第2卷第4期
1999年12月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 2 No. 4
Dec. 1999

39-43

带有交易费用的证券投资最优策略[①]

刘海龙[1]，樊治平[2]，潘德惠[2]

F830.9

(1. 沈阳大学工商管理学院，沈阳 110044；2. 东北大学工商管理学院，沈阳 110006)

摘要：在假设证券价格服从几何布朗运动的基础上，运用随机最优控制理论，研究了在 n 个风险证券金融市场中带有交易费用的证券投资问题，建立了带有交易费用的证券投资最优控制问题的数学模型. 首先，简述了文中所涉及的随机最优控制理论，给出了值函数、效用函数和粘性解的定义. 然后，在粘性解的意义下，推导出了交易策略有限和交易策略无限两种情况下值函数所满足的偏微分方程，该偏微分方程是由变分不等式描述的自由边值问题. 最后，给出了两种情况下基于最优控制问题值函数的证券投资最优策略. 本文得到的结果可以用于投资基金管理、金融风险管理等实际工作中，提高决策的科学性.

关键词：证券投资；交易费用；随机最优控制；值函数；效用函数；粘性解

分类号：F224　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-9807(1999)04-0039-05

0 引 言

关于证券投资最优策略问题，具有奠基性的研究成果是 Markowitz 的证券组合理论[1]. 虽然 Markowitz 证券组合理论对于证券投资决策问题的解决具有重要促进作用，但是该理论所研究的问题是基于静态的数学模型，并没有解决关于证券投资的动态控制问题，而且以往的研究大多没有考虑交易费用[1~4]. 80年代以后，人们开始运用随机最优控制理论研究具有不确定因素的证券投资动态控制问题，特别是近几年关于带有交易费用的证券投资最优策略问题的研究已经引起了高度重视[5~9]. 文[5]和[6]运用最优停时理论研究了带有固定交易费用的证券投资问题，给出了具有二个风险证券的投资问题一种简化算法；文[7]运用随机最优控制理论研究了带有交易费用的最优投资和消费问题，但是，没有给出一般的投资策略；文[8]运用模拟退火方法研究了带有交易费用的证券投资问题，但是，当维数较高时，算法的收敛速度较慢；文[9]运用微分对策方法研究了带有交易费用的证券投资问题，但是只给出了交易策略有限情况下的最优投资策略. 本文研究的基本思路是：运用随机最优控制理论研究了带有交易费用的 n 个风险证券的最优投资策略问题. 首先，建立了证券投资问题的随机最优控制模型；然后，把证券投资问题归结为求解随机最优控制值函数问题；最后，基于值函数给出了交易策略有限和交易策略无限两种情况下的一般投资策略.

1 预备知识

以下简单叙述本文所涉及的文献[10]、[11]中的随机最优控制理论，而对有关理论不加证明，详尽的内容可参考上述文献.

设 (Ω, F, P) 是一概率空间，$w(t), t \geqslant 0$ 是概率空间 (Ω, F, P) 上的 k 维 Wiener 过程；$F_t = \sigma[w(s), s \leqslant t]$ 是由 Wiener 过程 $w(t)$ 产生的 σ-域族 $\{F_t\}$，每个 σ-域 F_t 都是完备化的；设 U 是 m 维欧氏空间 R 中的一个子集.

考虑下面的随机最优控制问题，受控对象用

① 收稿日期：1998-10-30；修订日期：1999-08-16.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(79600006)；辽宁省博士启动基金资助项目(971023).
作者简介：刘海龙(1959-)，男(汉族)吉林省吉林市人，博士、沈阳大学工商管理学院副教授.

下面的随机微分方程来描述

$$\begin{cases} dx(t) = \mu[x(t),u(t)]dt + \sigma[x(t),u(t)]dw(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中，$x(t)$ 是 k 维状态变量，$u(t)$ 是 m 维控制变量，$S(k)$ 表示 $k \times k$ 矩阵的全体的集合，$\sigma(\cdot,\cdot)$：$R^k \times U \to S(k)$，$\mu(\cdot,\cdot)$：$R^k \times U \to R^k$.

目标泛函为

$$J(u) = EF[h(x(T))] \quad (2)$$

其中，$h(\cdot)$：$R^k \to R^1$ 为连续可微函数，$F(\cdot)$：$R^1 \to R^1$ 为效用函数，E 表示期望算子. 随机最优控制问题是寻求 $u^*(\cdot) \in U$，使得

$$J[u^*(\cdot)] = \sup_{u \in U} J[u(\cdot)]$$

$u^*(\cdot)$ 称为控制问题(1) 和(2) 的最优控制，相应于 $u^*(\cdot)$ 的随机微分方程(1) 的解 $x^*(t)$ 称为最优轨道.

定义 1 设 $F(x)$：$[0,+\infty) \to R$，是二阶连续可微函数，且 $F'(x) > 0$，则称 $F(x)$ 为效用函数.

定义 2 若 $F(x)$ 为效用函数，则称

$$V(x,t) = \sup_{u \in U} J(u) = \sup_{u \in U} EF[h(x(T))] \quad (3)$$

为由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题的值函数.

下面给出由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题值函数存在的条件：

(A1) 对一切 $x, y \in R^k, u \in U$，函数 $\mu_i(x,u)$ 和 $\sigma_{ij}(x,u)(i,j = 1,2,\cdots,k)$

关于变量 x 满足条件：

$$\begin{aligned} |\mu_i(x,u) - \mu_i(y,u)| &\leqslant K|x - y| \\ |\sigma_{ij}(x,u) - \sigma_{ij}(y,u)| &\leqslant L|x - y| \end{aligned} \quad (4)$$

其中，$\mu = (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)^T$，$\sigma = (\sigma_{ij})_{k \times k}$，$K$，$L$ 是正数.

(A2) 对任意 $\theta = (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)^T$，$x = (x_1,x_2,\cdots,x_k)^T \in R^k$，$u \in U$，存在正常数 β，使得如下不等式成立

$$\sum_{i,j=1}^{k} \sigma_{ij}(x,u)\theta_i\theta_j \geqslant \beta \|\theta\|^2 \quad (5)$$

引理 1 假定由随机微分方程(1) 和目标泛函(2) 构成的随机最优控制问题满足条件(A1) 和(A2)，则该随机控制问题存在唯一值函数 $V(x,t)$，且值函数满足下面的 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 偏微分方程

$$\sup_{u \in U}\left\{V_t + \langle \mu, DV \rangle + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(MD^2V)\right\} = 0 \quad (6)$$

$$V(x,T) = F[h(x)]$$

其中，$M = \sigma\sigma^T$ 是正定矩阵，D 表示梯度算子，$DV = (V_{x_1},V_{x_2},\cdots,V_{x_k})^T$，$D^2V$ 是 Hessian 阵，$\langle \cdot,\cdot \rangle$ 表示内积，$\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示迹算子，下标 t，$x_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 表示对相应变量的偏导数.

一般情况，HJB 偏微分方程未必有光滑解，即使是存在光滑解唯一性也不一定满足[10]. Crandall M G 和 Lion P L 于 1983 年提供了一种称为粘性解的新概念[11~14]. 在粘性解的概念下，HJB 偏微分方程的解的存在性和唯一性问题容易得到解决. 以下简述粘性解的概念.

设 Q 是 K 维欧氏空间 R^k 中的一个具有光滑边界 ∂Q 的区域. 考虑如下非线性二阶偏微分方程

$$H(X,v(X),Dv(X),D^2v(X)) = 0 \quad (7)$$

$$X \in Q$$

其中，$H \in C(Q \times R \times R^k \times S(k))$，$X \in Q$，$v$：$Q \to R$，$Dv$ 表示 v 的梯度，D^2v 是 Hessian 阵，且 H 满足下面的条件

如果 $P \geqslant P^*$，即 $P - P^*$ 是非负定矩阵，则

$$H(X,v(X),p,P) \leqslant H(X,v(X),p,P^*) \quad (8)$$

$$\forall X, v, p$$

定义 3 如果对任意的 $h \in C^1(Q)$ 及 $v - h$ 的每一局部最大点 $X_0 \in Q$，有

$$H(X_0,v(X_0),Dh(X_0),D^2h(X_0)) \leqslant 0 \quad (9)$$

则称连续函数 $v(X)$ 为偏微分方程(7) 的粘性下解. 如果对任意的 $h \in C^1(Q)$ 及 $v - h$ 的每一局部最小点 $X_0 \in Q$，有

$$H(X_0,v(X_0),Dh(X_0),D^2h(X_0)) \geqslant 0 \quad (10)$$

则称连续函数 $v(X)$ 为偏微分方程(7) 的粘性上解. 如果 $v(X)$ 既是偏微分方程(7) 的粘性上解又是粘性下解，则称 $v(X)$ 是偏微分方程(7) 的粘性解.

引理 2 随机最优控制问题(1)、(2) 性能指标的最优值函数 $V(x,t)$ 是抛物型 HJB 偏微分方程(6) 的一个粘性解.

2 模型描述

假设投资者存在一种称为银行存款的无风险资产 $x_0(t)$，投资者可以自由地在银行中存取现金

购买或抛出证券,购买和抛售单位金额证券要付交易费用 $\alpha(0<\alpha<1)$,存入银行的现金可以获得利率为 $r_0(t)$ 的稳定收入. 假设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 种证券的余额;$r_i(t)$ 表示第 i 种证券的预期收益率. 则 $x_0(t)$ 和 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足下面的随机微分方程

$$\mathrm{d}x_0(t)=[r_0x_0(t)-\sum_{i=1}^{n}u_{i1}(t)+\sum_{i=1}^{n}u_{i2}(t)-\alpha\sum_{i=1}^{n}u_{i1}(t)-\alpha\sum_{i=1}^{n}u_{i2}(t)]\mathrm{d}t,\quad x_0(0)=x_0 \tag{11}$$

$$\mathrm{d}x_i(t)=[r_ix_i(t)+u_{i1}(t)-u_{i2}(t)]\mathrm{d}t+x_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\mathrm{d}w_j(t),\quad x_i(0)=x_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

其中,λ_{ij} 表示第 i 个证券预期收益率受第 j 个随机因素 $w_j(t)$ 影响的协方差,是 $n\times n$ 矩阵 Λ 中的元素,即 $\Lambda=(\lambda_{ij})_{n\times n}$;方差 —— 协方差矩阵 $M=\Lambda\Lambda^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵;且 $w_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是相互独立的维纳过程;$u_{i1}(t)\geqslant 0$ 表示购进第 i 种证券的速率;$u_{i2}(t)\geqslant 0$ 表示抛售第 i 种证券的速率;$u_{i1}(t)u_{i2}(t)=0$ 表示同一证券不能同时买进与卖出;x_0 表示初始现金余额;x_i 表示第 i 种证券初始余额. 方程(11)表示投资者现金拥有量的瞬间变化量等于现金利率瞬间收益 $r_0x_0(t)\mathrm{d}t$、n 种证券瞬间交易额 $[-\sum_{i=1}u_{i1}(t)+\sum_{i=1}u_{i2}(t)]\mathrm{d}t$ 以及其付出的交易费用 $[-\alpha\sum_{i=1}u_{i1}(t)-\alpha\sum_{i=1}u_{i2}(t)]\mathrm{d}t$ 的总和. 方程(12)表示第 i 种证券金额的瞬间变化量等于第 i 种证券的瞬间预期收益 $r_i(t)x_i(t)\mathrm{d}t$、第 i 种证券瞬间交易额 $[u_{i1}(t)-u_{i2}(t)]\mathrm{d}t$ 以及不确定瞬间随机收入 $x_i(t)\sum_{j=1}\lambda_{ij}\mathrm{d}w_j(t)$ 之和. 在这种模型下投资决策问题可以描述为:投资者在随机因素 $w_i(t)$ 的干扰下,选取最优控制 $u_{i1}(t)$ 和 $u_{i2}(t)$ 使终期资产总值效用 $F[\sum_{i=0}x_i(T)]$ 的期望值最大,即目标泛函为

$$J(u_1(t),u_2(t))=\mathrm{E}F[\sum_{i=0}^{n}x_i(T)] \tag{13}$$

定义 $V(t,x)=\max\limits_{u_1,u_2}J(u_1(t),u_2(t))$ 为由随机微分方程(11)、(12)和目标泛函(13)构成的随机最优控制问题的值函数,其中,$u_1(t)=[u_{11}(t),\cdots,u_{n1}(t)]^{\mathrm{T}}$,$u_2(t)=[u_{12}(t),\cdots,u_{n2}(t)]^{\mathrm{T}}$. $x=[x_0,x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$.

3 交易策略有限情况下的投资策略

为了求解上述随机最优控制问题,首先证明本文的随机最优控制模型存在唯一的值函数,然后推导出该值函数满足的 HJB 偏微分方程,最后,基于值函数给出了最优投资策略. 根据引理 2 容易证明下述定理 1.

定理 1 在交易策略有限($u_{i1}(t),u_{i2}(t)\in[0,U_i]$)的条件下,随机最优控制问题(11)、(12)和(13)存在唯一的值函数 $V(t,x_0,x_1,\cdots,x_n)$,且是如下 HJB 偏微分方程方程的粘性解

$$\begin{cases}V_t+r_0x_0V_{x_0}+\sum\limits_{i=1}^{n}r_ix_iV_{x_i}+\dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{X}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\hat{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}^2V)\\ +\max\limits_{u_{i1},u_{i2}}\{\sum\limits_{i=1}^{n}[V_{x_i}-(1+\alpha)V_{x_0}]u_{i1}(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}[-V_{x_i}+(1-\alpha)V_{x_0}]u_{i2}(t)\}=0\\ V(T,x_0,x_1,\cdots,x_n)=F[h(x_0,x_1,\cdots,x_n)]\end{cases} \tag{14}$$

其中,$\hat{X}=\begin{bmatrix}x_0&0&\cdots&0\\0&x_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&x_n\end{bmatrix}$,$\Sigma=\begin{bmatrix}0\\\Lambda\end{bmatrix}_{(n+1)\times n}$ $h(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=0}^{n}x_i$,$V$ 的下角标 t、x_0、x_i 表示 V 关于相应变量的偏导数.

下面再推导最优交易策略.

令 $L_{i1}=V_{x_i}-(1+\alpha)V_{x_0}$

$$L_{i2} = -V_{x_i} - (1-\alpha)V_{x_0}$$

$$L_3 = V_t + r_0 x_0 V_{x_0} + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i V_{x_i} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{X}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\hat{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}^2V)$$

则方程(14)便可写成

$$L_3 + \max_{u_{i1},u_{i2}}\Big[\sum_{i=1}^{n} L_{i1}u_{i1}(t) + \sum_{i=1}^{n} L_{i2}u_{i2}(t)\Big] = 0 \tag{15}$$

由方程(15)知，最优交易策略分为以下三种情况：

(H1) 当 $L_{i1} > 0, L_{i2} < 0$ 时，以最大速率买进第 i 种证券，即 $u_{i1}(t) = U_i, u_{i2}(t) = 0$；

(H2) 当 $L_{i1} < 0, L_{i2} > 0$ 时，以最大速率抛出第 i 种证券，即 $u_{i1}(t) = 0, u_{i2}(t) = U_i$；

(H3) 当 $L_{i1} < 0, L_{i2} < 0$ 时，停止交易，即 $u_{i1}(t) = u_{i2}(t) = 0$.

由 $V_{x_0}(t, x_0, x_1, \cdots, x_n) > 0$，即初始投资越多，目标泛函值越大. 这样就不难证明在交易费用存在的情况下($\alpha > 0$)，$L_{i1} \geqslant 0$ 和 $L_{i2} \geqslant 0$ 不能同时成立，即对同一证券不能边买进边卖出.

4 交易策略无限情况下的投资策略

研究交易策略有限情况下的交易策略是因为数学上的处理方便和容易得到相应的结果，而事实上交易策略是无限的，因为，在实际进行交易时，瞬间的交易速率是无限大. 所以，研究交易策略无限情况下的交易策略，具有重要的现实意义. 下面研究交易策略无限情况下的投资策略.

定理 2 在交易策略无限的情况下，随机最优控制问题(11)、(12)和(13)存在唯一的值函数 $V(t, x_0, x_1, \cdots, x_n)$，且是如下偏微分方程的粘性解

$$\begin{cases}\max\{L_3, L_{11}, \cdots, L_{n1}, L_{12}, \cdots, L_{n2}\} = 0 \\ V(T, x_0, x_1, \cdots, x_n) = F(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)\end{cases} \tag{16}$$

证明 由定理 1 的结论知道，当交易策略有限时，值函数满足偏微分方程(14). 当 $U_i \to \infty$ 时，有以下三种情况：

(B1) 若条件(H1)成立，投资者将以无限的速率买进数量为 δx_i 的第 i 种证券，由于交易是在等价交换的前提下进行的，投资者在交易的 t_0 时刻资产总值是相等的. 因此，投资者的值函数在交易的 t_0 时刻应该保持不变，即

$$V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_n) = V(t_0, x_0 - (1+\alpha)\delta x_i, x_1, \cdots, x_i + \delta x_i, \cdots, x_n) \tag{17}$$

由式(17)知

$$\begin{aligned}
&V(t_0, x_0 - (1+\alpha)\delta x_i, x_1, \cdots, x_i - \delta x_i, \cdots, x_n) - V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_i + \delta x_i, \cdots, x_n) \\
&\quad + V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_i + \delta x_i, \cdots, x_n) - V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = \\
&\quad \frac{V(t_0, x_0 - (1+\alpha)\delta x_i, x_1, \cdots, x_i + \delta x_i, \cdots, x_n) - V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_i + \delta x_i, \cdots, x_n)}{-(1+\alpha)\delta x_i} \\
&\quad \times [-(1+\alpha)]\delta x_i + \frac{V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_i - \delta x_i, \cdots, x_n) - V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\delta x_i}\delta x_i = 0
\end{aligned}$$

令 $\delta x_i \to 0$，可得 $L_{i1} = 0$，由式(15)知，此时有 $L_{i2} < 0, L_3 < 0$；

(B2) 若条件(H2)成立，投资者将以无限的速率卖出数量为 δx_i 的第 i 种证券，类似地有

$$V(t_0, x_0, x_1, \cdots, x_n) = V(t_0, x_0 + (1-\alpha)\delta x_i, x_1, \cdots, x_i - \delta x_i, \cdots, x_n) \tag{18}$$

令 $\delta x_i \to 0$ 可得 $L_{i2} = 0$ 同时有 $L_{i1} < 0, L_3 < 0$；

(B3) 若条件(H3)成立，投资者将停止交易. 由方程(15)可得 $L_3 = 0$，同时有 $L_{i1} < 0, L_{i2} < 0$.

综合以上三种情况，便得到了交易策略无限时值函数 $V(t, x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 所满足的偏微分方程(16).

这样，通过求解偏微分方程(16)的 Cauchy 问题，可以得到随机最优控制(11)、(12)和(13)的值函数，再参考最优策略(H1)、(H2)和(H3)并用无限交易策略代替其中的有限交易策略，从而最终确定出基于值函数的投资策略.

5 结束语

本文在假设证券价格服从几何布朗运动的基础上,运用随机最优控制理论,研究了在 n 个证券金融市场中具有交易费用的投资决策问题. 本文的特点是:交易策略有限和交易策略无限两种情况下的投资策略都是基于值函数给出的,而确定值函数需要求解二阶偏微分方程(14)和(16),一般来说,偏微分方程(14)和(16)的解析解是很难求出来的. 关于偏微分方程(14)和(16)的数值解法将另文研究.

参考文献:

[1] Markowitz M H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77~91

[2] 唐小我. 组合证券投资决策的计算方法[J]. 管理工程学报, 1990, 4(3): 45~48

[3] 刘海龙, 樊治平, 潘德惠. 一种证券收益与风险动态模型的辨识方法[J]. 管理科学学报, 1999, 2(1): 37~41

[4] Markowitz H. The general mean-variance portfolio selection problem[M]. Mathematical Models in Finance, London: Chapman & Hall. 1995. 93~99

[5] Morton A, Pliska S. Optimal portfolio management with fixed transactioncosts[J]. Math Finance, 1995, 5(4): 337~356

[6] Pliska S R, Selby M J P. On a free boundary problem that arises in portfolio management[M]. Mathematical Models in Finance, 1995, 105~111

[7] Shreve S E, Soner H M. Optimal investment and consumption with transaction costs[J]. The Annual of Applied Probability, 1994, 4(3): 609~692

[8] 黄小原. 证券组合的快车道问题研究[J]. 信息与控制, 1994, 23(2): 71~75

[9] 刘海龙, 郑立辉, 樊治平, 潘德惠. 证券投资决策的微分对策方法研究[J]. 系统工程学报, 1999, 14(1): 69~72

[10] Duffie D. Dynamic assets pricing theory[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1992, 145~170

[11] 王康宁. 最优控制的数学理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995, 177~217

[12] 雍炯敏. 动态规划方法与 HAMILTON-JACOBI-BELLMAN 方程[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1992, 91~108

[13] Crandall M G, Lion P L. Viscosity solution of Hamilton-Jacobi equations[J]. Transactions on American Mathematical Society, 1983, 277: 1~42

[14] Crandall M G, Evans L C, Lion P L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations[J]. Transactions on American Mathematical Society, 1984, 282: 487~502

The optimal strategy of security investment with transaction costs

LIU Hai-long[1], *FAN Zhi-ping*[2], *PAN De-hui*[2]

1. Faculty of Business Administration, Shenyang University, Shenyang 110044;
2. Faculty of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110006

Abstract: Under the assumption that security price follows the Geometric Brownian Motion, this paper studies the investment problem with transaction costs in a n-security financial market, by using the theory of stochastic optimal control, and an optimal control model is established for the problem of security investment with transaction costs. First, this paper states related theory on stochastic optimal control, and provides the definitions of value function, utility function and viscosity solution. Secondly, in terms of viscosity solution, a Partial Differential Equation (PED) is derived for the value function in two cases: bounded trading rates and unbounded trading rates. The obtained PDE is a free-boundary problem governed by a variation inequality. Finally, the optimal investment strategy is provided based on the value function of the stochastic optimal control. The result of this paper is useful in such practice as fund management, financial risk management. It is hoped that the results can improve the scientific level of decision making.

Keywords: security investment; transaction costs; stochastic optimal control; value function; utility function; viscosity solution