F820.59 F830.9

基金管理者报酬的线性模型研究与实证分析[①]

(7) 42-48

詹原瑞[1],李俊青[1],李贵春[2]
(1. 天津大学管理学院,天津大学金融中心,天津 300072; 2. 天津师范大学,天津 300070)

摘要:探讨了四种跟踪组合回报率与目标回报率间偏差的线性模型,线性偏差比传统的二次型偏差更能准确描述投资者的风险态度,用线性规划给出了明确的优化方案,并对上海证券A股各分类资产组合作出了实证分析和比较,得出为达不同的投资目标投资者确定投资组合及基金管理者报酬的各种优化模型.

关键词:跟踪偏差;线性模型;二次型
中图分类号:F831 **文献标识码**:A **文章编号**:1007-9807(2000)02-0042-07

投资基金、基金管理者报酬

0 引言

投资基金的管理中,确定基金管理者报酬存在的难题是:在基金管理者的报酬中如何体现其完成各类型投资者不同投资目标的情况.基金管理公司在其最优化资产组合时如何实施主动型的投资管理.指数基金投资者的目标是试图完全复制某一证券价格指数或者按照证券价格指数编制原理构造投资组合进行证券投资的基金.一般通过使其资产组合与目标组合之间的回报率差值平方和最小的方法得到.Clarke(1994)提出考虑投资组合回报率与目标回报率之差,即跟踪偏差的绝对值.若投资者把线性化跟踪偏差作为其投资目标,则投资目标具有更贴切和直观的解释能力.因此,最小化线性跟踪模型是最恰当反映指数基金投资者投资目标的基金管理者报酬模型.

线性化跟踪偏差模型相对于二次型模型有如下两个优点:(1)直接显示投资组合经理的报酬与组合投资回报率和目标回报率间偏差的线性关系(2)投资组合经理努力避免组合投资极端回报率与目标组合回报率间的偏差的发生.在这里,我们使用了四种可互换的跟踪偏差(简称TE)定义,其共同点是TE与目标函数都是资产组合权重的线性关系.

1 二次型均方差模型

在金融上,若组合的选择是使其回报率跟踪或复制那些事先定好的目标回报率,则称为复制组合战略.一般看作二次型问题.如Y为连续复利的目标回报率,X是n类资产连续复利回报率向量,β是将要决定的组合中各资产的权重.这一问题可表述如下:

$$\varepsilon = Y - X\beta$$

$$Y \in R^T; X \in R^{T\times n}; \beta \in R^n; \varepsilon \in R^n \qquad (1)$$

这里n是资产类型数;T是观察的时间间隔数.

组合回报率与目标回报率之间偏差平方和$\varepsilon'\varepsilon$一般称为跟踪方差,各资产权重β是由最小化跟踪方差得到的,即一个二次型优化问题.

$$\min_{\beta} \varepsilon'\varepsilon = \min_{\beta}(Y - X\beta)'(Y - X\beta) \qquad (2)$$

这里“ ′ ”代表矩阵的转置.

资产权重向量由方程(3)给出:

$$\beta = (X'X)^{-1}(X'Y) \qquad (3)$$

由于二次型均方差模型计算简便,故人们普遍使用.而且对组合权重的估计值β具有很好的性质,譬如β是最好的线性无偏估计.另外,在公

---

① 收稿日期:1999-06-24;修订日期:1999-11-15.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(79970041).
作者简介:詹原瑞(1944-),女(汉族),安徽婺源人,教授.

式(2)中可包括一系列线性约束，如：

$$A\beta \geqslant b, A \in R^{k\times n}, \beta \in R^n, b \in R^k \qquad (4)$$

这些约束可为短期持有约束（组合权重必须为非负）；或代表组合特征的组合权重之和必须为1的k个约束等。

2　四个不同的最小化跟踪偏差定义

这里定义四种可互换的跟踪偏差，取替二次型偏差.它们都使目标回报率和组合回报率偏差的绝对值最小化，比最小化二次型跟踪方差（如方程2）更能反映投资者的投资目标.

2.1　平均绝对偏差

资产组合的跟踪偏差定义为目标回报率与组合回报率之间偏差绝对值之和.此时，资产组合的权重是由最小化目标回报率与组合回报率间偏差绝对值之和（简称MAD）得到.即

$$\min_{\beta} I'(|X\beta - Y|) \qquad (5)$$

这里$I' = (1,1,\cdots,1) \in R^T$代表元素皆为1的向量

由式(5)测量TE，其目标函数的量度单位是百分数，而二次型（方程2）中平均目标函数的量度单位为"百分数的平方".

2.2　下偏差

有的投资者特别关注低于目标组合汇报率的组合汇报率，便定义资产组合的跟踪偏差为投资的下方偏差或下方风险.此时，TE是限定在组合回报率与目标回报率间的负偏差上.资产组合的权重是由最小化目标回报率与组合回报率之间负偏差的绝对值之和（简称MADD）得到.即

$$\min_{\beta} I'(|\overline{X}\beta - \overline{Y}|)$$

$$\text{s.t.}\quad \overline{X}_t\beta \leqslant \overline{Y}_t \qquad (6)$$

矩阵$\overline{X}$和向量$\overline{Y}$只含有组合回报率低于目标回报率低的元素

2.3　最大绝对偏差

当资产组合的跟踪偏差定义为目标回报率与组合回报率之间最大绝对偏差.其资产组合权重是由最小化组合回报率和目标回报率之间最大绝对偏差来决定的.最小化最大绝对偏差问题的目标函数是

$$\min_{\beta}(\max_{t}|X_t\beta - Y_t|) \qquad (7)$$

这里X_t代表矩阵X的第t行，Y_t代表向量Y的第t个元素

这个模型又称最小化最大值模型（MinMax Model）.在MAD模型中平均化所有偏差.MinMax模型关心最大的绝对偏差，比MAD模型中绝对偏差更"严格".

2.4　最小化下方最大偏差

在MinMax模型中最小化的最大偏差绝对值可能是组合回报率与目标回报率间的正偏差.为了防止真正最坏情况发生，将资产组合的跟踪偏差定义为目标回报率与组合回报率间最大负偏差.其资产组合权重是在组合回报率低于目标回报率的范围内最小化最大负偏差的绝对值决定的（简称DminMax），即对MinMax模型(7)添加负偏差约束，如方程式(8).

$$\min_{\beta}(\max_{t}|\overline{X}_t\beta - \overline{Y}_t|)$$

$$\text{s.t.}\quad \overline{X}_t\beta \leqslant \overline{Y}_t \qquad (8)$$

汇总以上四种不同模型得到的跟踪偏差分别记作TE_{MAD}，TE_{MADD}，TE_{MinMax}和TE_{DminMax}.

3　线性规划

上述四个绝对值优化模型分别可化减为一个等价的线性规划问题.

3.1　MinMax模型

设$Z \geqslant 0$为偏差绝对值的上限，即

$$Z \geqslant |X_t\beta - Y_t|, t \in \{1,1,\cdots,1\}$$

当组合回报率高于目标回报率时，即

情形1　$Z \geqslant X_t\beta - Y_t \geqslant 0 \Leftrightarrow X_t\beta - Z \leqslant Y_t$

当组合回报率低于目标回报率时，即

情形2　$-Z \leqslant X_t\beta - Y_t \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$X_t\beta - Z \geqslant Y_t$$

因Z的最小值只能在满足情形1或情形2条件下获得，

设0－1变量w，当$w=1$，情况1成立；当$w=0$，情况2成立.则MinMax问题可表述如下：

$$\begin{aligned} &\min \quad Z \\ &\text{s.t.}\ X_t\beta - Z \leqslant Y_t + M(1-w) \\ &\qquad X_t\beta + Z \geqslant Y_t - Mw \\ &\qquad\quad w \leqslant 1 \\ &\qquad\quad Z \geqslant 1 \end{aligned}$$

$$w \geq 0 \text{ 且为整数} \tag{9}$$

其中 M 是非常大的正数

3.2 DminMax 模型

这一线性规划问题则严格的限定在满足 $X_t\beta \leq Y_t$ 约束，即组合回报率低于目标回报率，情形 2 中的约束起作用. 该线性规划问题可由模型(9)得到，即

$$\begin{aligned} \min\quad & Z \\ \text{s.t.}\quad & X_t\beta + Z \geq Y_t \\ & Z \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

3.3 MAD 模型

设 $Z_t^+ \geq 0$ 代表组合回报率与目标回报率之间的正偏差.

$Z_t^- \geq 0$ 代表组合回报率与目标回报率之间的负偏差的绝对值.

即有

$$\begin{aligned} & X_t\beta - Y_t \geq 0 \Leftrightarrow X_t\beta - Z_t^+ = Y_t \\ & X_t\beta - Y_t \leq 0 \Leftrightarrow X_t\beta + Z_t^- = Y_t \end{aligned} \tag{11}$$

目标函数是：$\min \sum_{t=1}^{T}(Z_t^+ + Z_t^-)$

注意到：要么 Z_t^- 是正值并且 Z_t^+ 是零；要么 Z_t^- 是零并且 Z_t^+ 是正值，这意味着正偏差导致 $Z_t^- = 0$，负偏差意味着 $Z_t^+ = 0$，此时等式(10)可写成下式：

$$\text{s.t.}\ X_t\beta + Z_t^+ - Z_t^- = Y_t \tag{12}$$

3.4 MADD 模型

如果投资者更关心组合回报率与目标回报率之间的负偏差，Z_t^+ 则可从优化问题中省去，则模型可描述如下：

$$\begin{aligned} \min\quad & \sum_{t=1}^{T} Z_t^- \\ \text{s.t.}\quad & X_t\beta + Z_t^- \geq Y_t \end{aligned} \tag{13}$$

式(8)、(9)、(10)、(12) 和(13) 只是对最优化问题的基本描述. 在用个人计算机和优化软件求解这些模型时，注意若 T 为观察时间段数，则在 DminMax、MAD、MADD的初始表有 $T+1$ 行，而在 MinMax 有 $2T+1$ 行. 此外，还可添加非负组合权重或组合权重的总和为 1 等约束.

4 实证分析

我们用上海证券市场的数据对上述4种 TE 定义和二次型方法进行比较实证分析.

证券投资基金在决定其最优投资组合时，先对股票、债券两大市场的资源进行，再对股票、债券市场中各门类的投资比例作出决策，其中最重要的是对股票市场中各行业门类的投资决策. 现对后一步投资过程进行分析.

上海证券市场的分类指数有工业、商业、公共事业、地产和综合5类. 假设指数基金公司的投资目标是跟踪上证 A 股指数，使其投资组合与上 A 指数之间的依不同定义的 TE 最小.

我们利用上海证券市场1997全年5种分类指数和上 A 指数的月回报率的原始数据(如表1)分析比较四个线性 TE 模型和二次模型，确定各线性化模型相对二次模型对不同风险目标的改进程度. 这些模型相同的约束有资产权重大于0，即不可卖空，及各资产权重之和为1. 用 LINDO、MATLAB 软件计算的结果如表2所示. 从表2中可以看出：

·在5模型中工业类和商业类股票的权中较大，这也符合这两类股票对上证 A 股市场影响较大的现实情况.

·另外，不同的风险目标下各资产权重的差别较大，其中 MAD/MADD 模型与 MinMax/ DminMax 模型结果差别较大，这主要是因为前两种风险目标(偏差/下方偏差最小化)和后两种的风险目标(偏差绝对值之和/下方偏差之和最小化)差别较大的缘故. 这也说明我们在进行投资组合中应该依据投资人的不同风险风格去组合自己的资产.

表3中列出了各模型优化投资组合的平均收益率、标准差、贝塔值，可以看出：

·这5种模型下的最优投资组合的风险特性非常相近，而它们的平均收益率差别却较大. 夏普指数和特雷诺指数表明 MinMax、DminMax、MAD、MADD 的收益/风险特性好于二次模型的收益/风险特性，这主要由于本文的模型旨在最小化 TE，而不是最小化收益/偏差所导致的结果.

表1　各分类指数月收益率1及统计特性表(1997上海 A 股市场)

时　间	工业类	商业类	公共事业类	地产类	综合类	上 A 收益率
1 月	10.628 4	10.533 5	4.432 4	−1.082 4	5.613 0	4.948 5
2 月	10.732 3	10.125 7	9.156 8	6.709 9	10.829 3	10.443 0
3 月	16.145 2	15.664 0	21.010 0	16.208 5	17.445 8	16.999 2
4 月	9.137 2	12.219 6	20.467 4	20.651 4	13.852 9	12.004 7
5 月	−3.872 5	−7.951 4	−7.792 1	−0.246 7	−2.058 8	−4.199 4
6 月	−12.040 4	−11.999 7	−5.518 3	−6.692 0	−8.711 7	−10.200 0
7 月	0.994 8	2.416 2	−0.703 6	−10.171 9	−1.611 5	−0.362 2
8 月	4.178 8	6.340 2	8.277 8	−10.512 9	−0.455 4	2.847 6
9 月	−10.666 8	−15.259 4	−9.249 3	−8.655 0	−11.105 9	−10.853 5
10 月	6.097 4	4.912 3	8.353 3	15.050 8	10.717 1	8.308 1
11 月	−4.646 2	−3.223 3	1.103 5	−10.183 5	−4.147 5	−3.714 9
12 月	6.559 6	4.232 5	−0.419 1	0.093 4	9.602 2	5.427 0
平均收益率[1]	2.770 7	2.334 2	4.093 2	0.930 8	3.330 8	2.637 3
标准差[2]	8.914 6	9.914 7	9.907 2	11.237 0	9.256 2	8.755 0
贝塔值[3]	0.985 6	1.080 8	1.028 4	1.018 9	1.034 5	1.000 0

1　月收益率与平均收益率单位为%

2　标准差单位为%

3　贝它值表明各类资产对上 A 指数的风险影响程度

表2　不同模型的优化权重表(单位:%)

模型类型	工业类	商业类	公共事业类	地产类	综合类	目标函数值
MinMax	29.433	0.000	10.940	6.131	53.496	1.601
DminMax	45.246	0.000	14.379	0.4909	39.885	0.918
MAD	73.248	0.061	17.138	9.553	0.000	7.644 (0.637)[1]
MADD	70.171	0.000	20.848	8.981	0.000	2.633 (0.219)[2]
二次模型	33.400	12.420	13.970	5.130	35.080	10.107 (3.179)[3]

1　偏差绝对值的和(括号内为偏差绝对值和的平均值)

2　下方偏差绝对值之和(括号内为下方偏差绝对值之和的平均值)

3　偏差平方和(括号内为偏差平方和的根号值)

从上面的分析知不同的线性化最优模型优化的最优资产组合权重组合与二次模型的结果有较大差别,而线性模型最大的优点在于它的目标函数提供了直观而迅速的对投资人投资要求的解释.如:当投资人表明它更关心自己可能的最大损失时,DminMax 模型就能比二次模型提供更好的解释.不同资产权重在5种模型中的目标函数值的比较列在表4中,表中同一行可以对不同资产权重在同一模型中的目标函数值进行比较,其中的最小值用灰色底框表示.我们发现:

·用一特定模型得出的目标函数值比其它不同模型优化的资产类型的权重组合在这一模型的目标函数值都小,并且这些数值有较大的变化.这也直观的证明针对不同风险定义模型的优化资产权重是这一风险目标下最优的.也告诉我们在对基金管理人的报酬进行计量时应根据投资人投资

目标的不同(依不同的TE定义)而选择不同的模型进行科学、公正的评定.

如果仔细观察表4,可以发现一个投资人如果更加关心其收益率偏差的的最大值,那么,这一投资人最好用MinMax模型进行投资组合,因为这可将其最大风险从二次模型的2.442 3%降到1.601 0%.如果投资人更加关注收益率的最大下方偏差,那么,它用DminMax模型优化结果的最大下方偏差可从二次模型优化的1.236 5%降到0.918 5%.这一点可从图1、图2中直观地看出,图1表明二次模型中的最大收益率偏差值发生在1月,其值为2.442 3%,它可用MinMax模型降到1.602 0%(发生在1月).图2表明二次模型收益率下方偏差最大值发生在9月,值为1.236 5%,而通过DminMax模型可将其降到0.918 5%(发生在6月).图3、图4分别表明MAD、MADD模型与二次模型之间优化结果的比较.

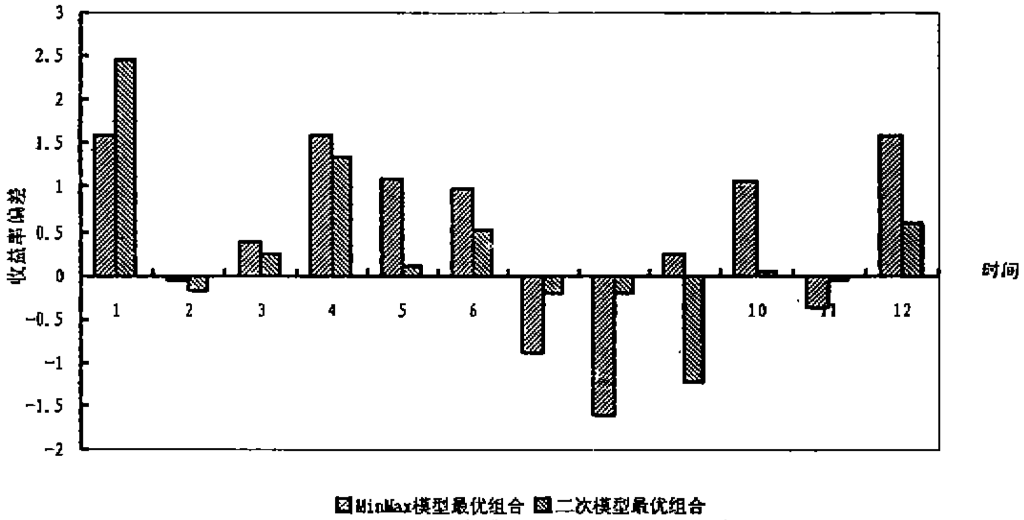

图1　MinMax模型与二次模型优化收益率偏差比较图

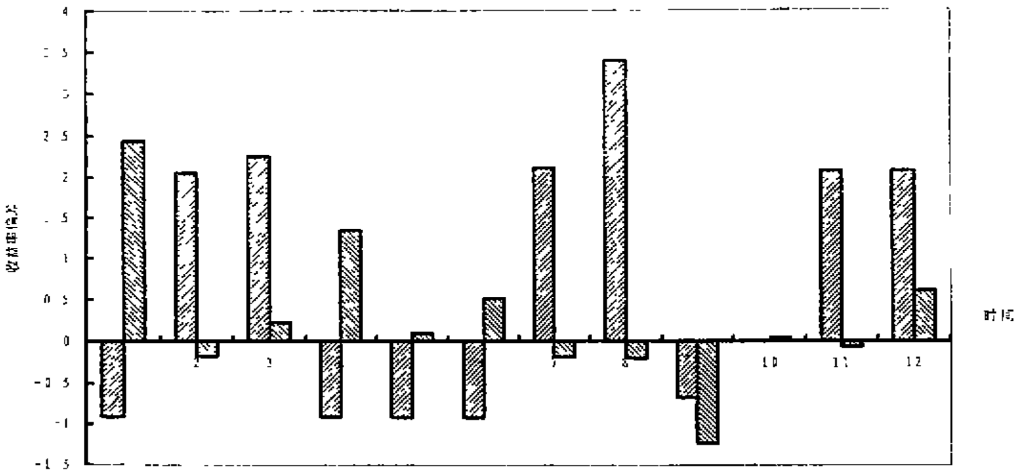

图2　DMinMax模型与二次模型收益率偏差比较图

表3　最优投资组合收益/风险特性表

模型类型	平均收益率[1](μ)	标准差(σ)[1]	贝塔值(β)[2]	夏普指数[3]	特雷诺指数[4]
MinMax	3.102 2	8.976 7	1.018 5	0.190 4	1.677 9
DminMax	1.836 7	8.362 3	0.938 4	0.053 0	0.472 5

续表3

模型类型	平均收益率[1](μ)	标准差(σ)[1]	贝塔值(β)[2]	夏普指数[3]	特雷诺指数[4]
MAD	2.821 3	8.796 7	0.996 2	0.162 3	1.433 4
MADD	2.881 2	8.805 2	0.997 5	0.169 0	1.491 5
二次模型	3.003 3	8.983 4	1.022 3	0.179 2	1.575 0

1　平均收益率、标准差单位为%

2　贝塔值表明各类资产对上 A 指数的风险影响程度

3　夏普指数=超额收率(平均收益率-无风险收益率)除以标准差,无风险收益率取1997年上市流通的国债月收益率(1.393 3%)

4　特雷诺指数=超额收率(平均收益率-无风险收益率)除以贝它值,无风险收益率取1997年上市流通的国债月收益率(1.393 3%)

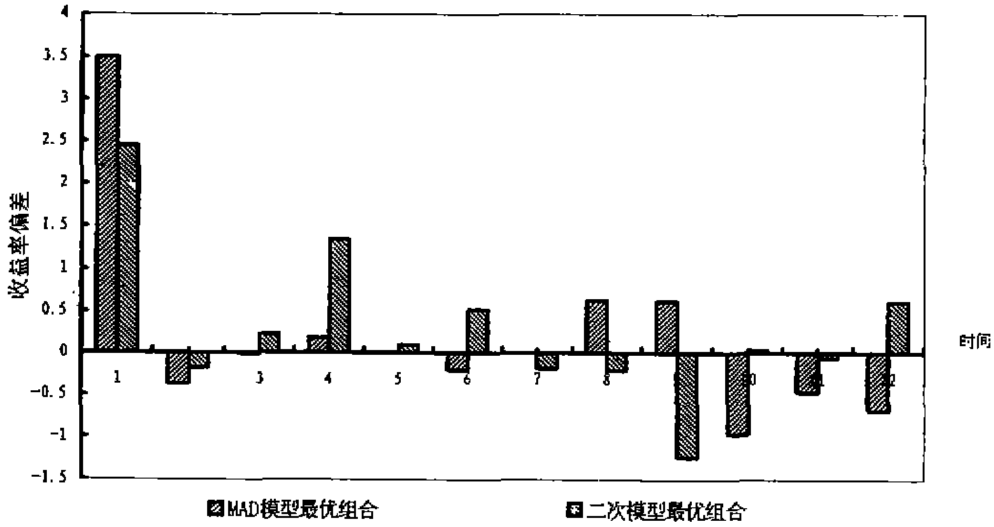

图3　MAD 模型与二次模型收益率偏差图

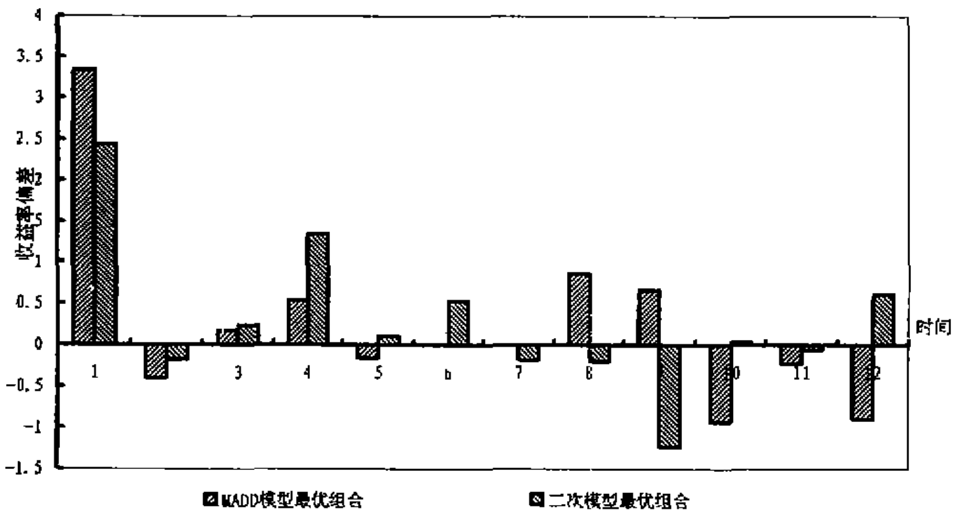

图4　MADD 模型与二次模型收益率偏差图

表4 不同模型最优资产权重组合在同一模型目标函数值比较表[1]

模型类型	MM 权重	DMM 权重	MAD[2]权重	MADD[3]权重	二次模型权重
MinMax	1.601 0	2.577 1	3.499 2	3.336 4	2.442 3
DminMax	1.600 3	0.918 5	0.969 5	0.936 3	1.236 5
MAD	11.499 6	18.275 9	7.644 3	8.194 7	7.789 6
MADD	2.960 6	4.334 3	2.718 4	2.634 4	2.722 1
二次模型	14.683 4	37.570 3	14.866 4	14.560 8	10.107 5

[1]表中数值单位为%

[2] MM 为 MinMax 模型的简称.

[3] DMM 为 DminMax 模型的简称.

5 总结

本文的关键在于定义 TE 为组合回报率与目标回报率的线性偏差，这与传统投资理论中的二次偏差模有很大的不同. Heinz Zimmermann (1997)已证明线性 TE 模型是符合期望效用最大化的. 本文探讨了四种线性 TE 模型：

(1)MinMax 模型，它是最小化组合回报率与目标回报率之间的最大偏差.

(2)DminMax 模型，它是最小化组合回报率与目标回报率之间的最大负偏差的绝对值.

(3)MAD 模型，它是最小化偏差绝对值之和.

(4)MADD 模型，它是最小化负偏差绝对值之和.

我们应用5种模型对上海证券市场1997年的A股市场做了实证分析. 组合资产按部门类型分为工业类、商业类等五类，目标组合为上证A指1997年的月收益率. 结果表明各不同模型下的最优组合权重和收益/风险特性有很大的不同，这说明投资人的最优化模型因根据不同的投资目标而不同. 表4说明，我们用不同风险要求下的线性模型可以将传统的二次模型优化出的各类资产权重在各线性化模型的目标函数值(实质为投资目标)降到最低，并可作为科学评定基金管理人报酬的计量标准.

参考文献：

[1] Amemiya T. Advanced econometric[M]. Cambridge: Harvard University Press, 1985,57～63

[2] Clarke R C. Tracking errors, regret and tactical asset allocation[J]. Portfolio Management, 1994,20(2):30～36

[3] Harlow W V. Asset allocation in downside risk framework [J]. Financial Analysis, 1991, 47:98～103

[4] Konno H, Yamazaki H. Mean absolute deviation portfolio optimization model and its application to Tokyo stock market [J]. Management Science, 30, 1991

[5] Markowitze M P. Portfolio selection. New York : Wiley, Reprinted and expanded by Blackwell;Cambridge,1959

[6] Roll R. A mean /variance analysis of tracking error [J]. Portfolio Management, 1992, 18(2):48～55

(下转第83页)