第4卷第2期
2001年 4 月

管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA

Vol. 4 No. 2
Apr., 2001

合理制定铁路客票价格的优化模型及算法①

四兵锋，高自友
（北方交通大学交通运输学院，北京 100044）

摘要：在充分考虑出行者和铁路客运部门两方面的利益情况下，提出一个双层规划模型以得到在多种交通方式竞争条件下的铁路客票价格制定的最优策略. 既保障了出行者使自己的广义出行费用最小，又能使铁路客运部门在运输市场竞争中取得的经济效益最大. 并且给出了求解该模型的SAB算法。最后用一个简单的算例说明了模型及算法的应用.

关键词：双层规划；灵敏度分析；均衡模型

中图分类号：F530.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-9807(2001)02-0045-07

0 引 言

目前，我国铁路客票票价体系的框架基本上还是在计划经济条件形成的. 但随着我国客运市场的深入发展以及公路、民航等各种运输方式竞争的加剧，铁路票价体系中的一些方面将不能适应市场竞争的需要. 从国外许多国家对铁路运价改革的实践来看，铁路运价走向市场、铁路管理中引入商业化原则已是大势所趋，我国铁路运价也必然要走这条道路.

从我国近几年情况来看，城市间的交通运输市场存在着激烈的竞争. 对于短途客运，公路运输已占有一定优势，并且随着高速公路的不断扩建，公路的中长途客运也将很快发展. 而民航的客运需求更是迅速增长. 这都使得铁路客运面临着严峻的挑战. 根据市场原则，价格因素在竞争中起着非常重要的作用. 对于城市间的交通运输市场来说，不同运输方式的客流需求的变化与客票票价调整之间互相影响，互相作用. 虽然运输过程中的时间、方便、舒适和安全性能等因素也会影响客流在不同运输方式之间的转移，但就目前我国城市间的主要交通方式（铁路、公路和民航等）来看，在相对一段较长时间内，各种交通方式在运输过程中的时间、舒适性和安全性等硬件因素的变化一般是比较小的，所以相对来说，票价的变化对客流在不同运输方式之间的转移的影响是主要的. 一般而言，铁路客流需求的变化与其客票价格的变动是呈相反方向运动的，当客票价格过低时，尽管能够吸引到大量的客流，但是不一定能产生最大的客运经济效益；而当客票价格过高时，铁路客流必将大量减少，即消耗了大量运能，也不能产生最大的客运经济效益.

灵敏度分析方法在国外已在公路交通领域得到了广泛的应用，尤其在公路网络设计和公路需求预测等问题上[9-11]. 文[13]将灵敏度分析方法应用在城市间的多模式运输网络中，首先提出了一个城市间的多模式均衡配流模型，并且利用灵敏度分析方法得出了价格因素对于不同运输方式的客运需求的影响关系.

本文在充分考虑了出行者和铁路客运部门两方面利益的基础上，提出了一个双层规划模型以便找到在多种交通运输方式竞争条件下的合理制定铁路客票价格的最优策略. 从定量角度出发，既保障了出行者使自己的出行费用最小，又能使铁路客运部门在运输市场竞争中取得的经济效益最大. 并且给出了求解模型的SAB算法，而这种算

① 收稿日期：2000-01-12；修订日期：2000-05-22.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(79970014)；教育部“跨世纪优秀人才培养计划”基金资助项目.
作者简介：四兵锋(1972-)，男，河北邢台人，博士生.

法正是基于文[13]中所提出的灵敏度分析方法.

1 双层规划模型介绍

可以把铁路客票价格的制定看作一个 leader-follower 或者是 Stackelberg 游戏问题,其中决策部门即铁路客运管理部门是领导者(leader),旅客的出行行为或者交通需求为跟随者(follower).决策部门只能通过政策和管理影响出行者在出行时对于交通方式的选择,例如通过客票价格的调整来使得出行者的选择行为发生改变,但不能控制他们的选择.出行者都是根据自己的需要以及自己的习惯来选择交通方式的.这种关系可以用双层规划模型(bi-level programming)来进行描述,其基本思想为下面的数学模型:

$$(\mathrm{U})\ \max_{x} F(x, y(x))$$

$$\text{s.t. } G(x, y(x)) \leqslant 0$$

其中 $y(x)$ 由以下模型给出

$$(\mathrm{L})\ \min_{y} f(x, y)$$

$$\text{s.t. } g(x, y) \leqslant 0$$

从上面可以看出,双层规划模型由两个子模型(U)和(L)构成,其中U称为上层规划,L称为下层规划.F 是上层规划所确定的目标函数,x 为上层规划的决策变量,G 是对变量 x 的约束;f 为下层规划所确定的目标函数,y 为下层规划的决策变量,g 是对变量 y 的约束;$y(x)$ 是反应函数.

上层规划(U)可以描述为铁路客运管理部门在政府规定的范围内制定最佳的客票价格以使得铁路客运的经济效益为最大.而下层规划(L)则描述了城市间的多模式运输竞争条件下,客流在不同运输方式之间的分配模式,它的目标是使每个出行者在出行过程中的出行费用最低.

显然,对于上述双层规划模型而言,上层规划(铁路客运管理部门)的决策变量(即铁路客票价格)和下层规划(出行者)的决策变量(不同客运方式的客流量)是相互作用、相互影响的.在假定其它因素保持不变的情况下,如果铁路客票价格上升,那么铁路客流量就会减少而转移到其它的运输方式上;相反,如果铁路客票价格下降,那么铁路运输就会吸引其它运输方式的一部分客流,使得铁路客运需求增加.一方面出行者总是希望自己总的出行费最低;另一方面铁路客运管理部门总是希望铁路的客运收入量大.这看起来是相互矛盾的,但事实上这两方面相互作用的结果是取得共同的平衡点,即上述双层规划问题的最优解,从而为铁路客运管理部门在不同时段内制定合理的客票价格提供定量分析的依据.

2 多模式运输条件下用户选择模型

在城市之间的交通配流中,与城市交通配流不同,由于各种运输方式都有各自固定的运行线路,而且在当前激烈市场竞争条件下,各种运输方式都有足够的运能,因此拥挤并不是出行者在出行过程中所考虑的重要因素,所以在城市之间的交通配流过程中,一般不存在路径的选择问题,而只有交通方式的选择问题.在这里可以把城市之间的交通方式理解为途径,即出行者采用什么途径到达终点.用下面的图来描述多模式的交通网络.其中节点表示网络中的城市,弧代表出行途径,即城市之间总的所有交通方式.

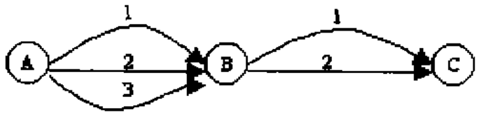

图1 多模式交通网络

在图1中包括三个城市,城市A和城市B之间的交通方式有三种(1、2、3),城市B和城市C之间的交通方式有两种(1、2).

一般情况下,出行者总是力图选择从起点到终点之间总的出行费用(广义)最低的交通方式,如果所有的出行者都选择某一种出行方式(比如铁路,假定一开始它的出行费用是最低的).那么随着该方式客流需求的增加,它的总出行费用就会上升,例如票价上升,出行时间变大,服务质量下降等.这样就会有出行者放弃选择这种交通方式,而选择其他交通方式,不过别的交通方式的出行费用也会随着客流需求的增加而上升.最终,在不同的运输方式之间会达到一种客流分配的稳定的均衡状态.这种均衡状态可以描述为:

在起点与终点之间的所有可供选择的交通方式中,出行者所利用的各种交通方式的广义出行

费用全部相等，并且不大于未被利用的交通方式的出行费用.

用下面的数学形式描述这种用户均衡状态：

$$c_n^w \begin{cases} = c^{w(\min)} & \text{如果 } q_n^w > 0 \\ \geqslant c^{w(\min)} & \text{如果 } q_n^w = 0 \end{cases}, w \in W, n \in N \quad (1)$$

其中 c_n^w 表示OD对 $w(w \in W)$ 之间第 $n(n \in N)$ 种交通方式的广义出行费用，$c_n^{w(\min)}$ 表示均衡状态下 w 之间的广义出行费用，q_n^w 表示OD对 $w(w \in W)$ 之间第 $n(n \in N)$ 种交通方式的客流量，W 和 N 分别为交通网络中所有OD对的集合以及交通方式的集合.

提出数学规划模型(M)：

$$\min Z(q) = \sum_{w \in W}\sum_{n \in N}\int_0^{q_n^w} f(x)\mathrm{d}x \quad (2a)$$

$$\text{s. t.} \sum_{n \in N} q_n^w = Q^w, w \in W \quad (2b)$$

$$q_n^w \geqslant 0, w \in W, n \in N \quad (2c)$$

其中函数 f 是交通方式的广义费用函数，在这个函数中不同交通方式的客流量是自变量，即 $c_n^w = f(q_n^w)(w \in W, n \in N)$；约束(2b)表示不同交通方式总的客流需求是已知并且固定的，Q^W 表示OD对 $w(w \in W)$ 之间的总的客流需求；约束(2c)为变量的非负约束.

下面证明模型(M)的解等价于用户均衡条件(1). 对于任意一个数学规划问题，其任意局部极小点或驻点解均满足一阶条件. 如果模型(M)的一阶条件等同于用户均衡条件(1)，那么就证明了模型(M)的解与用户均衡条件(1)的等价性.

模型(M)是一个带线性等式和非负值约束的极小值问题，其Lagrangian函数为

$$L(q, \mu, \sigma) = Z(q) + \sum_{w \in W}\mu^w(Q^w - \sum_{n \in N} q_n^w) + \sum_{w \in W}\sum_{n \in N}\sigma_n^w q_n^w \quad (3)$$

其中 μ^w 和 σ_n^w 分别为等式约束(2b)和非负约束(2c)的对偶变量. 那么可以写出模型(M)的一阶极小值条件(即K-T条件)为

$$\frac{\partial L}{\partial q_n^w} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu^w} = 0, q_n^w \geqslant 0, \sigma_n^w q_n^w = 0, \sigma_n^w \leqslant 0$$

$$w \in W, n \in N$$

其中 $\frac{\partial L}{\partial \mu^w} = Q^w - \sum_{n \in N} q_n^w = 0 (w \in W)$ 就是模型(M)中的等式约束(2b).

$\frac{\partial L}{\partial q_n^w} = c_n^w - \mu^w + \sigma_n^w = 0 (w \in W, n \in N)$ 又可以写成 $c_n^w - \mu^w = -\sigma_n^w (w \in W, n \in N)$

即

$$\begin{cases} q_n^w(c_n^w - \mu^w) = 0 \\ c_n^w - \mu^w \geqslant 0 \end{cases}, w \in W, n \in N \quad (4)$$

显然，式(4)与用户均衡条件(1)等价.　[证毕]

不同运输方式的广义费用是随着客流量的增加而递增的，即函数 f 是一个递增函数，它对 q_n^w 的导数大于0. 因此模型(M)的目标函数的Hessian矩阵是正定的，即目标函数是凸的，而约束集也是凸的. 所以模型(M)是一个凸规划问题，有唯一解.

在(M)中，交通方式的广义费用函数 f 取不同的形式，便可以得到不同的客流量在不同交通方式之间的分离模式. 在交通研究中，最常用的广义费用函数形式有幂函数形式和对数函数形式. 如果广义费用函数 f 采用如下的对数形式：

$$f(q_n^w) = \frac{1}{\beta}\ln q_n^w - V_n^w, w \in W, n \in N \quad (5)$$

其中 V_n^w 表示OD对 $w(w \in W)$ 之间第 $n(n \in N)$ 种交通方式的能够观测到的效用值或者吸引度(包括出行时间、客票价格、舒适安全等). 那么客流量在不同交通方式之间的分离模式满足Logit分离模型[13].

模型(M)可以用Frank-Wolfe方法来求解[6].

3　多模式运输条件下的铁路客票价格制定的双层规划模型

模型(M)描述了城市间多模式运输条件下的客流在不同交通方式之间的分配问题，是从出行者的角度出发的，即对于出行者来说，他们总是选择广义出行费用最小的交通方式. 所得到的解是在一定条件下，比如客票价格、出行时间、舒适程度等综合因素固定，总的客运需求在不同的运输方式之间的分配模式，也就是各种交通方式的客运需求量. 在此基础上，就可以构造一个双层规划模型来寻求最佳的铁路客票价格来达到所指定的目标，对于铁路客运管理部门来说，这个目标就是使铁路客运的收益最大.

假定在某个 OD 对 w 之间的铁路交通的客票价格为 u_r^w，那么在整个交通网络中，铁路客运的总收入为

$$F = \sum_{w \in W} q_r^w u_r^w \tag{6}$$

其中 q_r^w 表示在 OD 对 w 之间的铁路的客流量.

在市场经济条件下，政府对铁路客票价格具有指导作用. 如果国家旅客运输政策没有大的变动，铁路客票价格体系的基本框架必将限定在上限为政府最高限价和下限为铁路客运成本之间. 即

$$u_r^{w(\min)} \leqslant u_r^w \leqslant u_r^{w(\max)}, \quad w \in W \tag{7}$$

其中 $u_r^{w(\min)}$ 和 $u_r^{w(\max)}$ 分别表示在 OD 对 w 之间的铁路客运成本和铁路客运票价的政府最高限价.

下面构造双层规划模型，来描述城市间多模式运输条件下的铁路客票价格制定的优化问题：

$$\text{(U)} \ \max F = \sum_{w \in W} q_r^w(u_r^w) u_r^w$$

$$\text{s.t.} \ u_r^{w(\min)} \leqslant u_r^w \leqslant u_r^{w(\max)}, w \in W$$

其中 $q(u)$ 由下层模型得出：

$$\text{(L)} \ \min Z(q, q(u)) = \sum_{w \in W} \sum_{n \in N} \int_0^{q_n^w} f(x) \mathrm{d}x$$

$$\text{s.t.} \ \sum_{n \in N} q_n^w(u_r^w) = Q^w, w \in W$$

$$q_n^w \geqslant 0, n \in N, w \in W$$

通过求解上述双层规划问题，就可找到合理制定铁路客票价格的策略以使得决策部门的目标函数 F 取得最大值，也就是说，使得铁路客运部门的客运经济效益为最大. 需要注意的是，双层规划问题都是非凸的，所以很难得到模型的全局最优解. 并且根据 Ben-Ayed 和 Blair 等人的研究，双层规划是一个 NP-hard 问题，不存在多项式求解算法. 在实际应用中，为了使计算简便易行，求解双层规划的算法一般都是启发式算法.

4 基于灵敏度分析方法的启发式算法

求解双层规划问题的关键在于找到反应函数 $q(u)$ 的具体形式，显然，这是很难做到的. 不过，可以通过灵敏度分析方法得出多模式运输条件下的铁路客流量对铁路客票价格的导数关系，这样可以利用泰勒展开式对反应函数进行线性的近似，从而简化反应函数以求解双层规划问题，这就是基于灵敏度分析方法的启发式算法(sensitivity analysis based alogrithm, SAB). SAB 算法已经成功地应用在城市交通信号控制的最优设计[8] 以及拥挤条件下的 OD 矩阵估计[9] 等问题上.

灵敏度分析方法主要应用在变分不等式中，通过这种方法，可以求出变分不等式的解对于其中的扰动参数的导数. 假定这个扰动参数为客票价格，并且假定影响客流变化的其它因素如时间、舒适性和安全性等因素均保持不变.

首先，用户均衡配流模型(M) 可以用下面的变分不等式来表示[7]：

$$f(q^{w^*})^{\mathrm{T}}(q^w - q^{w^*}) \geqslant 0, \quad w \in W \tag{8}$$

其中 $q^w \in \{q^w | Q^w = \Lambda q^w\}$，$\Lambda = [\delta_n^w]$ 表示 OD 对与运输方式之间的关联矩阵，如果在 OD 对 w 之间存在运输方式 n，则 $\delta_n^w = 1$，否则为 0. q^{w^*} 表示模型 (M) 的均衡解.

注意在这里的变量是用矢量来表示的，其中

$$f(q^{w^*}) = [f(q_1^{w^*}), f(q_2^{w^*}), \cdots, f(q_N^{w^*})]^{\mathrm{T}}, \quad w \in W$$

$$q^w = [q_1^w, q_2^w, \cdots, q_N^w]^{\mathrm{T}}, w \in W$$

$$q^{w^*} = [q_1^{w^*}, q_2^{w^*}, \cdots, q_N^{w^*}]^{\mathrm{T}}, w \in W$$

下面再来考虑 $f(q^w)$ 中存在客票价格扰动参数 u 的一般情况，即 $f(q^w, u)$，那么上面的变分不等式将变为如下形式：

$$f(q^{w^*}(u), u)^{\mathrm{T}}(q^w - q^{w^*}(u)) \geqslant 0, w \in W \tag{9}$$

其中所有的 $q^w \in \{q^w(u) | Q^w = \Lambda q^w(u)\}$.

假定已知变分不等式(9) 在 $u = u^{(0)}$ 时的解 $q^{w^*}(u^{(0)})$，并且这个解是唯一的. 根据文[7]，此问题在 $u = u^{(0)}$ 时解的必要条件为

$$f(q^{w^*}(u), u) - \mu^w = 0, \ w \in W \tag{10}$$

$$Q^w = \Lambda q^{w^*}(u), \ w \in W \tag{11}$$

其中 μ^w 为模型 (M) 中等式约束 (2b) 的 Lagrangian 乘子向量.

设 $y(u) = [q^w(u), \mu^w(u)]^{\mathrm{T}}$，用 $J_y(u)$ 表示 (10) 和 (11) 对于 $[q^w, \mu^w]$ 的 Jacobian 矩阵，用 $J_u(u)$ 表示 (10) 和 (11) 对于 u 的 Jacobian 矩阵，那么有如下结果[7]

$$\nabla y_n(u) = J_y^{-1}(u)[-J_u(u)] \tag{12}$$

假定 $u_r^{w(0)}$ 为 OD 在 w 之间的铁路客票价格的

初始值,那么,在这个价格条件下,并且假定其它运输方式的票价都保持不变,可以通过求解下层问题得到在 OD 对 w 之间的铁路运输的客流量 $q_r^{w*}(u_r^{w(0)})$. 并且通过灵敏度分析方法得出了多模式运输条件下的铁路客流需求对铁路客票票价的导数关系为 $\partial q_r^w / \partial u_r^w$,那么反应函数可以用公式近似为

$$q_r^w(u_r^w) = q_r^{w*}(u_r^{w(0)}) + \frac{\partial q_r^w}{\partial u_r^w}(u_r^w - u_r^{w(0)}),\quad w \in W \tag{13}$$

将式(13) 代入到上层目标函数中,则上层问题就变成一个普通的非线性优化问题,可以用已有的方法求解. 对于从上层问题求出的最优解(即新的铁路客票的最优价格),再一次求解下层问题,就可以得到新的多模式运输条件下的铁路客流量,重复上面的基本思路,又可以得到一组新的铁路客票价格. 如此重复计算,最后有望收敛于双层规划模型的最优解. 算法步骤如下:

第 1 步　初始化. 设置铁路客票票价的初始值为 $\{u_r^{w(0)} | w \in W\}$,并且置 $i = 0$.

第 2 步　在 $\{u_r^{w(i)} | w \in W\}$ 条件下,求解下层客流分配问题,得到均衡解 $\{q_r^{w(i)} | w \in W\}$.

第 3 步　利用灵敏度分析方法找到多模式运输条件下的铁路客运需求对铁路客票价格的导数,并根据(13) 得出反应函数的线性近似形式.

第 4 步　将反应函数的线性近似代入到上层规划目标函数中,求解上层问题得到一组新的铁路客票价格 $\{y_r^{w(i)} | w \in W\}$.

第 5 步　迭代. 计算 $u_r^{w(i+1)} = u_r^{w(i)} + h^{(i)}(y_r^{w(i)} - u_r^{w(i+1)})$,$w \in W$,其中 $h^{(i)}$ 为迭代步长,可以用一维搜索法得出.

第 6 步　收敛判断. 如果 $|u_r^{w(i+1)} - u_r^{w(i)}| \leqslant \delta (w \in W)$,那么算法停止. 否则令 $i = i + 1$,转到第 2 步. 其中 δ 为迭代精度.

5　数值例子

下面用一个简单的例子来说明双层规划方法及其求解算法在制定合理的铁路客票价格上的应用. 需要提出的是,在例子中所用到的数据及参数值都是事先假定的,这只是为了计算的方便. 在实际应用中,所有参数值都应该用观测数据通过统计方法校正得出. 在这例子中,包括 4 个节点,4 条弧和 4 个 OD 对. 网络结构如图 2 所示:

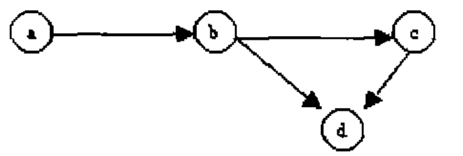

图 2　简单的数值例子

假定在这个多模式运输网络中有三种运输方式,即铁路(1)、公路(2) 和民航(3). 不同交通方式的广义费用函数采用幂函数形式:

$$f(q_n^w) = a q_n^{w^b} - V_n^w,\ n = 1,2,3 \tag{14}$$

其中 a 和 b 为待定参数,在这个算例中假定 $a = 3$,$b = 0.3$;V_n^w 表示不同交通方式的效用,用以下式子来表示:

$$V_n^w = -\alpha_1 t_n^w - \alpha_2 u_n^w + \alpha_3 c_n^w,\ n = 1,2,3 \tag{15}$$

其中 t_n^w 为出行时间因素,u_n^w 表示客票价格因素,c_n^w 为方便、舒适和安全性能等综合因素;$\alpha_i (i = 1,2,3)$ 为待定参数.

假定各种交通方式的出行时间以及方便、舒适性能等综合因素均保持不变,并且总的 OD 需求量已知,分别为

表 1　已知数据

OD 对		a — b	b — c	b — d	c — d
铁路	t_1^w	4.17	5.00	5.83	3.33
	c_1^w	5.00	6.00	7.00	4.00
公路	t_2^w	6.25	7.50	8.75	5.00
	c_2^w	7.5	9.00	10.55	6.00
民航	t_3^w	1.67	2.00	2.33	1.33
	c_3^w	20.00	24.00	28.00	16.00
Q^w		30 000	35 000	25 000	40 000

再假定公路与航空的客票价格已知且固定不变,铁路客运价格的上下限已知,在下面的表 2 中给出:

表 2 已知 OD 量

OD 对		a — b	b — c	b — d	c — d
铁路	$u_1^{w(\min)}$	75.00	90.00	105.00	60.00
	$u_1^{w(\max)}$	500.00	600.00	700.00	400.00
公路	u_2^w	125.00	150.00	175.00	100.00
民航	u_3^w	500.00	600.00	700.00	400.00

所用到的参数值由表 3 给出：

表 3 参数值

参 数	α_1	α_2	α_3	δ
取 值	3.0	0.2	2.0	0.01

选择不同的初始铁路客票价格，计算结果见表 4，表 5，表 6.

表 4 结果 1

OD 对	a — b	b — c	b — d	c — d
铁路客票初始值	143.75	172.50	201.25	115.00
导数 $\partial q_1^w/\partial u_1^w$	− 98.46	− 103.73	− 81.96	− 120.42
最优铁路客票价格	147.86	177.44	207.01	118.29
铁路客流量	14 556.94	16 983.10	12 130.78	19 409.26
铁路客运收入 F	9 972 954.560 4			

表 5 结果 2

OD 对	a — b	b — c	b — d	c — d
铁路客票初始值	191.67	230.00	268.33	153.33
导数 $\partial q_1^w/\partial u_1^w$	− 91.75	− 100.37	− 75.72	− 115.05
最优铁路客票价格	145.97	175.17	204.36	116.78
铁路客流量	14 755.40	17 284.23	12 296.17	19 673.86
铁路客运收入 F	9 991 947.983 9			

表 6 结果 3

OD 对	a — b	b — c	b — d	c — d
铁路客票初始值	287.50	345.00	402.50	230.00
导数 $\partial q_1^w/\partial u_1^w$	− 55.60	− 52.51	− 20.82	− 83.62
最优铁路客票价格	147.83	177.39	206.96	118.26
铁路客流量	14 560.54	16 987.30	12 133.78	19 414.05
铁路客运收入 F	9 972 951.737 2			

从以上结果可以看出，不同的初始铁路客票价格所得到的最优解是非常接近的.这表明：尽管双层规划一般是非凸的，利用启发式的基于灵敏度分析算法在理论上很难得到其全局最优解，不过将这种方法应用在合理制定铁路客票价格问题上是可行的.

6 结论

对于铁路客票价格的制定问题，传统的研究方法一般都是定性的，或者采用简单的统计推断方法. 并没有考虑交通运输市场中的不同运输方式之间的竞争，也很少考虑出行者的选择行为，这显然是不合理的. 本文用双层规划方法来研究铁路客票价格的制定问题，充分考虑了铁路客运部门和出行者两方面的利益，以及铁路客运价格对铁路需求的影响. 并提出了求解双层规划模型的基于灵敏度分析的启发式算法，通过一个简单的数值例子可以看出，本文所提出的模型及算法是可行的.

需要指出的是，本文的研究方法还有待今后在实际应用中加以验证. 另外，本文没有考虑铁路运输方式中不同编组的价格制定问题，关于这方面的研究，将另文发表.

参考文献:

[1] Bard J F. An algorithm for solving the general bi-level programming problem[J]. Mathematics of Operations Research,1983,8:260-272

[2] Ferrari P. Road pricing and network equilibrium[J]. Transportation Research,1995,29(3):357-372

[3] Friesz T L, Harker P T. Multicriteria spatial price equilibrium network design:theory and computational results[J]. Transportation Research,1983,17B(5):411-426

[4] Gao Z Y, Si B F. An equilibrium assignment model for mixed network[C]. Proceedings of ICTTS'98. The American Society of Civil Engineers,1998, 391-398

[5] Norbert O. Urban travel demand modeling:from individual choice to general equilibrium[M]. A Wiley-Interscience Publication,John Wiley & Sons,Inc,1994. 112-203

[6] Sheffi Y. Urban transportation networks:equilibrium analysis with matematical programming methods[M]. Prentice-Hall,Englewood Cliffs,New Jersey,1985. 56-113

[7] Tobin R L,Fiacco A V. Sensitivity analysis for variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Application,1986,48(1):191-204

[8] Yang H,Yagar. Traffic assignment and traffic control in general freeway-arterial corridor systems[J]. Transportation Research,1994,28:463-486

[9] Yang H. Sensitivity analysis for queuing equilibrium network flow and its application to traffic control[J]. Math. Comp. Modeling,1995,22:223-235

[10] Yang H,Lam W H K. Optimal road tolls under conditions of queuing and congestion[J]. Transportation Research, 1996,30(5):319-331

[11] Yang H. Sensitivity analysis for the elastic-demand network equilibrium problem with applications[J]. Transportation Research,1997,31(1):55-70

[12] Yang H,Michael G H B. Traffic restraint, road pricing and network equilibrium[J]. Transportation Research,1997, 31(4):303-314

[13] 四兵锋,高自友. 铁路客票价格与客流量之间的灵敏度分析[J]. 铁道学报,1999,(4):13-16

[14] 四兵锋,高自友. 城市间公路客运的客票票价与其客流量之间的灵敏度分析[J]. 中国公路学报,2000,(2):91-95

[15] 高自友,宋一凡,四兵锋. 城市交通连续平衡网络设计理论与方法[M]. 北京:中国铁道出版社,2000,49-106

Optimal model and solution algorithm for railway passenger-ticket pricing

SI Bing-feng, GAO Zi-you

Northern Jiaotong University,Beijing 100044, China

Abstract: In this paper,the benefits of passengers and railway departments are both considered and a bi-level programming approach is presented in order to seek the optimal railway passenger-ticket price under the competition between different inter-city traffic modes. The lower-level problem represents an equilibrium model that describes passengers'mode-choice behavior under the condition of multimodal transportation. The upper-level problem is to determine railway passenger-ticket price to maximize the revenue of railway departments while considering passengers'mode-choice behavior. A heuristic algorithm for the bi-level railway passenger-ticket pricing problem is also proposed. Finally the applications of the model and its algorithm are illustrated with a numerical example.

Key words: bi-level programming; sensitivity analysis; equilibrium model