

求解不允许卖空证券组合前沿的区间搜索方法^①

杨德权¹, 杨德礼¹, 史克禄², 胡运权²

(1. 大连理工大学系统工程研究所, 大连 116024; 2. 哈尔滨工业大学管理学院, 哈尔滨 150001)

摘要:综合分析了不允许卖空时证券组合前沿的构成和性质,在此基础上给出了求解不允许卖空时证券组合前沿的区间搜索方法.应用该方法可以方便迅速地求出带有大型协方差矩阵的非负证券组合前沿及构成前沿的全部抛物的解析式.对于大型证券组合优化问题的求解以及最优证券组合选择理论和方法的实用化具有重要的理论意义和实用价值.

关键词: 证券组合; 有效前沿; 卖空

中图分类号: F830.59

文献标识码: A

文章编号: 1007-9807(2001)01-0033-05

0 引言

均值方差(mean variance, MV)模型最优解中的卖空问题是静态组合证券投资理论研究中尚未完全解决的难题之一.这一问题的难点在于:第一,虽然已经取得了一些研究成果,但到目前为止人们对不允许卖空时证券组合前沿的构成及其性质还缺乏清楚完整的认识;第二,尽管研究者们已经提出了一些不允许卖空时证券组合前沿的求解方法,但由于这些方法存在着计算复杂、理论不完备和实用性较差等不足,很难用于求解大规模证券组合优化问题.

关于不允许卖空时证券组合前沿构成和性质的研究最早开始于Markowitz,他提出的临界线算法^[1]揭示了不允许卖空时证券组合前沿是由一组抛物线连接而成的这一事实.其后,Ross^[2]在其有效集数学中分析归纳了与关于证券组合前沿的研究成果,发现并证明了前沿证券组合中证券权重的单调性.文[3-5]研究了不允许卖空时证券组合前沿的可导性.文[6,7]中给出了关于卖空出现条件的三个定理,在此基础上文[8]分析了不允许卖空时证券组合前沿的构成,给出并证明了不允许卖空时证券组合前沿的五个性.这些研究从

不同侧面揭示了不允许卖空时证券组合前沿的构成和性质,使得我们有可能利用这些研究成果,提出求解不允许卖空时证券组合前沿的新方法.目前,不允许卖空时证券组合前沿的求解方法主要有Markowitz的临界线算法、文[9,10]的解析方法和文[11]的树形算法等方法.临界线算法虽然有较好的理论基础,但计算复杂;解析法和树形算法还在发展中,解析法中如何确定闭区间的端点问题和树形算法中如何确定“多余证券”的问题还没有得到很好的解决.此外由于这两种方法是以穷举法为基础的,因此不适于求解大规模证券组合优化问题.

本文首先描述不允许卖空时证券组合前沿的构成及其性质,这部分内容将是总结归纳性质的,对于所涉及的定理本文将注明出处、直接引用,而不再重复证明.在此基础上给出“区间搜索方法”的原理,然后是这种方法的计算步骤,最后给出一个规模较大的数值实例以检验算法的有效性和适用性.

1 不允许卖空时证券组合前沿的构成和性质

根据现代组合证券投资理论,有效证券组合

① 收稿日期:1999-12-03;修订日期:2000-09-26.

作者简介:杨德权(1965-),男,黑龙江讷河人,博士.

可以由以下 MV 模型求出

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \omega' V \omega \\ \text{s. t. } & \omega' e = R \quad (1) \\ & \omega' u = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

其中 ω 为 N 种证券的权重列向量, e 和 V 分别为 N 种证券的收益率列向量和协方差矩阵, 本文假定 V 正定. u 是分量为 1 的 N 维列向量, R 为证券组合的期望收益率. 该模型的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \omega' V \omega + \lambda(R - \omega' e) + \gamma(1 - \omega' u) \\ \lambda &= (CR - A)/D, \\ \gamma &= (B - AR)/D \\ \omega &= \lambda(V^{-1}e) + \gamma(V^{-1}u) \\ &= [(CR - A)V^{-1}e + \\ & \quad (B - AR)V^{-1}u]/D \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $A = u'V^{-1}e, B = e'V^{-1}e, C = u'V^{-1}u, D = BC - A^2$ (文献[9,10]证明了 V 正定时 $D > 0$). 由式(3)可求得

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \omega' V \omega \\ &= (CR^2 - 2AR + B)/D \\ &= \lambda R + \gamma \quad (4) \end{aligned}$$

式(4)在以 R 为横轴, 以 σ^2 为纵轴时为一条以点 $P(A/C, 1/C)$ 为顶点, 开口向上的抛物线, 称此抛物线为证券组合前沿, 见图 1a.

1.1 不允许卖空时证券组合前沿的构成

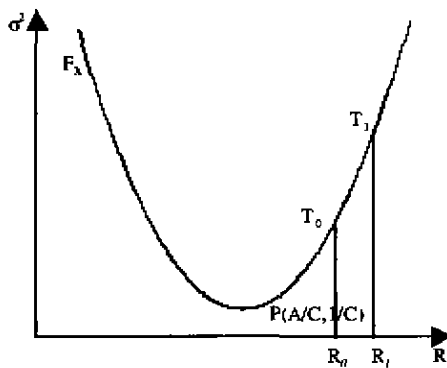
现在人们已经知道不允许卖空时, 证券组合前沿是由一组抛物线连接而成的. 为了进一步揭示不允许卖空时证券组合前沿的构成规律, 在式(3)中, 令 $V^{-1}e = h, V^{-1}u = g, V^{-1} = [M] = [m_{ij}]$, 则向量 h, g 的第 i 个分量可表为

$$\begin{aligned} h_i &= \sum_{j=1}^N m_{ij} e_j, \\ g_i &= \sum_{j=1}^N m_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

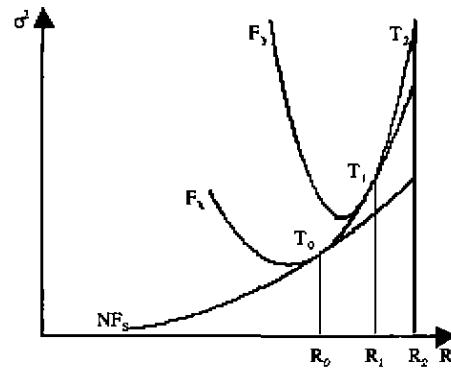
将 h, g 代入式(3)得

$$\omega_i = [(ch_i - Ag_i)R + (Bg_i - Ah_i)]/D \quad (5)$$

由式(5)易知, $(ch_i - Ag_i)$ 的符号决定了 $\omega_i(R)$ 的单调性.



a) 允许卖空时



b) 不允许卖空时

图 1 证券组合前沿

定理 1 设 $I^+ = \{i | ch_i - Ag_i > 0\}$,
 $I^- = \{i | ch_i - Ag_i < 0\}$,
 $I^0 = \{i | ch_i - Ag_i = 0\}$, 若
 $R(I^+) = \{R_q | R_q = (Ah_q - Bg_q) / (Ch_q - Ag_q), q \in I^+\}$
 $R(I^-) = \{R_p | R_p = (Ah_p - Bg_p) / (Ch_p - Ag_p), p \in I^-\}$
 $R_0 = \max\{R_q | q \in I^+\}$,
 $R_1 = \min\{R_p | p \in I^-\}$

则有式(5)中 $\omega_i \geq 0 (i = 1, \dots, N)$, 当且仅当 $R \in [R_0, R_1]$, 和 $g_i > 0 (i \in I^0)$.

定理 1 由 Vörös 给出 (证明详见文献[10]). 由该定理可知: 闭区间 $[R_0, R_1]$ 是否存在完全取决于 N 种证券 (设其集合为 X) 的收益率列向量 e 和协方差矩阵 V . 由于集合 X 确定后, e, V 就随之确定, 因此 $[R_0, R_1]$ 是否存在就完全取决于选定的证券集合 X . 若 X 满足定理中的条件, 则当 $R \in [R_0, R_1]$ 时 MV 模型解的分量 ω_i 非负. 由 ω_i 与 F_i

上点的对应关系知,在图 1a 中区间 $[R_0, R_1]$ 对应的曲线 T_0T_1 上任意一点对应的证券组合权重向量非负,因此曲线 T_0T_1 就是不允许卖空时证券组合前沿上对应于证券集合 X 的部分.一般地,假设有 $N(N \geq 2)$ 种证券构成的集合 S ,在 S 的 $C_N^0 + \dots + C_N^N = 2^N - 1$ 个非空子集中,有 k 个子集(即 Markowitz 所说的临界集)满足定理 1 中的条件,则对于子集 $S_i(i = 1, \dots, k)$ 存在一个闭区间 $[R_{0i}, R_{1i}]$ 对应于不允许卖空时证券组合前沿上的一段曲线 $T_{0i}T_{1i}$,该段曲线上任意一点处对应证券组合的权重向量非负.将所有相临区间对应的各段曲线连接在一起就构成了不允许卖空时的证券组合前沿,且该前沿由集合 S 唯一确定.在图 1b 中,设相互连接的两条抛物线为 F_x 和 F_y ,对应的临界集 X, Y 为 S 的子集且满足定理 1 中的条件,则闭区间 $[R_0, R_1]$ 和 $[R_1, R_2]$ 对应的曲线 T_0T_1 和 T_1T_2 连接在一起构成了不允许卖空时(对应于证券集合 $X \cup Y$)的证券组合前沿 NF 上的一部分 T_0T_2 .

1.2 不允许卖空时证券组合前沿的性质

在图 1b 中,若曲线 NF 为不允许卖空时 N 种证券构成的集合 S 所对应的证券组合前沿, N 种证券的期望收益率列向量为 e , e_{\min} 和 e_{\max} 分别为 e 的最小和最大分量,则 NF 具有以下性质(有关证明见文[8]):

① 若 NF 上某一点对应的证券组合至少含有两种收益率不同的证券,则 NF 在该点处的导数存在且唯一.

② ω 中出现负分量的条件是 $R > e_{\max}$ 或 $R < e_{\min}$,故曲线 NF 将位于直线 $R = e_{\min}$ 和 $R = e_{\max}$ 之间.

③ 曲线 NF 的左端点 P_1 处,的证券组合只含有收益率为 e_{\min} 的证券;右端点 P_2 处的证券组合只含有收益率为 e_{\max} 的证券.

④ 由 NF 构成和性质 ② 可知, NF 的曲线方程可表示为

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sigma^2(R_{0i}) & R_{0i} = e_{\min} \\ \lambda_i R_i + \gamma_i & R_{0i} \leq R_i \leq R_{1i} (i = 1, \dots, k) \\ \sigma^2(R_{1k}) & R_{1k} = e_{\max} \end{cases} \quad (6)$$

其中, $(R_{0i}, \sigma^2(R_{0i}))$ 和 $(R_{1k}, \sigma^2(R_{1k}))$ 分别为 NF 左右端点 P_1 和 P_2 的坐标, k 为集合 S 中满足定理 1 中条件的临界集数目, $\lambda_i R_i + \gamma_i$ 为临界集 $S_i(i =$

$1, \dots, k)$ 对应的抛物线 NF_i , $[R_{0i}, R_{1i}]$ 为由定理 1 确定的对应于 S_i 的闭区间.

⑤ 设 P 为 NF 上纵坐标最小的点,则曲线 PP_2 为有效前沿,而 P_1P 为非有效前沿(不含 P 点).

2 区间搜索方法的原理与步骤

2.1 区间搜索方法的原理

根据前文分析可知:不允许卖空时证券组合前沿由一组抛物线连接而成,其上每段抛物线均对应一个闭区间和一个临界集,临界集在闭区间内保持不变,只有在闭区间的两个端点处临界集才发生变化.变化的规律是:当临界集中证券收益率两两不同时,在闭区间端点处临界集只增加或减少一种证券(证明见文[8]),又由性质 ① 知,此时闭区间端点处不允许卖空时证券组合前沿可导;若临界集中有 k 种证券收益率相同,则在闭区间端点处临界集会增加或减少 k 种证券,且此时闭区间端点处不允许卖空时证券组合前沿将出现拐点(证明见文[9]).为了求出不允许卖空时证券组合前沿,必须求出所有的临界集及其对应的闭区间.

1) 求临界集

假定要求闭区间 $[R_0, R_1]$ 对应的临界集,则只需在该区间内任取一点 R 代入以下模型之中

$$\min \frac{1}{2} \omega' V \omega$$

$$\text{s. t. } e' \omega = R \quad (7a)$$

$$u' \omega = 1 \quad (7b)$$

$$E' \omega = 0 \quad (7c)$$

其中, $E = \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix}$, Q 为 $l \times (n-l)$ 阶 0 矩阵, I 为 $(n-l)$ 阶单位阵, O 为分量为 0 的 $(n-l)$ 维列向量,其余符号意义同模型 1.

求解该模型即可求出 $[R_0, R_1]$ 对应的临界集.该模型的求解即可用文献[9,10]中的解析方法也可用有关数值方法, ω 中不为 0 的分量对应的证券构成的集合就是要求的临界集.

2) 求对应闭区间的端点 假定要求 $[R_0, R_1]$ 的右端点 R_1 的数值,则只需要先求出 $[R_0, R_1]$ 及其相邻闭区间 $[R_1, R_2]$ 对应的临界集 X, Y , 然后

再由 X, Y 按公式(4) 求出对应的抛物线 T_0T_1 : $\sigma^2 = \lambda_1 R + \gamma_1$ 和 T_1T_2 : $\sigma^2 = \lambda_2 R + \gamma_2$. 两抛物线联立, 即可求出 R_1 的数值.

2.2 区间搜索方法的算法

由性质②知不允许卖空时证券组合前沿位于直线 $R = e_{\min}$ 和 $R = e_{\max}$ 之间, 因此区间搜索从 $R = e_{\min}$ 开始. 给定初值: $R_0 = e_{\min}, i = 0, n = N, N$ 为给定证券集中元素的个数.

STEP1 令步长 $\Delta R = (e_{\max} - e_{\min})/n, R_{i+1} = R_i + \Delta R, R_{i-2} = R_i + 2 \cdot \Delta R$, 若 $R_{i+1} \geq e_{\max}$, 停止搜索.

解模型 7, 求出抛物线:

$$l_i: \sigma^2 = \lambda_i R + \gamma_i, \quad R \in [R_i, R_{i+1}]$$

$$l_{i+1}: \sigma^2 = \lambda_{i+1} R + \gamma_{i+1}, \quad R \in [R_{i+1}, R_{i+2}]$$

求出端点 R_{i+1} 的数值.

STEP2 若 $l_i = l_{i+1}$, 则令 $i = i - 1$, 返回 STEP1, 即如果两个小区间对应的抛物线相同就继续搜索.

若 $l_i \neq l_{i+1}$, 即如果两个小区间对应的抛物线不同, 则比较其连接点处的斜率 λ : 如果 $\lambda_{i+1}(R) | R = R_{i+1} = \lambda_i(R) | R = R_{i+1}$, 则令 $i = i +$

1, 返回 STEP1. 即如果斜率相同, 则两条抛物线相切, 为相邻抛物线, 继续搜索.

如果 $\lambda_{i+1}(R) | R = R_{i+1} \neq \lambda_i(R) | R = R_{i+1}$, 则需进一步判断: 若临界集中有 k 种证券收益率相同(假定为 e), 且此时有 $R_{i+1} = e$, 则令 $i = i + 1$, 返回 STEP1. 否则令 $n = 2N$, 返回 STEP1. 即如果斜率不同, 则表明两条抛物线相交或不是相邻抛物线. 对于相交的情形可继续搜索; 如不是相邻抛物线, 则表明有遗漏的闭区间, 于是缩短步长继续搜索.

3 数值算例

为了说明和检验算法的有效性和适用性, 以下给出一个数值算例. 算例所选样本包括沪市 30 指数中的 30 种和深圳的 5 种(随机抽取)共 35 种股票. 数据取自君安证券哈尔滨分公司. 收益率向量和协方差矩阵由 1996 年 7 月 1 日至 1996 年 11 月 20 日共 100 个交易日的收盘价求出. 应用区间搜索算法求出 33 个临界集, 其中包括: 31 条抛物线和两个端点(见图 2).

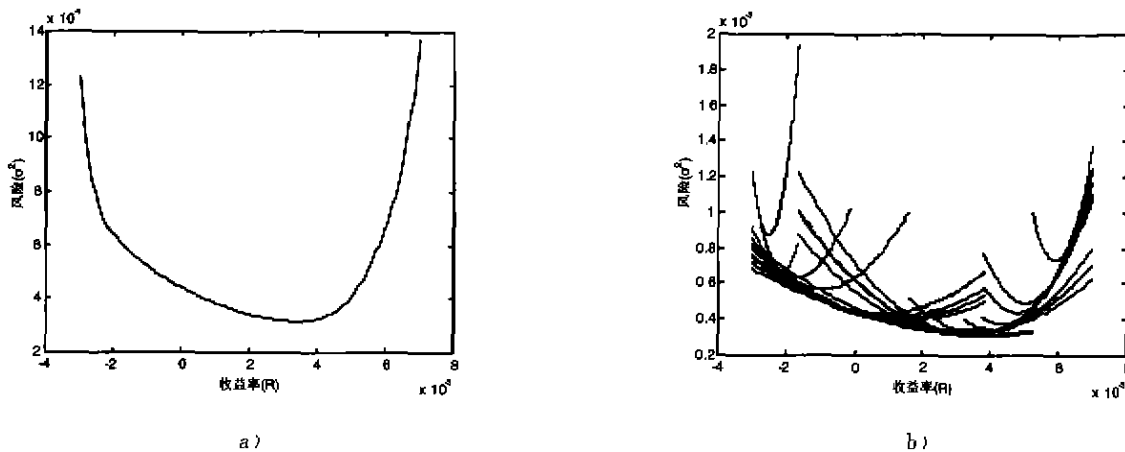


图 2 算例中证券组合前沿的构成

图 2a 为不允许卖空时的证券组合前沿, 2b 为构成该前沿的 31 条抛物线(外加两个端点, 共 33 个临界集)及其连接情况, 为节省篇幅 31 条抛物线的解析式略去.

4 结论

本文提出的求解不允许卖空时证券组合前沿

的区间搜索方法具有理论基础完备、算法简单明了, 有利于大规模证券组合优化问题的求解等特点. 对于促进均值方差模型的实用化, 以及机构投资者研究制定各种动态组合证券投资 and 风险控制策略具有较大的理论意义和实用价值.

参 考 文 献:

- [1] Markowitz M H. Portfolio selection; efficient diversification of investment[M]. Besli Black-Well. 2tb ed. 1991, 320-335
- [2] Ross S A. The capital asset pricing model, short sale restriction and related issues[J]. J. Finance, 1977,32(1):177-183
- [3] Roll R. A critique of the asset pricing theory's tests, part I: on past and potential testability of the theory[J]. J. Financial Economic, 1977,(4):129-176
- [4] Dybvig H. Short sales restriction and kinks on the mean-variance frontier[J]. J. Finance, 1984,39(2):239-244
- [5] Vörös J. Portfolio analysis; an analytic derivation of the efficient frontier[J]. EJOR, 1986,(23):294-300
- [6] 杨德权, 翟成强, 高桂君. 关于 MV 模型的两命题及其证明[J]. 预测, 1996,6:49-50
- [7] 杨德权, 翟成强, 胡运权. 均值方差模型优解中出现负分量的条件研究[J]. 预测, 1997,5:51-52
- [8] 杨德权, 刘鹏伟, 胡运权. 不允许卖空时证券组合前沿的性质研究[J]. 预测, 1997,6:46-49
- [9] Vörös J. The explicit derivation of the portfolio Frontier in the case of degeneracy and general singularity[J]. EJOR, 1987,(36):302-310
- [10] Vörös J. A note on the kinks at the mean variance frontier[J]. EJOR, 1999,(112):236-239
- [11] 曾勇, 唐小我. 非负投资比例约束下的证券组合风险最小化方法[J]. 技术经济, 1994,(2):110-114
- [12] Meton R C. Analytic derivation of the efficient frontier. J. Finance and Quantitative Analysis[J]. 1972,7(6):1851-1872

The interval searching approach for solving portfolio frontier with no short selling

YANG De-quan¹, YANG De-li¹, SHI Ke-lu², HU Yun-quan²

1. Institute of Systems Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Management, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

Abstract: This paper investigates the structure and the property of the portfolio frontier with no short selling, on this basis an interval searching approach for solving portfolio frontier problem with no short selling is put forward. Portfolio frontier with no short selling together with all of its composing parabolas can be conveniently and rapidly determined. The approach is of important theoretical meaning and practical value for solving portfolio optimization problem with large-scale covariance matrix and also useful for putting portfolio theory and its associate methods into practical use.

Key words: portfolio; efficient frontier; short selling