cases}0 & c_{ikj_k}<c^p_{ikj_k}\text{ 或 }c_{ikj_k}>c^o_{ikj_k}\\(c_{ikj_k}-c^p_{ikj_k})/(c^m_{ikj_k}-c^p_{ikj_k}) & c^p_{ikj_k}\leqslant c_{ikj_k}\leqslant c^m_{ikj_k}\\(c^o_{ikj_k}-c_{ikj_k})/(c^o_{ikj_k}-c^m_{ikj_k}) & c^m_{ikj_k}\leqslant c_{ikj_k}\leqslant c^o_{ikj_k}\end{cases}\tag{11}$$

则目标函数 f_1,f_2 也是具有三角可能性分布的模糊数 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2$.

$$\tilde{f}_1=(c^m_{11}x_1+c^m_{12}x_2,c^p_{11}x_1+c^p_{12}x_2,c^o_{11}x_1+c^o_{12}x_2)=(f^m_1,f^p_1,f^o_1)$$

$$\tilde{f}_2=(c^m_{21}x_1+c^m_{22}x_2,c^p_{21}x_1+c^p_{22}x_2,c^o_{21}x_1+c^o_{22}x_2)=(f^m_2,f^p_2,f^o_2)$$

为最大化目标函数 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2$ 只需最大化 $f^m_1,f^p_1,f^o_1,f^m_2,f^p_2,f^o_2$.即

$$\max_{x_1}\tilde{f}_1(x_1,x_2)=(f^m_1,f^p_1,f^o_1)\qquad\max_{x_2}\tilde{f}_2(x_1,x_2)=(f^m_2,f^p_2,f^o_2)$$

这样上下两层均是多目标函数.可以用解多目标规划的加权平均法或其它方法把上下两层目标函数化成单目标，也可以用如文献[8]中的交互式等方法直接求解.

为了保持 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2$ 的三角可能性分布，考虑 $\tilde{f}_1=(f^m_1,f^p_1,f^o_1)$, $\tilde{f}_2=(f^m_2,f^p_2,f^o_2)$. $\tilde{f}_1(\tilde{f}_2)$ 由三点 $\{(f^m_1,1),(f^p_1,0),(f^o_1,0)\}(\{(f^m_2,1),(f^p_2,0),(f^o_2,0)\})$ 完全决定. 为最大化 $\tilde{f}_1(\tilde{f}_2)$，只需把三点沿横轴向右移(如图 9).

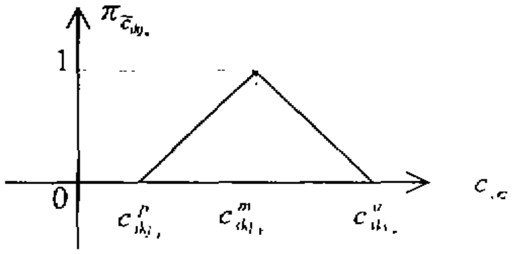

图 8　$\tilde{c}_{ikj_k}$ 的可能性分布函数

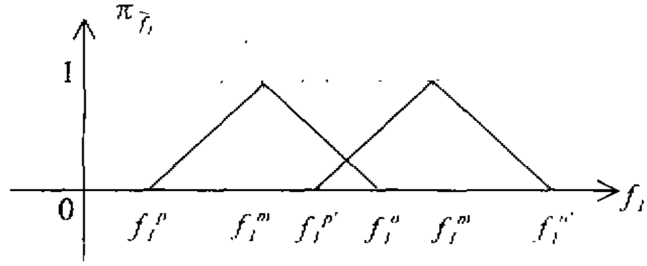

图 最大化 示意图

从图 9 看出 $\max f_1$ 相当于 $\max f^m_1,\min(f^m_1-f^p_1),\max(f^o_1-f^m_1)$, $\max f_2$ 同理. 所以有

$$\max_{x_1} f_1=\{\max_{x_1} f^m_1,\min_{x_1}(f^m_1-f^p_1),\max_{x_1}(f^o_1-f^m_1)\}$$

$$\max_{x_2} f_2=\{\max_{x_2} f^m_2,\min_{x_2}(f^m_2-f^p_2),\max_{x_2}(f^o_2-f^m_2)\}$$

仍可用加权平均法把上下两层多目标函数化为单目标函数，也可用其它直接方法求解.

再考虑目标系数分布的另一种情形. 假设 $\tilde{c}_{ikj_k}=(c^L_{ikj_k},c^R_{ikj_k})(i=1,2,j_k=1,\cdots,n_k,k=1,2)$ 分别是一个区间值. 可以定义

$$f_{1\min}(x_1,x_2)=c^L_{11x_1}+c^L_{12x_2}\qquad f_{1\max}(x_1,x_2)=c^R_{11x_1}+c^R_{12x_2}$$

$$f_{2\min}(x_1,x_2)=c^L_{21x_1}+c^L_{22x_2}\qquad f_{2\max}(x_1,x_2)=c^R_{21x_1}+c^R_{22x_2}$$

这里 $(c_{11}^L, c_{12}^L) = ((c_{11j_1}^L)_{1\times n_1}, (c_{12j_2}^L)_{1\times n_2})$，$(c_{11}^R, c_{12}^R) = ((c_{11j_1}^R)_{1\times n_1}, (c_{12j_2}^R)_{1\times n_2})$，$(c_{21}^L, c_{22}^L) = ((c_{21j_1}^L)_{1\times n_1}, (c_{22j_2}^L)_{1\times n_2})$，$(c_{21}^R, c_{22}^R) = ((c_{21j_1}^R)_{1\times n_1}, (c_{22j_2}^R)_{1\times n_2})$. 把模型(2)中的无限个目标函数化成如下问题：

$$\max_{x_1} f_1(x_1, x_2) = \max_{x_1}(f_{1\min}(x_1, x_2), f_{1\max}(x_1, x_2))$$

$$\max_{x_2} f_2(x_1, x_2) = \max_{x_2}(f_{2\min}(x_1, x_2), f_{2\max}(x_1, x_2))$$

如果决策者能表达关于区间值 $\tilde{c}_{ikj_k}$ 的可能性分布形式，则 $\tilde{c}_{ikj_k}$ 可用模糊集形式表示如下：

$$\tilde{c}_{ikj_k} = \{(c_{ikj_k}, \pi_{\tilde{c}_{ikj_k}}), c_{ikj_k} \in [c_{ikj_k}^L, c_{ikj_k}^R]\} \quad i = 1,2 \quad j_k = 1,\cdots,n_k \quad k = 1,2$$

假设 $\tilde{c}_{ikj_k}$ 是凸模糊数，服从凸可能性分布，其可能性分布函数如图 10 所示. 取有限个可能度值 $\{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$，相应于 β_q— 割集 $(q = 1, \cdots, r$，如图 10) 考虑 r 个目标值. 可作如下定义：

$$f_{1\min}^{\beta_q}(x_1, x_2) = c_{11\min}^{\beta_q} x_1 + c_{12\min}^{\beta_q} x_2$$

$$f_{1\max}^{\beta_q}(x_1, x_2) = c_{11\max}^{\beta_q} x_1 + c_{12\max}^{\beta_q} x_2$$

$$f_{2\min}^{\beta_q}(x_1, x_2) = c_{21\min}^{\beta_q} x_1 + c_{22\min}^{\beta_q} x_2$$

$$f_{2\max}^{\beta_q}(x_1, x_2) = c_{21\max}^{\beta_q} x_1 + c_{22\max}^{\beta_q} x_2 \qquad q = 1, \cdots, r$$

这里 $(c_{11\min}^{\beta_q}, c_{12\min}^{\beta_q}) = ((c_{11j_k\min}^{\beta_q})_{1\times n_1}, (c_{12j_k\min}^{\beta_q})_{1\times n_2})$，$(c_{11\max}^{\beta_q}, c_{12\max}^{\beta_q}) = ((c_{11j_k\max}^{\beta_q})_{1\times n_1}, (c_{12j_k\max}^{\beta_q})_{1\times n_2})$，$(c_{21\min}^{\beta_q}, c_{22\min}^{\beta_q}) = ((c_{21\min}^{\beta_q})_{1\times n_1}, (c_{22\min}^{\beta_q})_{1\times n_2})$，$(c_{21\max}^{\beta_q}, c_{22\max}^{\beta_q}) = ((c_{21\max}^{\beta_q})_{1\times n_1}, (c_{22\max}^{\beta_q})_{1\times n_2})$.

将式(2)中目标函数用上面式子代替，最后化为如下形式：

$$\max_{x_1} f_1 = \max_{x_1}(f_{1\min}^{\beta_1}, f_{1\max}^{\beta_1}, f_{1\min}^{\beta_2}, f_{1\max}^{\beta_2}, \cdots, f_{1\min}^{\beta_r}, f_{1\max}^{\beta_r})$$

$$\max_{x_2} f_2 = \max_{x_2}(f_{2\min}^{\beta_1}, f_{2\max}^{\beta_1}, f_{2\min}^{\beta_2}, f_{2\max}^{\beta_2}, \cdots, f_{2\min}^{\beta_r}, f_{2\max}^{\beta_r})$$

上下两层分别含有 $2r$ 个目标函数，可用加权平均法把多目标化成单目标，也可用其它方法求解.

例 2

$$\max_{x_1} f_1 = \tilde{2}\, x_1 - x_2$$

s. t. x_2 是如下问题的解

$$\max_{x_2} \quad f_2 = \tilde{1}\, x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.} \quad \tilde{3}\, x_1 - \tilde{5}\, x_2 \leqslant \widetilde{15}$$

$$3x_1 - x_2 \leqslant 21$$

$$\tilde{3}\, x_1 + x_2 \geqslant \widetilde{27}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

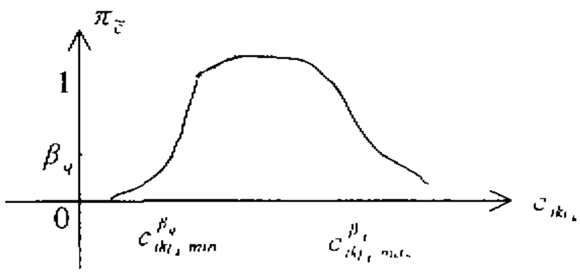

图 10　$\tilde{c}_{ikj_k}$ 的可能性分布函数

假设其中的模糊参数服从三角形式的可能性分布(隶属函数略).

$\tilde{c}_{11} = (2,1,3)$，$\tilde{c}_{21} = (1,0.5,2)$，$\tilde{a}_{11} = (3,1,4)$，$\tilde{a}_{12} = (-5,-6,-3)$，$\tilde{b}_1 = (15,14,17)$，$\tilde{a}_{21} = (3,2,5)$，$\tilde{b}_3 = (27,25,28)$，$\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{b}_1, \tilde{b}_3, \tilde{a}_{11}$ 的 β— 割集的中间值、左端值、右端值分别为：

$$a_{11\beta} = (3, 2\beta + 1, 4 - \beta) \qquad b_{1\beta} = (15, \beta + 14, -2\beta + 17)$$

$$a_{12\beta} = (-5, \beta - 6, -2\beta - 3) \qquad a_{31\beta} = (3, \beta + 2, -2\beta + 5)$$

$$b_{3\beta} = (27, 25 + 2\beta, 28 - \beta)$$

原方程化为如下辅助问题：

$$\max_{x_1} \quad f_1 = (2x_1 - x_2, x_1 - x_2, 3x_1 - x_2)$$

s. t. x_2 是如下问题的解

$$\max_{x_2} f_2 = (x_1 + 2x_2, 0.5x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2)$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 - 5x_2 \leqslant 15$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$3x_1 - x_2 \leqslant 21$$
$$3x_1 + x_2 \geqslant 27$$
$$(2\beta + 1)x_1 + (\beta - 6)x_2 \leqslant \beta + 14$$
$$(4 - \beta)x_1 + (-2\beta - 3)x_2 \leqslant 17 - 2\beta$$
$$(\beta + 2)x_1 + x_2 \leqslant 25 + 2\beta$$
$$(-2\beta + 5)x_1 + x_2 \geqslant 28 - \beta$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0, \text{参数 } \beta \in [0,1]$$

若决策者事先给定最小可接受的可能度值 β，则上式成为一确定系数的两层多目标线性规划. 可根据已有的各种算法求解.

3　结 束 语

本文讨论了具有模糊系数的两层线性规划问题，所提出的转化为具有确定系数的两层线性规划模型求解的方法，不仅对于解决现实世界中广泛存在的模糊递阶决策问题具有实际意义，而且为进一步的理论研究提供了基础. 尽管本文的讨论是针对两层的情形，但本方法不难推广到多层的情况.

参 考 文 献

1 Bialas W F，Karwan M H. Two-level linear programming. Management Science，1984；30(8)：1004～1020

2 Bard J F. An efficient point algorithm for a linear two-stage optimization problem. Ops. Res. 1983；31(4)：670～684

3 Liu Xiaomin，Wang Rishuang. An algorithm to solve linear bilevel programs. Journal of Systems Science & Systems Engineering，1995；4(2)：158～167

4 Bard J F，Falk J E. An explicit solution to the multilevel programming problem. Computer & Ops. Res. 1982；9：77～100

5 White D J，Anandalingam G. A penalty function approach for solving bilevel linear programs. Journal of Global Optimization，1993；3：397～419

6 Lai Y J. Hierarchical optimization：a satisfactory solution. Fuzzy Sets & Systems. 1996；77：321～335

7 Hsu-shih，Lai Y J，Lee E S. Fuzzy approach for multi-level programming problems. Computers Ops. Res. 1996；23(1)：73～91

8 夏洪胜，贺建勋. 基于满意度的两层多目标决策问题的交互式外部逼近算法. 系统工程理论方法应用，1993；2(1)：14～22

9 Lai Y J，Hwang C L. Fuzzy mathematical programming—methods and applications. Berlin：Springer-verlag，1993

Bilevel Linear Programming With Fuzzy Coefficients

Fu Yonghong，Du Gang

School of Management，Tianjin University

Abstract　In this paper，bilevel linear programming with fuzzy coefficients is studied. Bilevel linear programming with fuzzy coefficients whose membership functions are monotonous and non-monotonous is transformed into bilevel linear programming with precise coefficients through different approaches respectively. Two numerical examples are solved to show the applicability of these approaches.

Keywords：　fuzzy coefficient，membership function，monotony，bilevel linear programming