

# 基于 Black-Scholes 模型的公司资本结构模型

杨宝臣<sup>①</sup> 刘 锋 张 彤  
(天津大学管理学院)

**【摘要】**对考虑代理成本的公司资本结构问题进行了研究,引入期权理论及其定价模型给出确定这一情况下的公司最优资本结构的方法,并给出应用实例。

**关键词:** Black-Scholes 模型, 资本结构, 代理成本

**分类号:** F831

## 0 引言

筹集资金是财务管理的一项最基本、最原始的内容。人们在长期的理财实践中,发现长期负债与股东权益之间的数量关系——资本结构是一个不容忽视的问题,处理不当会严重影响公司的财务状况。资本结构理论是公司财务理论的重要组成部分,主要研究资本结构的变动对公司价值的影响。现代最有影响的资本结构理论是 MM 理论,其后发展起来的资本结构理论有新综合理论、非对称信息论及权衡理论等,它们均从不同的侧面对 MM 理论进行了改进和发展。其中,权衡理论为在实际操作中解决资本结构问题提供了可行的方向。

权衡理论认为,MM 理论只考虑了负债带来的抵税收益,却忽略了负债带来的风险和额外费用。实际上,应该既考虑负债带来的利益,又考虑负债带来的各种费用,即最优资本结构的确定应当在减税收益与财务拮据成本、代理成本之间进行审慎的权衡。当然,权衡理论也是在 MM 理论的基础上产生的,但因其考虑了更多的现实因素,所以更符合实际情况。这一模型的不足之处在于:对财务拮据成本和代理成本所引起的公司价值降低,尚只能局限于定性分析,缺乏有效的定量方法。

本文引入期权理论和期权定价 Black-Scholes

模型,使代理成本所引起的价值降低量得以具体地度量,并分别得出了公司价值模型及最优资本结构的确定模型,从而为权衡理论的实际应用奠定了基础。

## 1 代理成本及违约风险的度量

### 1.1 代理成本与违约风险

通常股份有限公司由于所有权和经营权分离,经理与股东利益的不一致,导致经理会为了自己的利益而损害股东利益。股东为了保护自己的利益,就必须对经理的经营行为进行监督和控制,这就是代理问题,由此而产生的费用就是代理成本。其实,代理问题绝不仅仅发生在经理和股东之间,债权人与经理之间也存在着代理问题。当涉及到公司可能的财务拮据时,后一类代理问题就会表现得更为突出。研究公司的资本结构问题时,主要涉及到负债对公司价值的影响,而负债与公司的财务拮据问题是密不可分的,所以,我们研究代理成本的重点放在债权人与经理之间的代理问题上。

MM 理论实际隐含着公司可以始终以无风险利率  $R_f$  借债,而这一点是与现实情况极不相符的。随着公司负债的增加,债权人考虑到公司违约风险的增加,会要求更高的负债利率,以获得风险补偿;或者在借款时对公司的经营活动提出种种

<sup>①</sup> 杨宝臣,博士,副教授。通讯地址:天津大学管理学院,邮编:300072。  
本文 1998 年 7 月 17 日收到。

限制条件,以降低公司的违约风险。

随公司负债的增加,代理成本体现为如下三种可能的情况:

(i) 由于债权人对公司的经营提出种种限制条件,使公司的经营自主性降低,导致投资机会减少,经济效益受到影响;

(ii) 负债利率上升,债息的增长率高于债务的增长率;

(iii) 情况(i)与情况(ii)的混合,债权人不但要求更高的负债利率,而且还对公司的经营提出种种限制条款。

可见,代理成本实际上是债权人对违约风险的货币化度量。

### 1.2 公司债券的估值

公司发行债券借债相当于股东以公司资产为抵押向债权人借取一定数额的资金。因为股东对公司仅具有有限责任,所以债权人的求偿权仅限于公司的资产,而无权追索股东的个人资产。这一有限责任相当于公司拥有一个看跌期权,在债券到期日,如果公司的资产值低于其负债的票面价值,则公司无力履约,须经破产清算,债权人得到补偿,这相当于股东把一个低于执行价格的标的资产出售给债权人。可以认为,公司在运用债券筹资时,不仅取得了一笔资金,而且同时拥有了一个看跌期权。

设所发行的债券是无息票债券(Zero-coupon bond),则债权人为将来取得债券面值  $D$ , 现在需付出的金额为  $D_0$ , 债权人同时出售给公司一个以  $D$  为执行价格的看跌期权  $P$ , 即债券市场价值(发行价)  $D_0$  应有如下形式

$$D_0 = De^{-R_f t} - P \quad (1)$$

其中  $R_f$  —— 无风险利率;  $t$  —— 债券期限;  $P$  —— 看跌期权的价值。

式(1)揭示了公司违约风险给公司债券估值带来的影响。即在相同的债券期限和相同的到期本息的情况下,看跌期权价值大,也就是违约风险大的债券,其价值会相对较低。

### 1.3 违约风险的度量

违约风险可以期权定价模型来进行度量。公司在债务到期日无力偿债,即违约(default)。由式(1)可知,要估计债权人在借债给公司时所承担的违约风险有多大,只需估计出股东拥有的看跌期

权价值  $P$  即可。

根据前面的分析,该看跌期权的执行价格为债权面值  $D$ , 其期限与债券期限相同,标的物为公司资产,则根据测定看跌期权价值的 Black-Scholes 定价模型(文献[2]),得到

$$P = De^{-R_f t} N(-d_2) - AN(-d_1) \quad (2)$$

$$\text{其中 } d_1 = \frac{\ln(A/D) + (R_f + \sigma_a^2/2) \times t}{\sigma_a \sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(A/D) + (R_f - \sigma_a^2/2) \times t}{\sigma_a \sqrt{t}} \\ = d_1 - \sigma_a \sqrt{t}$$

$R_f$  —— 无风险利率;  $t$  —— 公司债券的期限;  $A$  —— 公司资产的现值;  $\sigma_a$  —— 公司资产收益率变动的标准差。

## 2 考虑代理成本的公司最优资本结构模型

上一节中介绍了代理成本的 3 种存在形式,这一节将分析代理成本为形式(i)“债权人对公司的经营提出种种限制条件”时的公司最优资本结构模型。代理成本为形式(ii)、形式(iii)情况将另文研究。

形式(i)的代理成本表现为由于债权人对公司的经营提出种种限制条件,使公司的经营自主性降低,导致投资机会减少,经济效益受到影响带来的损失。

假设

- 1) 公司发行的债券为零息票债券,即折价发行,债权人在债务到期日按债券面值收回本利;
- 2) 债券期限  $t = 1$ , 与股息的发放周期相同;
- 3) 无发行费用;
- 4) 不计复利,按单利计息。

那么公司负债现值为

$$D_0 = \frac{D}{1 + R_f} - P \quad (3)$$

上式中的  $P$  为

$$P = De^{-R_f t} N(-d_2) - AN(-d_1) \quad (4)$$

$$\text{其中 } d_1 = [\ln(A/D) + (R_f + \sigma_a^2/2)]/\sigma_a$$

$$d_2 = [\ln(A/D) + (R_f - \sigma_a^2/2)]/\sigma_a \\ = d_1 - \sigma_a$$

设公司的债务利率为  $r$ , 有

$$D_0(1+r) = D$$

由式(3)和式(5)得

$$\begin{aligned} r &= R_f + \frac{P}{D_0}(1+R_f) \\ &= R_f + \Delta r \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\Delta r = \frac{P}{D_0}(1+R_f)$

可见,因为考虑了违约风险,随之产生的代理成本为  $\Delta r D_0$ .

若债权人对于违约风险的反应仅为对负债公司的经营提出种种限制条款,其要求的债息并未随负债的增多、违约风险的增大而提高,仍为  $R_f$ ,此时的代理成本被认为是导致公司的税前息前收益 EBIT 的减少量,那么当公司进行负债融资时,它每年产生的净现金流量( $CF_L$ )为

$$\begin{aligned} CF_L &= (1-T_c)(EBIT - \Delta r D_u - R_f D_0) \\ &\quad + R_f D_0 \\ &= (1-T_c)EBIT + T_c R_f D_0 - \\ &\quad (1-T_c)\Delta r D_0 \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)右边的现金流量都具有永续年金的性质,所以只要将它们分别除以适当的折现率,就能算出有负债公司的价值.

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{(1-T_c)EBIT}{R_{sr}} + \frac{T_c R_f D_u}{R_f} \\ &\quad - \frac{(1-T_c)\Delta r D_u}{R_f} = V_U + T_c D_0 - \\ &\quad (1-T_c)\Delta r D_0 / R_f \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $V_L$ ——有负债公司的市场价值

$V_U$ ——无负债公司的市场价值

于是,得到下述模型:

**定理(公司价值模型 A):**当代理成本为形式(i)时,公司的价值为如下形式

$$V_L = V_U + T_c D_0 - (1-T_c)\Delta r D_0 / R_f$$

分析模型 A 可知,公司资本结构的变化会对负债公司的市场价值产生影响,由于随着负债的增加,模型 A 右边的第 2 项和第 3 项呈反向变化,所以存在最佳负债比例,使负债公司的市场价值最大.为了确定最优资本结构,首先对模型 A 求关于负债现值的导数,并令其导数为零,就可求得达到最优资本结构时的负债量  $D_0^*$ .其中决策变量为公司负债的现值  $D_0$ ,即公司实际所借金额的大小.

$$\frac{dV_L}{dD_0} = \frac{dV_U}{dD_0} + \frac{d(T_c D_0)}{dD_0} -$$

$$\frac{d[(1-T_c)\Delta r D_0 / R_f]}{dD_0} = 0 \quad (9)$$

$$\text{所以} \quad \frac{d[(1-T_c)\Delta r D_0 / R_f]}{dD_0} = \frac{1-T_c}{R_f} \cdot$$

$$\frac{d(\Delta r D_0)}{dD_0} \quad (10)$$

$$\text{而} \quad \frac{d(\Delta r D_0)}{dD_0} = \Delta r + D_0 \frac{d\Delta r}{dD_0} \quad (11)$$

再由式(6)和式(3)得

$$\begin{aligned} \Delta r &= \left[ \frac{D}{D_0(1+R_f)} - 1 \right] (1+R_f) \\ &= \frac{D}{D_0} - (1+R_f) \end{aligned} \quad (12)$$

又由式(4)知  $P$  是债券面值  $D$  的函数,设为  $F(D)$

$$\begin{aligned} P &= De^{-R_f N} [-d_2(D)] - AN [-d_1(D)] \\ &= F(D) \end{aligned}$$

由上面的定义式可知,  $F(D)$  是关于  $D$  的连续单调递增函数.

将式(3)改写为

$$D_u = \frac{D}{1+R_f} - F(D) \quad (13)$$

求上式反函数,得  $D = G(D_u)$  (14)

则式(12)写为  $\Delta r = \frac{G(D_0)}{D_0} - (1+R_f)$  (15)

$$\text{所以} \quad \frac{d\Delta r}{dD_0} = \frac{G'(D_0)D_0 - G(D_0)}{D_0^2} \quad (16)$$

将式(15)和式(16)代入式(11),得

$$\frac{d(\Delta r D_0)}{dD_0} = G(D_0) - (1+R_f) \quad (17)$$

将式(17)代入式(10),得

$$\begin{aligned} \frac{d[(1-T_c)\Delta r D_0 / R_f]}{dD_0} &= \frac{1-T_c}{R_f} [G'(D_0)D_0 - G(D_0) - (1+R_f)] \\ &= \frac{1-T_c}{R_f} [G'(D_0)D_0 - (1+R_f)] \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)代入式(9),得

$$T_c - \frac{1-T_c}{R_f} [G'(D_0)D_0 - (1+R_f)] = 0 \quad (19)$$

于是,得到下述模型:

**推论(最优资本结构确定模型 B)** 当代理成本为形式(i)时,满足下式的  $D^*$  即为公司的最优负债量

$$T_c - \frac{1-T_c}{R_f} [G'(D_0)D_0 - (1+R_f)] = 0$$

如果  $T_c, R_f, A, \sigma_a$  已知,则通过模型 B 可确定

达到最优资本结构时的公司负债量  $D_0^*$ 。

另外,由反函数微商的定理及式(13)、(14)可知

$$G'(D_0) = \frac{(1 + R_f)}{1 - (1 + R_f)F(D)}$$

则模型 B 又可写为

$$T_c - \frac{1 - T_c}{R_f} \left[ \frac{1 + R_f}{1 - (1 + R_f)F(D)} - (1 - R_f) \right] = 0 \quad (20)$$

其中

$$F(D) = e^{-R_f} N[-d_2(D)] + \frac{e^{-R_f}}{\sigma_u} e^{-\frac{[d_2(D)]^2}{2}} - \frac{A}{D\sigma_u} e^{-\frac{[d_1(D)]^2}{2}}$$

可以先由式(20)求得达到最优资本结构时的无息票债券面值  $D^*$ ,再由式(13)解得最优负债量  $D_0^*$ 。

### 3 应用例

设某公司的财务资料如下:

1) 公司目前未进行负债融资,它的资本结构完全由普通股权益构成;

2) 公司的资产负债表简要列示如表 1;

表 1 公司的资产负债表

资产(单位:万元)		负债和所有者权益(单位:万元)	
流动资产	520	普通股权益	
固定资产	160		680
合计	680	合计	680

3) 现公司计划开始使用负债,由举债而来的资金将被用来取代部分的普通股权益,因而公司的总资产将固定不变;

4) 所发行债券为零息票债券,债券期限为一年,股息亦在一年后发放,无发行费用,按单利计

息;

5) 无风险利率为 12%,资产年收益标准差为 0.4,公司所得税率为 30%。

试确定该公司应借债多少,从而达到最佳资本结构。

由上述资料可知

$$R_f = 12\% \quad A = 680 \text{ 万元} \quad \sigma_u = 0.4 \quad T_c = 30\%$$

先求所发行的无息票债券面值  $D$ ,将上述数据代入式(20),得到

$$1.046 = \frac{1}{1 - 1.12F(D)} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} F(D) &= \{De^{-R_f}N[-d_2(D)] \\ &\quad - AN[-d_1(D)]\} \\ &= 0.887 \int_{-\infty}^{\frac{\ln(680/D) + 0.4}{0.4}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + 2.218 \\ &\quad e^{\frac{\ln(680/D) - 0.4}{0.4}} - \frac{1700}{D} e^{-\frac{[\ln(680/D) - 0.4]^2}{2}} \end{aligned}$$

将上式代入式(21),解得

$$D^* = 363 \text{ 万元}$$

将  $D^*$  代入式(13),求得  $D_0^* = 322 \text{ 万元}$

所以,公司应发行的无息票债券的面值为 363 万元,实际负债量为 322 万元,即公司发行债券实际获得金额为 322 万元,债务利息率为 12.7%。

### 4 结 论

本文以权衡理论为基础,引入期权理论和期权定价模型,定量地度量当代理成本存在时,负债对公司价值的影响,其结果与权衡理论相符合,并给出了最优资本结构具体的测算形式,为资本结构理论的实际应用提供了一种可行的测算方法。

### 参 考 文 献

- 1 Modigliani F, Miller M H. The cost of capital, corporate finance and investment. American Economic Review, 1958; 48 (3): 261~297
- 2 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 1973; 81(3): 637~654
- 3 Miller M H. Debt and taxes. The Journal of Finance, 1977; 32(2): 266~268

- 4 Toft K B, Prucyk B. Option on leveraged equity: theory and empirical tests. *The Journal of Finance*. 1997; 52(3): 475~486
- 5 Leland H E. Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *The Journal of Finance*. 1994; 49(4): 874~892
- 6 Leland H E, Toft K B. Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *The Journal of Finance*. 1996; 51(3): 576~582
- 7 Harris M, Raviv A. The theory of capital structure. *The Journal of Finance*. 1991; 46(1): 297~355
- 8 Horne J C V, Wachowicz J M. *Fundamentals of financial management*. New York: Prentice Hall Inc., 1998
- 9 Sharpe W F, Alexander G J, Bailey J V. *Investments*. New York: Prentice Hall Inc., 1995
- 10 余绪缨. 企业理财学. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1996
- 11 汪平, 刘兴云. 公司理财原理. 上海: 上海财经大学出版社, 1997
- 12 陈小悦. 资本结构与企业价值. 国际会计与财务研究论丛, 1997. 46~55

## Black-Scholes Model Oriented Capital Structure Models

*Yang Baochen, Liu Zheng, Zhang Tong*

School of Management, Tianjin University

**Abstract** This paper studies the capital structure in consideration of agency costs, by using Black-Scholes option pricing model, it proposes the corporate valuation model and optimal capital structure model. At last, it gives an numerical example to prove its usefulness.

**Keywords:** Black-Scholes option pricing model, capital structure, agency costs

(上接第 61 页)

- 11 肖勇, 陈意云. 用遗传算法构造决策树. *计算机研究与发展*, 1998; 35(1): 49~52
- 12 Chai Bingbing, Huang Tong, Zhuang Xinhua, Sklansky Jack. Piecewise linear classifiers using binary tree structure and genetic algorithm. *Pattern Recognition*. 1996; 20(11): 1905~1917

## The Application of Genetic Algorithm in Model Selection

*Wu Fei, Huang Tiyun*

Harbin Institute of Technology

**Abstract** Model selection plays an important role in model management. Genetic algorithm is employed to construct binary decision tree which is used to select model in this paper. The application sample for trend forecast model selection is given and the factors that influence the inaccurate ration of binary decision tree is discussed.

**Keywords:** binary decision tree, model selection, genetic algorithm