

# 加权投票制的权力分析及测度模型<sup>1</sup>

胡 培, 黄深泽, 郭耀煌

(西南交通大学经济管理学院, 成都 610031)

**摘要:**在二元选择下, 测算加权投票制的表决权的的大小有两种广泛被接受的方法, 即 Shapley-Shubik 指数法与 Banzhaf 指数法, 但它们都不能解决多备选方案或多候选人时决策个体的权力问题. 通过建立计算不同群体偏好序差异的测度模型, 以及将其转换为无向图上最短路计算, 从而提出了无论被选方案或候选人是两个还是两个以上的加权投票制下决策个体权力的计算方法, 并进行了实例分析.

**关键词:**权力; 偏好序; 加权投票制

**中图分类号:** C931; F224

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1007-9807(2001)06-0066-05

## 0 引言

权力或者表决权是指群体决策中决策个体通过投票能够影响选举结果的能力. 权力分析是测度每一个决策个体(投票人)对群决策结果的影响力和影响程度. 加权投票的表决权的研究是权力分析最感兴趣的部分, 是群决策的热点问题之一<sup>[1,2]</sup>. 这里探讨的是加权投票制下的权力分析.

## 1 问题提出

在加权投票制的条件下, 决策个体的权力的大小取决于他的投票对选举结果的影响. 若他对某一个备选方案投赞成票使该方案获得通过的可能性越大, 或因他对这一方案投反对票使得该方案不被通过的可能性越大, 则他的权力就越大; 若选举结果总是取决于他的投票, 则他拥有绝对的权力, 他就是独裁者; 反之, 如果在任何表决中无论他怎样投票都不会影响选举结果, 则他应是毫无权力的, 将他称之为“哑巴”<sup>[3]</sup>. 权力的大小, 是通过权力指标或称权力指数来衡量的<sup>[4-6]</sup>. 在特定的投票情况下, 决策个体有不同的加权选票,

影响表决结果的决策个体的表决权或能力不是简单地与其所拥有的加权选票有关, 也就是说权力大小不与决策个体的加权值成比例, 这个结果已为许多相关的研究所证实<sup>[1,4]</sup>. 例如在股份制公司中, 在股东大会上作决策时, 每个股东的加权数与他拥有的股票数成正比例, 在总股本不变的情况下, 某一个股东拥有公司的股票增加时, 他参加决策时的加权数也增加, 到一定程度他在股东大会上的权力也就增大, 但当他拥有该公司50%以上比如60%的股票时, 他实际上已经控制了该公司, 而不是拥有60%的权力. 此时即使有另外一个股东, 他拥有该公司其余40%的股票, 但其权力却是零. 这也就说明加权数与权力之间有某种正相关关系, 却没有线性关系.

对于二元选择, 即投票在两种观点中进行, 且以多数票决定胜负的情况下, 表决权的大小有两种广泛接受的方法, 即 Shapley-Shubik 指数法<sup>[4]</sup>和 Banzhaf 指数法<sup>[5]</sup>, 计算方法如下:

设  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  为代表权数分别为  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  的决策个体组成的集合, 欲使一个备选方案或一个候选人通过选举, 必须获得最小数额为  $q$  的选票, 这样, 一个加权投票系统可描

<sup>1</sup> 收稿日期: 2000-07-20; 修订日期: 2001-07-09.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79870034).

作者简介: 胡 培(1957-), 男, 博士, 教授, 博士生导师.

述为  $[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$ ,  $q$  表明必须代表大多数, 当然这个  $q$  值在不同的场合可作不同的定义, 如超过  $1/2$ , 或超过  $2/3$ , 等等.

对于决策个体  $i$  的表决权, Shapley-Shubik 权力指标是这样定义的: 设决策个体按照某种排列先后投票, 这时投赞成票的决策个体不断增加, 若某个决策个体恰好排在他投赞成票之后就可以通过议案的位置, 则称该决策个体是这种排列的中轴. 在所有可能的排列中, 决策个体  $i$  成为中轴的概率大小就表明他权力的大小.

对于决策个体  $i$  的表决权, Banzhaf 权力指标定义与 Shapley-Shubik 权力指标定义的最大不同在于它将排列改为组合, 其定义为: 在投赞成票 (或投反对票) 的决策个体的组合中, 若某人改变投票将改变原有结果, 那么称此决策个体处于摆动地位, 或称他为摆动者. 在所有可能的组合中决策个体  $i$  成为摆动者的次数记为  $a_i$ , 则 Banzhaf 权力指标  $\beta_i$  为

$$\beta_i = a_i / \sum_{i=1}^n a_i. \quad (1)$$

尽管这两种测算法有某些不同, 但有两点是相同的, 一是都在二元选择下衡量决策个体的表决权, 二是知道一个备选方案或一个候选人得到通过, 必须获得的最小数额选票  $q$ . 在简单多数投票制中,  $q = \left[ \frac{w}{2} \right] + 1$ , 其中  $w = \sum_{i=1}^n w_i$ ,  $\left[ \frac{w}{2} \right]$  表示的是  $\frac{w}{2}$  的整数部分. 假若  $q$  值未知, Shapley-Shubik 权力指标中的中轴, Banzhaf 权力指标中的摆动者都是很难确定的.

特别在多个备选方案或多个候选人中进行选择, 以得票多少决定胜负的投票决策中, 无法知道某一备选方案或某一候选人最少获得多少票  $q$  才能通过, 就难以用 Shapley-Shubik 权力指标与 Banzhaf 权力指标来衡量决策个体的权力.

多个备选方案下的简单多数规则, 也是目前世界上最为流行的投票规则, 一般为了节约选举成本, 在二元选择中以超过  $1/2$  为多数, 多个备选方案则以得票最多为胜者<sup>[10-12]</sup>. 并且可能仅通过一次投票, 决策个体只投一个备选方案或一个候选人的票, 来决定备选方案或候选人的优劣次序. 对于这一类普遍适用的选举方法是难以用 Shapley-Shubik 权力指标与 Banzhaf 权力指标来

衡量决策个体的权力大小的. 为了很好测算无论是二元选择, 还是多候选人或多方案中决策个体只投一个候选人或一个备选方案, 以票数多寡决定优劣或序位的加权决策个体的权力, 就应重新定义决策个体的权力指标, 并度量其权力的大小.

## 2 不同群体偏好序之间的“距离”

在加权投票选举模型中, 尽管每个决策个体只投一个候选人的票, 但总的加权投票数会在  $k$  个候选人中分布, 使  $k$  个候选人按得票的多少顺序排出优劣. 设候选人的集合为  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ . 用  $p_{j_1} * p_{j_2} * \dots * p_{j_k}$  表示  $k$  个候选人按得票的多寡排成的序, 其中  $p_{j_i} \in P$ ,  $(j_1, j_2, \dots, j_k)$  是  $(1, 2, \dots, k)$  的某种排列;  $*$  或是“ $>$ ” (表示一个严格次序), 或是“ $=$ ” (表示相等). 序  $\rho$  为: 对应于  $k$  个候选人,  $n$  个权数分别为  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  的决策个体  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  的群体偏好序.

设  $\phi(k)$  表示  $k$  个候选人的群体偏好或社会偏好次序的总和, 对  $\phi(k)$  可理解为  $k$  个目标整数规划成有相同投票数的  $k$  个单元的方法数量, 这类类似于偏好的排列组合数. 例如, 这组数的第  $k$  个元素为

$$\phi(k) = \sum_{i=1}^k C_k^i \phi(k-i) \quad (2)$$

这也是投票后  $k$  个人数的所有排序数. 现在考察拥有权重为  $w_i$  的决策个体  $i$  的权力大小及与群体偏好序的关系. 设除  $i$  之外的  $n-1$  个决策个体的群体偏好序为  $\rho: p_{j_1} * p_{j_2} * \dots * p_{j_{n-1}}$ . 这时,  $n-1$  个人的加权投票数  $w' = w - w_i$  ( $w = \sum_{i=1}^n w_i$ ) 就在  $k$  个候选人中分配,  $p_{j_1}$  的得票最多, 以下次之,  $p_{j_{n-1}}$  的得票最少.

现在再增加决策个体  $i$ ,  $i$  把选票投给  $p_{j_i}$ , 此时  $n$  个决策个体的群体偏好序设为  $\rho'$ . 由于决定偏好序  $\rho$  的是按各候选人的票多寡排成的序, 决策个体  $i$  投票于  $p_{j_i}$  后, 在序  $\rho'$  中,  $p_{j_i}$  跳过它前面的  $p_{j_{i-1}}, p_{j_{i-2}}$  等的次序愈多, 决策个体  $i$  的权力就愈大. 为了明确决策个体  $i$  投票前与投票后群体偏好的差异, 需要构造群体偏好序的距离. 这里采用一种离散的图论方法来定义距离. 同时, 不失一般性, 设最后加入投票的决策个体  $i$  投票时, 总把自

己的选票投给排在最后的候选人  $p_i$ , 通过计算  $p_i$  在位序上的变化来测定决策个体  $i$  的权力.

设  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  为一组次序权重数, 用它表示在群体偏好序中排在不同位序的等级差异, 如  $p_1$  的权重为  $c_1, p_2$  的权重为  $c_2$  等等.  $p_1 * p_2 * \dots * p_k$  表示一组依得票多少排列的群体偏好序, 为求简便, 记为  $p_1 * p_2 * \dots * p_k$ , 其中  $*$  或是“>”(表示一个严格次序), 或是“=”(表示相等). 称两个序  $\rho$  与  $\rho'$  相邻, 当且仅当  $\rho$  与  $\rho'$  有以下次序

$$\begin{aligned} \rho_1 * \dots * \rho_m = \dots = \rho_{i+m-1} > \rho_{i+n} = \dots = \\ & \rho_{i+n-n-1} > \dots \\ \rho'_1 * \dots * \rho'_m = \dots = \rho'_{i+m-1} = \rho_{i+n} = \dots = \\ & \rho_{i+n-n-1} > \dots \end{aligned}$$

对于相邻的两个序, 定义距离为

$$d(\rho, \rho') = d(\rho', \rho) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{m-1} c_{i-m+1+i} \quad (3)$$

设  $G$  是一个以  $k$  个有群体偏好序为顶点的无向图, 每一个顶点代表一种群体偏好序. 当且仅当对应次序是相邻时, 两个顶点才有边连接, 而边的长度就是两个序的距离  $d(\rho, \rho')$ . 这样, 任意两个序  $\mu$  和  $\rho$  的距离就是  $\mu$  和  $\rho$  所代表的两个顶点间的最短路径. 从上可知, 距离的长度仅依赖于边的长度, 而边的长度在于对应相邻概念的定义.

次序权重的选取, 这里与 Borda 数法结合使用. Borda 数法被称为记分法, 在  $k$  个候选人(或方案)竞选中, 每个决策个体按对候选人排的次序给出从高到低的分数. 按排序  $\{1, 2, \dots, k\}$  给出权数  $\{k-1, k-2, \dots, 1, 0\}$ , 这里赋予次序权重  $c_i = k-i (i=1, 2, \dots, k)$ . 这种赋权法使得在通过一组  $(p_i, p_{i-1})$  的相邻中能从一种序变为另一种序的两个顶点间的距离恰好是  $c_i = k-i$ . 那么设没有决策个体  $i$  的群体偏好序为  $\rho$ , 决策个体  $i$  加入并投票  $p_i$  后的群体偏好序为  $\rho'$ , 得票最少者  $p_i$  由  $\rho$  中的位置变为  $\rho'$  中的位置. 置换的序号愈多, 即  $\rho$  与  $\rho'$  的距离愈大, 决策个体  $i$  的权力就愈大. 这样点  $\rho$  到点  $\rho'$  的距离, 就反映了该种转变的难易程度. 即距离越长, 则从序  $\rho$  变到序  $\rho'$  的难度愈大, 能促成这种变化的决策个体的权力就越大.

对于前面所构造的距离和偏好权重, 通过下面的例子演算如下:

设  $k=3$ , 次序权数  $c_1 = k-1 = 2, c_2 = k-$

$2 = 1, c_3 = k-3 = 0$ , 次序权重规定了排序分别为第1、第2、第3的一种等级.  $p_1, p_2$  和  $p_3$  代表3个候选人.  $k=3$  时的情形见图1, 其中, 边线上的数字为边的权重, 也就是相邻顶点的距离.

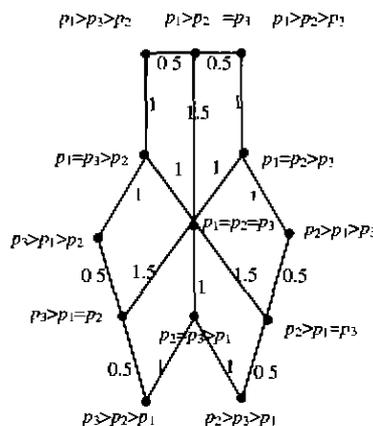


图1 3个候选人的情形

图1中的边长都是根据式(3)计算出来的. 例如, 从序  $p_1 = p_2 = p_3$  到序  $p_2 > p_1 = p_3$  的距离为

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{m-1} c_{i+m-1+i} &= \frac{1}{2} (c_1 + c_2) = \\ &= \frac{1}{2} (2 + 1) = 1.5 \end{aligned}$$

从序  $p_1 > p_2 > p_3$  到序  $p_1 > p_3 = p_2$  的距离为:  $\frac{1}{2} c_2 = 0.5$  等. 同理, 可计算出其它边的权重数. 从图1中还可计算出任意两个顶点的最短距离, 例如从  $p_1 > p_3 > p_2$  到  $p_2 > p_1 > p_3$  的最短路径为4. 它反映了从序  $p_1 > p_3 > p_2$  转变为序  $p_2 > p_1 > p_3$  的难度系数, 序的差异越大, 转换的难度越大, 偏好差异也越大.

### 3 表决权的确定

表决权是一种相对概念, 既相对于其它决策个体权力大小, 也相对于其它决策个体如何投票. 为此从以下角度来定义决策个体  $i$  的权力.

设  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  表示候选人集合,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  表示决策个体组成的集合,  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  为一组决策个体的加权数, 决策个体按拥有的权数一次只投一个候选人的票,  $P(k)$  是对  $k$  个候选人而言所有可能的群体偏好的集合.

设  $S$  表示不包含决策个体  $i$  的其它决策个体

组成的群体,  $\rho(S) \in P(k)$  为群体  $S$  认同的群体偏好序. 令  $\rho(S) + \rho(i)$  表示在群体  $S$  认同的群体偏好序  $\rho(S)$  的基础上, 加入决策个体  $i$ , 并且决策个体  $i$  将自己拥有的  $w_i$  权数选票投给  $\rho(S)$  中排序最后一个候选人时, 最有可能形成的群体偏好序. 则给定  $\rho(S)$ ,  $i$  的最初表决权为

$$d(\rho(S), \rho(S) + \rho(i)) \quad (4)$$

让  $\rho(S)$  遍历群体  $S$  能认同的群体偏好  $P(k)$ , 就得到了  $i$  的最终表决权

$$\alpha_i = \sum_{\rho(S) \in P(k)} d(\rho(S), \rho(S) + \rho(i)) \quad (5)$$

其相对表决权为

$$\beta_i = \alpha_i / \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (6)$$

其中  $\rho(S) + \rho(i)$  依然用 Borda 数法加以计算.

设群体  $S$  所认同的偏好序为  $p_1 * p_2 * \dots * p_k$ . 与前面的方法一致对  $p_1, p_2, \dots, p_k$  打分. 当偏好序为  $p_1 > p_2 > \dots > p_k$ , 就给  $p_1$  至  $p_k$  分别打分为  $k-1, k-2, \dots, 1, 0$ ; 当偏好序为  $p_1 > p_2 > \dots > p_i = p_{i-1} = \dots = p_{i+1} > \dots > p_k$  那么  $p_i$  至  $p_{i-1}$  的分值就相应改变为同一个数  $(k-i) - \frac{j}{2}$ , 其余  $p_t (t=1, 2, \dots, k; t \neq i, i+1, i+2, \dots, i+j)$  的分值不变. 这样不管  $S$  的偏好序如何, 每个候选人  $p_j$  都有一个等级差异分值  $B(p_j) (j=1, 2, \dots, k)$ . 考虑到  $S$  作为群体拥有的加权数为  $w' = \sum_{i=1}^n w_i - w_i$ , 那么每个候选人  $p_j (j=1, 2, \dots, k)$  的最后分值为  $B(p_j) \cdot w' (j=1, 2, \dots, k)$ . 又由于  $i$  加入投票后, 若他将拥有的加权数为  $w_i$  的全部选票都投给  $\rho(S)$  中最小者  $p_i$ , 那么  $p_i$  的最后得分可增加

$$[1 + 2 + \dots + (k-1)]w_i = \frac{1}{2}k(k-1)w_i$$

现将  $B(p_i) \cdot w' + \frac{1}{2}k(k-1)w_i$  与  $B(p_j) \cdot w' (j=1, 2, \dots, k-1)$  做比较, 若

$B(p_j) \cdot w' > B(p_i) \cdot w' + \frac{1}{2}k(k-1)w_i > B(p_{j+1}) \cdot w'$ , 则  $i$  加入后最可能出现的群体偏好序为

$p_1 * p_2 * \dots * p_i > p_i > p_{i+1} * \dots * p_{k-1}$ , 其中  $*$  表示原群体  $S$  决定的偏好关系.

若  $B(p_j) \cdot w' = B(p_i) \cdot w' + \frac{1}{2}k(k-1)w_i$ , 则  $i$  加入后的最可能出现的群体偏好序便为

$$p_1 * p_2 * \dots * p_i = p_i * p_{i+1} * \dots * p_{k-1}$$

其中  $*$  表示群体  $S$  决定的偏好关系. 这样就计算出了  $\rho(S) + \rho(i)$ , 决策个体权力大小也就确定了.

#### 4 决策个体权力的计算示例

设决策个体的集合  $N = \{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}\}$ , 方案集为  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ , 给甲、乙、丙 3 个决策个体赋予权数分别为 1, 2, 3. 设每人只认同一个方案, 现决定甲、乙、丙的表决权.

先看丙的表决权. 因  $p_1 > p_2 > p_3$  是甲、乙能认同的群体偏好, 甲、乙所拥有的总加权数为 3, 按排序  $p_1, p_2, p_3$  的等级差异分为: 2, 1, 0. 考虑到加权数 3,  $p_1, p_2, p_3$  的得分为: 6, 3, 0. 现加入丙后, 由于丙拥有的加权数为 3, 丙投给  $p_2$  后,  $p_2$  的分数增加了  $(2+1) \times 3 = 9$ . 那么  $p_1, p_2, p_3$  的分数即变为 6, 3, 9. 按得分重新排序便为  $p_3 > p_1 > p_2$ , 即甲、乙认同  $p_1 > p_1 > p_2$  时, 丙将选票全部投给原来得票最少的  $p_2$  后, 最有可能出现的新的群体偏好序便为  $p_2 > p_1 > p_3$ , 则丙的权力大小为

$$d(p_1 > p_1 > p_2, p_2 > p_1 > p_3) = 3 \text{ (见图 1).}$$

又由于  $p_1 > p_2 = p_3$  也是甲、乙能认同的群体偏好,  $p_1, p_2, p_3$  的等级分为 2, (0.5, 0.5). 考虑到甲和乙拥有的权重 3,  $p_1, p_2, p_3$  的最后得分为: 6, 1.5, 1.5. 丙加入投票给最小的  $p_2$  或  $p_3$ , 但只能投给一个, 投给  $p_2$  则  $p_3$  的得分增加  $(2+1) \times 3 = 9$ , 丙加入投票后方案按得分多寡排序为  $p_1 > p_1 > p_2$ , 即甲、乙认同  $p_1 > p_2 = p_3$  时, 丙的权力为

$$d(p_1 > p_2 = p_3, p_2 > p_1 > p_3) = 2.5$$

以上给出了对一特定序而言, 决策个体权力的计算方法. 若要计算决策个体综合的相对权力, 让甲、乙的群体偏好序取遍甲、乙所能认同群体偏好代表的所有点, 并且把这些距离加起来, 就得到  $\alpha_{\text{丙}} = 25.5$ .

同理,  $\alpha_{\text{甲}} = 1.5$ ;  $\alpha_{\text{乙}} = 10.5$ . 从而可计算出甲、乙、丙的综合相对权力为 (0.04, 0.28, 0.68).

## 参 考 文 献:

- [1] Saari D G. Geometry of voting[M]. Berlin: Springer, 1994
- [2] Philip D S. Power index in political and related models[M]. New York: Springer-Verlag, 1983
- [3] Shapley L S, Shubik M. A method for evaluation the distribution of power in a committee system[J]. Amer. Pol. Sci. Rev., New York, 1954, 48: 787-792
- [4] Banzhaf J F. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis[J]. Rutgers Law Rev., 1965, 19: 317-343
- [5] Oslen M E. Power in societies[M]. New York: The Macmillan Company, 1970
- [6] Saaty T, Vargas L. Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process[J]. European Journal of Operational Research, 1987, 32: 107-117
- [7] Pattanaik P K, Peleg B. Distribution of power under stochastic social choice rules. Econometrica, 1986, 54: 909-921
- [8] Nitzans, Paroush J. The characterization of decisive weighted majority rules[J]. Econ. Lett., 1981, 7: 119-124
- [9] 扬雷, 席酉民. 群体决策的权力与权力指数[J]. 系统工程, 1996, 14(2): 10-14
- [10] 方卫国, 周泓. 逼近群体理想点的多目标群体决策算法[J]. 管理科学学报, 1998, 1(4): 34-38
- [11] Straffin P D. Power index in politics[A], Lucas W F. Political and related model[C]. New York: Springer-Verlag, 1983
- [12] 胡培, 侯立文. Rank reversal and independence of irrelevant alternative[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1997, 10(2): 157-163
- [13] 郑应文. 序列群评价法则的一些研究[J]. 管理科学学报, 1998, 1(4): 39-43

## Analysis and measuring model of voting individuals' power on weighted majority rules

HU Pei, HUANG Shen-ze, GUO Yao-huang

College of Economics & Business Administration, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China

**Abstract:** Under the weighted majority rule, when voting individuals make a decision to choice one of two alternatives (or candidates), the individuals' power can be measured by two methods which are Shapley-Shubik's power index and Banzhaf's power index. But these two methods can't measure the individuals' power when the individuals make decision to choice one of alternatives (or candidates) between three or more alternatives (or candidates). But by establishing a measuring model to calculate the difference of the two group preferences and transforming this measure into the calculation of the shortest way on the nondirective graph, a method to measure the voting individuals' power under the weighted majority rule is proposed whether the individuals make a decision to choice one of two alternatives (or candidates) or to choice one of alternatives (or candidates) between three or more alternatives (or candidates). And then an analysis example is given.

**Key words:** power; preference rank; weighted vote rule