

金融市场的标度理论<sup>①</sup>

黄登仕

(西南交通大学管理学院, 成都 610031)

5/27-33

**摘要:**传统的金融理论假定证券资产的价格变化服从正态分布或者对数正态分布,并且经常是在一个固定的时间标度内讨论价格变化的概率密度函数。近来的研究表明,证券资产的价格变化的尾巴比正态分布“胖”,为了刻画这种胖尾分布,研究不同时间标度概率密度函数之间的相似性,科学家们用 Lévy 稳定分布来描述价格的变化,但发现尾巴又太胖,因此又引入了截尾 Lévy 稳定分布,它克服了 Levy 稳定分布的弱点。价格变化多标度行为的发现是金融市场标度理论的一个最新的具有重要意义的进展,本文对这些最新进展进行了评述。

**关键词:**金融市场;正态分布;标度;标度不变性;分形;截尾 Lévy 稳定分布;多标度现象

中图分类号:F830.9

文献标识码:A

文章编号:1007-9807(2000)02-0027-07

## 0 引言

1997年度诺贝尔经济学奖授给了 Merton 和 Scheoles 两位经济学家,以表彰他们在期权定价理论方面作出的巨大贡献,他们同已去世的 Black 一道,奠定了现代期权理论的基础<sup>[1]</sup>。Black-Scholes 定价模型至今仍然是现代金融理论中最基本、最普遍的模型,这个模型也是社会科学中少有的几个对金融、经济、管理及其它领域有深远影响的理论之一<sup>[2]</sup>。

自相似性和标度不变性是具有广泛用途的数理概念,是分形理论的基础<sup>[3]</sup>。分形理论创始人 Mandelbrot 早在60年代初期就应用自相似性和标度不变性对棉花价格进行了研究<sup>[4]</sup>。

Black-Scholes 模型中有一个最基本的假定,那就是基础资产的收益率服从正态分布,即基础资产的价格服从对数正态分布。从 Mandelbrot 在60年代初关于棉花价格的工作开始,直到最近一两年,有很多学者通过实证研究对此假定提出了质疑。如果对数正态假定不成立,期权的定价模型就可能存在问题,由此导致很多衍生金融产品的定价都不准确,因此对基础资产的收益率的分布

及其在不同时间标度的相似性的研究,无论是从理论上,还是从金融管理的实践上看,都是具有重要意义的课题。本文首先讨论金融数据的统计描述方法,引入自相似性、标度不变性、稳定分布与负幂律分布等基本概念,然后讨论金融时间序列的相关性与独立性以及多标度理论,对有关的实证研究结果进行评述,最后是结论和展望。

## 1 金融数据的统计描述

由于信息技术和通讯技术的飞速发展,使得现代金融市场的数据库非常丰富,每分钟可以记录几个数据。金融市场是一个受内部和外部众多因素影响的复杂系统,各类市场在价格形成机制方面有很大的不同,但可以用一些统计方法对其价格的变化模式进行研究。

用  $x(t)$  表示某资产在时刻  $t$  时的价格,对于给定的时间标度  $T$ ,可以认为价格的增量  $x(T+t) - x(t)$  是一个随机变量,它的概率密度函数(PDF)记作  $P_T$ 。本世纪初叶, Bachelier 首次用布朗运动模型来描述股票市场的价格波动,将他的方法应用到股票的收益率(价格的对数)序列,在

F830.9

① 收稿日期:1998-12-23;修订日期:1999-03-23。

作者简介:黄登仕(1961-),男(汉族),重庆忠县人,博士,教授,博士生导师。

50年代是非常普遍的,这也是Black-Scholes定价模型的主要假定.这个模型可以得出收益率的增量(或者价格的增量)序列是一个独立同分布的正态分布随机变量序列.当 $T$ 充分大时,用 $N$ 表示 $T/\tau$ , $\tau$ 表示最短的记录(或交易)时间间隔,则有

$$x(t+T) - x(t) = \sum_{i=1}^N \delta x_i \quad (1)$$

$$\delta x_i = x(t+i\tau) - x(t+(i-1)\tau) \quad (2)$$

由中心极限定理知,当 $T$ 较大时, $x(T+t) - x(t)$ 服从正态分布.如果 $T$ 较小,收益率的增量(或者价格的增量)又服从什么样的分布呢?不同 $T$ 之间的概率密度函数有什么联系吗?

## 2 自相似性、标度不变性、稳定分布、负幂律分布

传统的金融学理论将注意力集中在一个特定的时间标度 $T$ 的概率密度函数 $P_T$ 上,对于不同的时间标度 $T$ ,Mandelbrot在60年代的研究已表明,这些 $P_T$ 之间有自相似性存在.

所谓自相似性,它是分形理论的一个基本概念.下面考虑一个实际问题:中国的海岸线有多长?这个问题似乎很简单,查查百科全书就知道了.但问题并没有那么简单,如果你用一公里长的尺子去度量中国的海岸线,可以得到一个长度;如果你用一米长的尺子再去度量,又会得到一个更长的长度;如果再用一分米长的尺子去度量,长度会更长,……,这样继续下去,可以得到无限多个长度.因此,可以得出结论,中国的海岸线没有特征长度.但如果将中国的海岸线用两种不同的比例尺绘制,可以看到两个图形非常地相似,这种相似性就是自相似性.没有特征尺度和具有自相似性是分形具有的两个基本特征,海岸线是一个典型的分形.在具有随机性的分形中,这种自相似性不是确定性的自相似,而是统计意义的自相似性,称这种相似性为统计自相似.可以用不同标度之间的密度函数之间的相似性来描述统计自相似.

Mandelbrot在研究棉花价格时发现,假设 $S(<T)$ 是另外一个时间标度, $P_t$ 表示随机变量 $x(S+t) - x(t)$ 的概率密度函数,则有如下关系

$$P_t(x) = \frac{1}{\lambda} P_s\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad \lambda = \left(\frac{T}{S}\right)^H \quad (3)$$

这里的 $H$ 表示自相似系数,(3)的含义就是对变量进行适当的变换后,较短时间标度价格变化的概率密度函数 $P_t$ 与较长时间标度价格变化的概率密度函数 $P_T$ 是相似的.换句话说,如果对某一资产价格的数据每天采样一次,然后作出价格关于时间变化的曲线,与每星期采样一次作出的曲线,在统计学意义上是相似的.这种关于不同时间标度的相似性就叫做标度不变性<sup>[5]</sup>.

满足这种标度不变性的价格过程模型,最简单的就是Lévy漂移(Lévy flight),所谓Lévy漂移,就是随机行走过程,每次行走的是独立同分布的Lévy稳定分布,而通常的随机行走模型要求每一次行走是独立同分布的正态分布.在Lévy漂移中,如果每一次行走是一个对称的 $\mu$ -稳定分布,则Lévy漂移就是一个具有自相似系数 $H = 1/\mu$ 的自相似过程,它的增量的概率密度函数满足(3)<sup>[6]</sup>.

所谓稳定分布,它实际上是正态分布的一种推广.但稳定分布不象正态分布那样,能够明显地用一个函数表达式把它的密度函数表示出来.为了将稳定分布表述清楚,必须借助于密度函数的富里叶变换、即密度函数的特征函数来表示.用 $P(x)$ 表示密度函数, $\hat{P}(k)$ 表示特征函数,则有

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{P}(k) e^{ikx}$$

$$P(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) e^{-ikx} = \langle e^{-ikx} \rangle \quad (4)$$

用特征函数可以很方便地把分布的各阶矩表示出来:

$$\langle x^m(t) \rangle = \left\{ i^m \frac{\partial^m \hat{P}(k,t)}{\partial k^m} \right\}_{k=0} \quad (5)$$

其中 $\langle \rangle$ 表示数学期望.由于 $P(x)$ 是密度函数,自然要求 $\hat{P}(0) = 1$ .在本文中涉及的分布都是对称分布,因此 $\hat{P}(k)$ 是对称的实值函数.

对称的Lévy稳定分布的特征函数为

$$\hat{L}(k) = \exp(-c^\mu |k|^\mu) \quad 0 < \mu \leq 2 \quad (6)$$

其中 $\mu$ 称为稳定指数,称这样的分布为 $\mu$ -稳定分布. $\mu = 2$ 时就是正态分布, $\mu = 1$ 就是柯西分布.稳定分布与正态分布一样,具有卷积不变性,即满足可加性.如果 $X_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是 $N$ 个独立同分布的 $\mu$ -稳定分布,则和

$$S_N = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N^{1/\mu}} \quad (7)$$

与  $X_i$  具有相同的密度函数. 注意在求和时使用的标准化因子是  $N^{1/\mu}$ , 而不是  $\sqrt{N}$ . 在通常的随机行走模型中, 标准化因子正好是  $\sqrt{N}$ .

Lévy 稳定分布的另外一个重要性质是, 当  $\mu < 2$  时,  $\mu$ -稳定的 Lévy 分布的密度函数的尾部服从指数为  $1 + \mu$  的负幂律分布, 即有

$$P_\mu(x) \cong \frac{C}{|x|^{1+\mu}} \quad \text{当 } |x| \rightarrow \infty \quad (8)$$

负幂律分布的尾部比正态分布的尾部“胖”. 即如果用 Lévy 稳定分布描述价格变化的话, 价格发生大变化的可能性要比用正态分布预测的可能性大. Mandelbrot 在 60 年代研究棉花价格变化时, 首次用 Lévy 稳定分布描述价格变化, 发现了价格变化的自相似性, 得到  $\mu \approx 1.7^{[1]}$ .

负幂律分布在社会科学中有广泛的用途, 很多社会经济现象都可以归结为负幂律分布<sup>[7,8]</sup>. 但证券资产价格变化的概率密度函数的尾部如果用负幂律分布来描述的话, 那将会带来很多麻烦, 因为当  $\mu < 2$  时, 它的二阶矩, 即方差不存在, 而方差的平方根就是标准差  $\sigma$ . 标准差  $\sigma$  是一个非常重要的指标, 它表示了证券价格波动的幅度 (volatility), 是证券市场的一个常用的指标, 也是 Black-Scholes 公式的一个重要参数<sup>[2]</sup>. 从实证研究的结果来看, 发现价格增量的概率密度函数的尾部虽然比正态分布“胖”, 但比负幂律分布还是要“瘦”一些. 因此, Lévy 稳定分布在描述价格波动时, 还是有一定的缺陷, 为此人们提出了截尾 Lévy 稳定分布<sup>[6]</sup> 的概念.

所谓截尾 Lévy 稳定分布, 它就是中间部分仍用 Lévy 稳定分布, 两个尾部用比负幂律分布瘦的指数分布来代替, 其特征函数为

$$T(k) = \exp\left[-\frac{c^\mu}{\cos(\pi\mu/2)}((k^2 + \lambda^2)^{\mu/2} \cos\{\mu \arctg(k/\lambda)\} - \lambda^\mu)\right] \quad \mu \neq 1 \quad (9)$$

它的尾部为

$$T(x) \cong \frac{C e^{-\lambda|x|}}{|x|^{1+\mu}} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (10)$$

显然, 当  $\lambda = 0$  时, 截尾 Lévy 稳定分布就退化为 Lévy 稳定分布, 由 (9) 和 (5) 可以得到截尾 Lévy 稳定分布的方差和峰态 (kurtosis) 为

$$\sigma^2 = \frac{\mu(1-\mu)}{\cos(\pi\mu/2)} c^\mu \lambda^{\mu-2}$$

$$k = \frac{\cos(\pi\mu/2)(\mu-2)(\mu-3)}{\mu(1-\mu)c^\mu \lambda^\mu} \quad (11)$$

这里

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle \quad k = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} - 3 \quad (12)$$

负幂律分布虽然不能描述证券资产价格变化概率密度函数的尾部, 但它确实描述了不同时间标度概率密度函数的自相似性, 而这种自相似性体现为证券资产价格变化过程中不同时间标度的相关性.

### 3 相关性与独立性

传统的金融学理论认为, 在一个具有充分流动性的市场里, 价格的变化不具有自相关性. 价格变化的自相关函数定义为

$$C(T) = \frac{\overline{\delta x_t \delta x_{t+T}} - \overline{\delta x_t} \overline{\delta x_{t+T}}}{\text{Var}(x_t)} \quad (13)$$

一般说来, 当  $T \geq 15$  分钟以后,  $C(T)$  就趋于零. 价格变化的这种不相关性被认为是对有效市场假说的一种支持. 自相关函数的快速衰减意味着价格的变化是不相关的, 但这种不相关性不能推出价格变化是独立的. 实际上, 价格变化具有其它的非线性相关关系, 比如考虑价格增量的平方组成的序列, 他们的自相关函数就衰减得很慢. 用  $g(T)$  表示价格增量的平方序列的自相关函数, 即

$$g(T) = \frac{\overline{\delta x_t^2 \delta x_{t+T}^2} - \overline{\delta x_t^2} \overline{\delta x_{t+T}^2}}{\text{Var}(\delta x_t^2)} \quad (14)$$

在标准普尔 500 期货价格中,  $g(T)$  有如下的负幂律关系<sup>[9]</sup>:

$$g(T) \cong \frac{g_0}{T^\mu} \quad \mu = 0.37 \pm 0.037 \quad g_0 = 0.08 \quad (15)$$

$g(T)$  的这种负幂律关系说明了价格波动的幅度存在一种保持性. 价格增量的绝对值也出现了类似的负幂律关系, 价格增量绝对值的这种保持性, 在金融文献里称为波动的聚集 (clustering of volatility), 它意味着价格的一次大变化会紧接着另一次大变化, 但不一定在同一方向.

还可以从另一个角度观察价格变化序列的非独立性, 自相关函数的快速衰减, 可以得出方差具有线性标度关系, 即有<sup>[10]</sup>

$$\sigma^2(N\tau) = N\sigma^2(\tau) \quad (16)$$

在一定的假设条件下, 也可以用类似的方法

得出峰态与价格增量平方的自相关函数  $g(k) = g_c/k^q$  的关系如下:

$$k(N\tau) = \frac{\mu_4(N\tau)}{\sigma^4(N\tau)} - 3 \\ = \frac{k(\tau)}{N} + \frac{6(k(\tau) + 2)}{(2 - \alpha)(1 - \alpha)N^\alpha} \quad (17)$$

当  $N$  较大时,  $k(N\tau) \cong \frac{k(\tau)}{N^\alpha}$ , 即  $k$  与时间标度之间的关系为负幂律关系。

这种比线性相关层次更高的相关性的存在, 说明了金融监管的可能性, 如果按照传统的理论, 证券资产价格的变化没有任何的相关性, 就完全不可能对价格的变化趋势作出任何判断, 因而就谈不上有效的监管了。

#### 4 多重标度、多重分形、湍流

前一节表明证券资产价格的变化具有某种意义的二阶相关性, 是否还有更高阶的相关性呢? 这就是本节要讨论的问题。

由(1)知道

$$x(t + N\tau) - x(t) = \sum_{i=1}^N \delta x_i \quad (18)$$

假定

$$\delta x_i = \gamma \varepsilon_i \quad (19)$$

这里的  $\gamma$  是一个标度因子, 它表示了价格增量的幅度, 可以认为它是市场的局部波幅。随机变量  $\varepsilon_i$  是与  $\gamma$  独立的、均值为 0、方差为 1 的随机变量, 这个随机变量序列短程相关, 在一定时间标度内, 考虑如下关系:

$$\langle |x(t + N\tau) - x(t)|^q \rangle \propto N^q \quad (20)$$

可以证明<sup>[11]</sup>, 如果  $\gamma$  的各阶矩存在, 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $S_v^q = \frac{q}{2}$ 。上式说明, 对不同阶的矩, 有不同的标度指数, 因为自相关函数  $C(T)$  会快速地衰变到零, 因此, 当  $q = 2$  时,  $\zeta_q = 1$  成立, 当  $q = 4$  时, 应用峰态的定义有

$$\langle |x(t + N\tau) - x(t)|^4 \rangle \\ = (3 + k_N) \langle |x(t + N\tau) - x(t)|^2 \rangle^2 \\ \propto 3N^2 + k_N N^{2-\alpha} \quad (21)$$

它是两个负幂律分布的和, 在实证研究中, 可以用一个单一的幂律关系来表示。由于  $N^{-\alpha}$  不接近零, 因此当  $q = 4$  时,  $\zeta_4$  低于其渐近值  $\zeta_4 = 2$ 。

一般情形下有  $\zeta_q < \frac{q}{2}$ , 它们之间的差随着  $q$  的增大而增大, 因此必须用多重分形理论<sup>[3,12]</sup> 来研究这种标度关系。

多重分形理论描述了一个分形集中, 不同的部分具有不同的标度指数, 所以又称多重分形或多标度分形。由(20)可以看出, 当  $q$  较大时, 实际上着重分析价格增量较大的那些部分的标度行为, 当  $q$  取负数时, 突出了价格增量较小部分的作用, 这说明价格在不同的变化范围内有不同的标度关系。

由于在证券价格变化中发现了多标度行为的存在, 物理学家就将价格变化对不同时间标度的不变性与湍流中能量在不同方向的传播所出现的标度不变性进行类比, 得到了一些具有启发性的结论<sup>[13]</sup>。由于在湍流中具有自相关性, 而在价格变化中不具有自相关性, 这种类比引起了很大的争论<sup>[14]</sup>。借用湍流的理论和方法来研究价格变化的绝对值、平方等量的变化, 还是一种很有意义的尝试。虽然价格增量不具有长程相关性, 与湍流的基本假设相悖, 但价格增量的绝对值、平方等量却具有长程相关性。

#### 5 标度理论在金融市场中的实证研究

##### 5.1 标准普尔 500 指数中的标度行为<sup>[16]</sup>

Mantegna 和 Stanley 研究了标准普尔 500 指数中的标度行为, 他们的论文发表在权威期刊《Nature》上, 使用的数据是 1984 年 1 月至 1989 年 12 月 6 年共 1 447 514 个数据。他们同时研究了价格增量和收益两个时间序列, 发现这两个时间序列在高频区域有相同的统计性质。在研究价格增量的标度性时, 使用的最短的时间标度为 1 分钟, 最长为 1000 分钟, 发现标准普尔 500 指数可以用对称的 Lévy 稳定分布来描述, 价格变化的概率密度函数的中间部分与 Lévy 稳定分布非常接近。

用  $y(t)$  表示标准普尔 500 指数在时刻  $t$  的取值,  $Z(t) = y(t) - y(t - T)$  表示指数差。对于不同的时间标度  $T$ , 用实际数据作出了  $Z$  的密度函数, 它们与 Lévy 稳定分布拟合得很好。为了估计有关参数, 根据(3)可以得出对于不同的  $T$ ,  $Z = 0$

的概率  $P_T(0)$  与  $T$  之间有如下关系

$$P_T(0) = \frac{\text{常数}}{T^\mu} \propto T^{-\frac{1}{\mu}} \quad (22)$$

将上式两端取对数有

$$\log P_T(0) = \text{常数} - \frac{1}{\mu} \log T \quad (23)$$

由上式可以看出,只需在对数坐标纸上作出  $P_T(0)$  与  $T$  的回归分析就可以得出  $\mu$  的估计值. 它们得出标准普尔 500 指数的  $\mu = 1.40 \pm 0.05$ .

对于每个  $T$ , 上面的估计方法只用到了概率密度函数中的一点  $P_T(0)$  的信息, 为了验证上面的标度关系对整个的概率密度函数  $P_T(x)$  成立, 只需说明, 对于估计值  $\mu$ , (3) 成立, 即当  $\mu = 1.40$  时, 有

$$P_T(x) = \frac{1}{T^{1/\mu}} P_1\left(\frac{x}{T^{1/\mu}}\right) \quad (24)$$

利用前面的数据, 分别作出当  $T$  取不同的值, 将横轴用  $\frac{x}{T^{1/\mu}}$ 、纵轴用  $\frac{P_T(x)}{T^{-1/\mu}}$  重新标度后的概率密度函数, 发现当  $1 \leq T \leq 1000$  时, 所有经过重新标度的密度函数的中间部分都与  $P_1(x)$  重合, 实证结果与理论结果相当吻合. 但在分布的两个尾部, 拟合效果不好. 两个尾巴的分布比正态分布“胖”, 但比 Levy 稳定分布“瘦”, 因此必须用截尾 Levy 稳定分布来描述这两个尾巴.

## 5.2 湍流理论与金融市场

在文献[13]中, 作者用 1992 年 10 月 1 日至 1993 年 9 月 30 日全世界的美元对马克的汇率共 1 472 241 个数据, 对汇率的标度行为进行了研究. 作者认为汇率变化  $\Delta r$  的概率密度与时间标度  $\Delta t$  之间的关系, 与湍流中两点之间的速度差  $\Delta v$  的概率密度与两点之间的空间距离  $\Delta r$  之间的关系类似, 进而由这种类似性得出, 对应于流体动力学的能量级联(cascades), 在外汇市场中也存在一个信息级联.

在流体动力学中, 有  $\langle (\Delta v)^n \rangle \propto (\Delta r)^{\xi_n}$ , 当  $n \leq 3$  时, 在一定的假设条件下有  $\xi_n = \frac{n}{3}$ , 当  $n > 3$  时,  $\xi_n < \frac{n}{3}$ .

在汇率的变化中, 利用实际的交易数据, 也可以得到类似的表达式,  $\langle (\Delta r)^n \rangle \propto (\Delta t)^{\xi_n}$ . 对于不同的  $n$ , 对比湍流和汇率, 发现  $\xi_n$  与  $\xi_n$  非常接近. 因  $\xi_n < \frac{n}{2}$  并且不是常数, 这说明必须用多重分形

理论来研究汇率的变化.

Mantegna 和 Stanley<sup>[14,15]</sup> 以及 Arnedo<sup>[17]</sup> 等人对上面的类比关系提出了质疑, 他们认为在湍流中, 速度的变化是空间相关的, 而在汇率的变化中, 价格的变化是不相关的, 因此汇率与湍流有本质的不同, 其次, 他们还发现对不同的空间距离, 在湍流中不存在(22)所示的那种标度不变关系.

虽然金融市场中价格的变化是不相关的, 但价格变化的幅度——波幅(volatility)却呈现出相关性. 所以, Arnedo<sup>[16]</sup> 等人认为, 虽然不能直接将价格变化与湍流进行对比, 但可以利用研究湍流的方法来研究价格变化的波幅的标度关系, 他们用小波(wavelet)分析的方法研究了标准普尔 500 指数在一天内的波幅, 发现其中存在类似于能量级联的信息级联现象.

## 5.3 金融市场的多标度现象

在文[19]中, 利用 1966 年 1 月至 1998 年 6 月总共 8100 个交易日的纽约证券交易所指数数据, 对金融市场的多标度现象进行了实证研究.

定义每天收益率(去掉平均收益之后)为

$$r_t = \log \frac{S_{t+1}}{S_t} - \langle \log \frac{S_{t+1}}{S_t} \rangle \quad (25)$$

每天的波幅  $\sigma_t$  不能直接观察, 但可以间接地定义为  $r_t = \sigma_t \eta_t$ , 这里可假定所有  $\eta_t$  是具有均值为零、方差为 1 的且具有相同分布的正态随机变量, 能够直接观察到的波幅就是绝对收益  $|r_t|$ .

定义总和收益  $\varphi(L)$  为

$$\varphi(L) = r_t + r_{t+1} + \dots + r_{t+L-1} \quad (26)$$

以交易日为单位, 当  $L$  从 1 到 250 个交易日(大约为 1 年), 对每个  $L$ , 计算标准差  $\sigma(L)$ , 如果  $r_t$  是不相关的(或短程相关的), 则一定有

$$\sigma(L) \sim L^{-\beta} \quad \beta = 0.5 \quad (27)$$

用纽约证券交易所的指数数据可以得到  $\beta \approx 0.49$ , 这说明了纽约证券交易所的指数收益是不相关的.

定义广义总和绝对收益为

$$\chi_c(L, \gamma) = \begin{cases} \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \log |r_{t+i}| & \gamma = 0 \\ \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} |r_{t+i}|^\gamma & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (28)$$

用  $\delta(L, \gamma)$  表示  $\chi_c(L, \gamma)$  的标准差, 如果  $|r_t|$

不相关,则一定有

$$\delta(L, \gamma) \sim L^{-\beta(\gamma)} \quad \beta(\gamma) = 0.5 \quad (29)$$

但对纽约证券交易所的指数数据分析得到,当  $L$  从 1 到 250 交易日时,  $\beta(1) \cong 0.19, \beta(1.5) \cong 0.27$ .

通过计算可以看出,当  $-0.5 < \gamma < +4$  时,  $\beta(\gamma)$  不是常数(如图 1),图 1 类似于多重分形理论中的广义维数图,这说明由于  $\gamma$  不同,  $\delta(L, \gamma)$  中反映的波动幅度不同,  $\gamma$  越大,突出了大幅度波动的收益率的作用,  $\gamma$  越小,突出了小幅度波动收益率的作用,对于不同的  $\gamma$ ,有不同的标度指数,即不同幅度的波动具有不同的标度关系.这种多标度行为的存在说明了 ARCH 或 GARCH 模型的假设有一定的问题,在考虑方差的变化时应考虑不同的标度行为<sup>[10]</sup>.

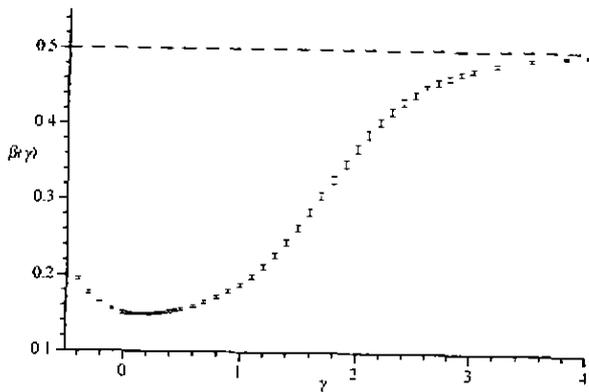


图 1 对于不同的  $\gamma, \delta(L, \gamma)$  的标度指数  $\beta(\gamma)$

## 6 结论

本文对金融市场中的标度理论的最新进展进行了评述.标度不变性是金融市场中的一个特性,而这种特性在传统的金融学理论中没有被发现或者没有得到应有的重视.金融市场的标度行为反映了金融市场中价格变化的相似性和相关性,这种相似性和相关性体现在不同的时间标度上.金融市场的标度不变性改变了金融理论的传统研究方法,要求人们在不同的时间标度上考虑整个金融市场的行为.

金融市场的多重或多标度分形理论,是一个具有更大理论意义和实际意义的研究领域,它要求对金融市场的波动进行更细致的分解,分析不同波动规模(风险)的不同标度关系.这种标度关系的不同说明了不同波动程度的相关性不一样,对不同程度的风险,要采取不同的风险管理措施.

总之,金融市场的标度理论在金融市场的监管、衍生工具的定价、风险管理方面有广阔的应用前景,我们应该结合中国金融市场的实际,研究这种标度行为,为金融市场的有效监管和金融风险的防范提出切实可行的解决方案.

## 参 考 文 献:

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973; 81: 637 ~ 654 Or <http://www.kva.se/ecoback97.html>
- [2] Hull J C. Options[M]. Futures and Other Derivatives, 3rd edition, Prentice Hall, 1997
- [3] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature[M]. Freeman, San Francisco, 1982
- [4] Mandelbrot B B. The variation of certain speculative[J]. Journal of Finance, 1963; XXXVI: 392~417
- [5] Cont R, Potters M, Bouchaud J-P. Scaling in stock market data, stable law and beyond[C]. In Scale invariance and beyond[C]. Proceedings of the CNRS School on Scale Invariance, Les Houches, France, March 1997
- [6] Matusz A. Financial modeling and option theory with the truncated Levy process[EB/OL]. cond-mat/9710197, available at <http://xxx.lanl.gov>, 1997
- [7] 黄登仕, 张 权. 论负幂律分布[M]. 系统科学理论与应用(乌杰主编). 成都: 四川大学出版社, 1996
- [8] 黄登仕, 湛基华, 汪应洛. 收入分布的非线性机理研究[J]. 数量经济技术经济研究, 1996, (1)(7)
- [9] Cont R. Scaling and correlation in financial data[EB/OL]. cond-mat/9705075, available at <http://xxx.lanl.gov>, 1997
- [10] Potters M, Cont R, Bouchaud J-P. Financial markets as adaptive ecosystems[EB/OL]. cond-mat/9609172 v2,

- available at <http://xxx.lanl.gov>. 1997
- [11] Bouchaud J-P. Elements for a theory of financial risks[EB/OL]. cond-mat/9806101. available at <http://xxx.lanl.gov>. 1998
- [12] 黄登仕. 混沌、多重分形与群决策[M]. 运筹与决策, 第2卷(王荫清主编), 成都:成都科技大学出版社, 1992:1445~1551
- [13] Ghashghaie S, Breymann W, Peinke J, Talkner T, Dodge Y. Turbulent cascade in foreign exchange markets[J]. Nature, 1996; 381:767
- [14] Mantegna R N, Stanley H E. Turbulence and financial markets[J]. Nature, 1996; 383: 587
- [15] Mantegna R N, Stanley H E. Stock market dynamics and turbulence: parallel analysis of fluctuation phenomena [J]. Physica, 1997; A 239:255
- [16] Mantegna R N, Stanley H E. Scaling behavior in the dynamics of an economic index[J]. Nature, 1995; 376: 46
- [17] Arneodo A, Bouchaud J-P, Cont R, Muzy J-F. Comment on "Turbulent cascades in foreign exchange markets" [EB/OL]. cond-mat/9607120. available at <http://xxx.lanl.gov>. 1996
- [18] Arneodo A, Muzy J-F, Sornette D. Causal cascade in the stock market from the "infrared" to the "ultraviolet"[EB/OL]. cond-mat/9708012, available at <http://xxx.lanl.gov>. 1997
- [19] Pasquini M, Serva M. Multiscale behavior of volatility autocorrelation in a financial market[EB/OL]. cond-mat/9810232, available at <http://xxx.lanl.gov>. 1998
- [20] Mantegna R N, Stanley H E. Modeling of financial data: comparison of the truncated Lévy flight and the ARCH(1) and GARCH(1, 1) processes[EB/OL]. cond-mat/9804126, available at <http://xxx.lanl.gov>. 1998

## Scaling and scale invariance in financial markets

*HUANG Deng-shi*

The School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China

**Abstract:** Traditional financial theories was based on the normal distribution of the price increments and discussed the probability density function (PDF) of the increments in a given time scale. Recent researches show that the tail of the PDF of the increments was fatter than the normal distribution. For describing the fat tail distribution and discussing the similarity among PDFs at different time scales, scientists introduced the Lévy stable distribution to describe the price increments. Because the Lévy stable distribution has too fat tail, the truncated Lévy stable distribution has been introduced. The truncated Lévy stable distribution overcomes the shortcoming of the Levy stable distribution. The discovery of the multiscale behavior in the financial markets is a great progress and has important significance in the theory and practice. This paper review the new researches for the scaling and scale invariance in financial markets.

**Key words:** financial market; normal distribution; scaling; scale invariance; fractal; truncated lévy stable distribution; multiscale behavior