一类不确定型多属性决策问题的排序方法①

徐泽水, 孙在东
(东南大学经济管理学院, 南京 210096)

摘要: 研究了属性权重信息完全未知且属性值以区间数形式给出的不确定型多属性决策问题, 给出了区间数决策矩阵的规范化公式. 基于区间数相离度, 给出了求解属性权重的一个简洁公式, 并提出了一种基于可能度的决策方案排序方法. 最后通过实例说明了该法的实用性和有效性.

关键词: 多属性决策; 相离度; 可能度
中图分类号: C934　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2002)03-0035-05

0 引　言

多属性决策(见文[1-8]等)是决策理论研究的重要内容, 现已被广泛应用于投资决策、项目评估、方案选优、工厂选址、经济效益综合评价等诸多领域. 由于客观事物的复杂性和不确定性以及人类思维的模糊性, 人们往往不能明确地给出属性的权重信息, 而且所给出的属性值也不是以具体数值来表达, 而是以区间数的形式来表示. 因此, 对于这类问题的研究有着重要的理论意义和实际应用背景. 有关这方面的研究还很不成熟, 如: 文[9-12]研究了属性权重及属性值均为区间数形式的情形. 但是, 针对属性权重信息完全未知、且属性值以区间数形式给出的不确定型多属性决策问题的研究, 目前尚未见报道, 为此, 本文首先给出了区间数决策矩阵的规范化公式, 然后, 基于区间数相离度概念, 给出了求解属性权重的一个简洁公式, 并提出了一种基于可能度的决策方案排序方法.

1 预备知识

设不确定型多属性决策问题的方案集为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 属性集为 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$, 属性的权重向量记为 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T$, 并满足单位化约束条件:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^2 = 1, w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{1}$$

对于方案 $x_j \in X$, 按第 i 个属性 u_i 进行测度, 得到 x_j 关于 u_i 的属性值为区间数 $\tilde{a}_{ij}$ (这里 $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$), 从而构成决策矩阵 $A = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$.

最常见的属性类型有效益型属性、成本型属性. 效益型属性是指属性值越大越好的属性; 成本型属性是指属性值越小越好的属性. 设 $I_i (i = 1, 2)$ 分别表示效益型、成本型的下标集, 且令 $M = \{1, 2, \cdots, m\}, N = \{1, 2, \cdots, n\}$.

为了消除不同物理量纲对决策结果的影响, 用下列规范决策矩阵的计算公式, 即将决策矩阵 A 转化为规范化矩阵 $R = (\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$, 其中, $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^U]$, 且

$$\tilde{r}_{ij} = \tilde{a}_{ij} / \| \tilde{a}_i \|, i \in I_1, j \in N \tag{2}$$

$$\tilde{r}_{ij} = (1/\tilde{a}_{ij}) / (\| 1/\tilde{a}_i \|), i \in I_2, j \in N \tag{3}$$

$$\| \tilde{a}_i \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^2}, \quad \| 1/\tilde{a}_i \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (1/\tilde{a}_{ij})^2}$$

根据区间数的运算法则, 把式(2), (3) 写为

① 收稿日期: 2000-12-29; 修订日期: 2002-03-28
基金项目: 国防科技预研基金(00J6.4.2.JB3804); 东南大学-南瑞继保公司学位论文基金资助项目.
作者简介: 徐泽水(1968-), 男, 安徽南陵人, 副教授, 博士生.

$$\begin{cases} r_{ij}^{L} = a_{ij}^{L} \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}^{U})^2} \\ r_{ij}^{U} = a_{ij}^{U} \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}^{L})^2} \end{cases} \quad i \in I_1, j \in N \tag{4}$$

$$\begin{cases} r_{ij}^{L} = (1/a_{ij}^{U}) \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (1/a_{ij}^{L})^2} \\ r_{ij}^{U} = (1/a_{ij}^{L}) \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (1/a_{ij}^{U})^2} \end{cases} \quad i \in I_2, j \in N \tag{5}$$

为了能衡量两个区间数相似的程度, 且能对方案进行排序, 先给出区间数之间相离度的概念和区间数之间两两比较的可能度公式:

定义 1 设区间数 $\tilde{a} = [a^L, a^U]$, $\tilde{b} = [b^L, b^U]$, 令范数 $\|\tilde{a} - \tilde{b}\| = \sqrt{(b^L - a^L)^2 + (b^U - a^U)^2}$, 称 $D(\tilde{a}, \tilde{b}) = \|\tilde{a} - \tilde{b}\|$ 为区间数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 相离度

显然 $D(\tilde{a}, \tilde{b})$ 越大, 则区间数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 相离的程度越大 特别地, 当 $D(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0$ 时, 有 $\tilde{a} = \tilde{b}$, 即区间数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 相等

定义 2 当 $\tilde{a}, \tilde{b}$ 均为实数时, 则称

$$\mathbf{P}(\tilde{a} > \tilde{b}) = \begin{cases} 1, \text{当 } \tilde{a} > \tilde{b} \text{ 时} \\ 0, \text{当 } \tilde{a} \le \tilde{b} \text{ 时} \end{cases} \tag{6}$$

为 $\tilde{a} > \tilde{b}$ 的可能度

定义 3[12, 13] 当 $\tilde{a}, \tilde{b}$, 同时为区间数或者有一个为区间数时, 设 $\tilde{a} = [a^L, a^U]$, $\tilde{b} = [b^L, b^U]$, 且记 $L(\tilde{a}) = a^U - a^L$, $L(\tilde{b}) = b^U - b^L$, 则称

$$\mathrm{P}(\tilde{a} \ge \tilde{b}) = \frac{\max\{0, L(\tilde{a}) + L(\tilde{b}) - \max(b^U - a^L, 0)\}}{L(\tilde{a}) + L(\tilde{b})} \tag{7}$$

为 $a \ge b$ 的可能度 在此定义下, $\mathbf{P}(\tilde{a} \ge \tilde{b})$ 具有下述性质:

1) 若 $\mathbf{P}(\tilde{a} \ge \tilde{b}) = \mathbf{P}(\tilde{b} \ge \tilde{a})$, 则 $\mathbf{P}(\tilde{a} \ge \tilde{b}) = \mathbf{P}(\tilde{b} \ge \tilde{a}) = 1/2$.

2) $\mathbf{P}(\tilde{a} \ge \tilde{b}) + \mathbf{P}(\tilde{b} \ge \tilde{a}) = 1$.

3) 若 $a^U \le b^L$, 则 $\mathbf{P}(\tilde{a} \ge \tilde{b}) = 0$; 若 $a^L \ge b^U$, 则 $\mathbf{P}(\tilde{a} \ge \tilde{b}) = 1$.

4) 对于三个区间数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, 若 $\tilde{a} \ge \tilde{b}$, 则 $\mathbf{P}(\tilde{a} \ge \tilde{c}) \ge \mathbf{P}(\tilde{b} \ge \tilde{c})$.

根据定义 3, 可以得到两个区间数之间的偏序关系, 由性质(1)～(4) 可以看出, 区间数比较实际上是实数比较的延伸和拓展

2 主要结果

多属性决策, 实质上是对方案综合属性值的排序比较 由规范化矩阵 $\mathrm{R} = (\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$ 及属性权重向量 $\mathrm{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 可知: 方案 x_j 的综合属性值与属性权重的关系为

$$\tilde{z}_j = \sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_{ij} w_i, \quad j \in N \tag{8}$$

其中 w_i 是第 i 个属性 u_i 的权重 当属性权重 $w_i (i \in M)$ 及属性值都是确定的值时, 由各方案综合属性值的大小可以确定方案的优劣; 否则, 就不能直接由式(8) 确定综合属性值 本文将研究属性权重完全未知且属性值为区间数的情形

一般地, 若所有决策方案在属性 μ_i 下的属性值差异越小, 则说明该属性对方案决策与排序所起的作用越小; 反之, 如果属性 μ_i 能使所有决策方案的属性值有较大偏差, 则说明其对方案决策与排序将起重要作用 因此, 从对决策方案进行排序的角度考虑, 方案属性值偏差越大的属性(无论其本身的重要性程度如何) 应该赋予越大的排序权重 特别地, 若所有决策方案在属性 μ_i 下的属性值无差异, 则属性 μ_i 对方案排序将不起作用, 可令其权重为零[14].

考虑到规范化决策矩阵 $\mathrm{R} = (\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$ 中的元素是以区间数形式给出的, 难以直接进行比较, 根据上面的分析, 利用前一节中所定义的区间数比较的相离度概念 令 $d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik}) = \|\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_{ik}\|$ 表示规范化决策矩阵 $\mathrm{R} = (\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$ 中元素 $\tilde{r}_{ij}$ 与 $\tilde{r}_{ik}$ 之间的相离度, 其中 $\|\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_{ik}\| = \sqrt{(r_{ij}^L - r_{ik}^L)^2 + (r_{ij}^U - r_{ik}^U)^2}$. 对于属性 μ_i, 若决策方案 x_j 与其它所有决策方案的偏差用 $D_{ij}(w)$ 表示, 则可定义

$$D_{ij}(w) = \sum_{k=1}^{n} \|\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_{ik}\| w_i = \sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik}) w_i, \; i \in M, \; j \in N \tag{9}$$

且令

$$D_i(w) = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}(w) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik}) w_i, \quad i \in M \tag{10}$$

则对属性 μ_i 而言, $D_i(w)$ 表示所有决策方案与其

它决策方案的总偏差 权重向量w 的选择应使所有属性对所有决策方案的总偏差最大 为此, 构造偏差函数

$$\max D(w) = \sum_{i=1}^{m} D_i(w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik}) w_i \tag{11}$$

因而, 求解权重向量w 等价于求解如下单目标最优化问题

$$(\mathrm{LP})\quad \max D(w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik}) w_i \tag{12}$$

$$\mathrm{s\ t}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} w_i^2 = 1\\ w_i \geq 0,\ i \in M\end{cases} \tag{13}$$

解此模型, 易知

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})\right)^2}},\ i \in M \tag{14}$$

对上述权重向量作归一化处理, 可得

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{ik})},\ i \in M \tag{15}$$

公式(15) 的特点是: 运用区间数相离度把所有已知的客观决策信息统一于一个简洁的算式, 易于计算机或计算器上实现

在求出属性的最优权重向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T$ 之后, 还需通过式(8) 算出各方案的综合属性值 $\tilde{z}_j (j \in N)$. 由于 $\tilde{z}_j (j \in N)$ 仍是区间数, 不便于直接对方案进行排序 因此, 可利用区间数比较的可能度公式(7), 算出区间数 $\tilde{z}_j (j \in N)$ 之间的可能度, 并建立可能度互补矩阵 $\mathbf{P} = (P_{ij})_{n\times n}$, 其中, $P_{ij} = \mathbf{P}(\tilde{z}_i \geq \tilde{z}_j)$, $i, j \in N$. 对于互补判断矩阵的排序问题, 文[15] 首先把互补矩阵转化为模糊一致性矩阵, 再利用行和归一化求其排序向量, 文[16] 则进一步给出了互补判断矩阵排序向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 的一个简洁计算公式:

$$\omega_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_{ij} + \frac{n}{2} - 1}{n(n-1)},\ i \in N \tag{16}$$

利用此式求得可能度矩阵 **P** 的排序向量 按其分量大小对方案进行排序, 即得到最优方案

基于上述讨论, 给出如下算法:

1) 对于某一多属性决策问题, 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是方案集, $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 是属性集 给出方案 x_j 在属性 μ_i 下的属性值 $\tilde{a}_{ij}$ (这里 $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$), 从而构成决策矩阵 $A = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$.

2) 将决策矩阵A 按公式(4)～ (5) 转变为规范化矩阵 $R = (\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$.

3) 由公式(15) 求得最优权重向量w.

4) 由公式(8) 求得各方案综合属性值 $\tilde{z}_j (j \in N)$.

5) 利用区间数比较的可能度公式(7), 算出各方案综合属性值之间的可能度 $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}(\tilde{z}_i \geq \tilde{z}_j)$, $i, j \in N$, 并建立可能度互补矩阵 $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_{ij})_{n\times n}$.

6) 利用公式(16) 求得可能度矩阵 **P** 的排序向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$, 并按其分量大小对方案进行排序, 即得到最优方案

7) 结束

3　实例分析

例　为开发新产品, 拟定了五个投资方案 $x_j (j = 1, 2, \cdots, 5)$, 各方案的属性值列于表1 (单位: 万元).

表1　各个方案的属性值

属　性	方案				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
投资额(u_1)	[5, 7]	[10, 11]	[5, 6]	[9, 11]	[6, 8]
期望净现值(u_2)	[4, 5]	[6, 7]	[4, 5]	[5, 6]	[3, 5]
风险盈利值(u_3)	[4, 6]	[5, 6]	[3, 4]	[5, 7]	[3, 4]
风险损失值(u_4)	[0.4, 0.6]	[1.5, 2]	[0.4, 0.7]	[1.3, 1.5]	[0.8, 1]

在属性集中, 期望净现值、风险盈利值为效益型属性; 投资额、风险损失值为成本型属性, 属性权重信息完全未知

用本文的方法求出五个方案的排序 具体步骤如下:

首先根据表1 中数据建立决策矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} [5,7] & [10,11] & [5,6] & [9,11] & [6,8] \\ [4,5] & [6,7] & [4,5] & [5,6] & [3,5] \\ [4,6] & [5,6] & [3,4] & [5,7] & [3,4] \\ [0.4,0.6] & [1,5.2] & [0.4,0.7] & [1.3,1.5] & [0.8,1] \end{bmatrix}$$

再由公式(4) 和(5) 将决策矩阵 A 转化为规范化决策矩阵

$$R = \begin{bmatrix} [0.40,0.71] & [0.25,0.35] & [0.46,0.71] & [0.25,0.39] & [0.35,0.59] \\ [0.32,0.50] & [0.47,0.69] & [0.32,0.50] & [0.40,0.59] & [0.24,0.50] \\ [0.32,0.65] & [0.40,0.65] & [0.24,0.44] & [0.40,0.76] & [0.24,0.44] \\ [0.43,0.98] & [0.13,0.26] & [0.37,0.98] & [0.17,0.30] & [0.26,0.49] \end{bmatrix}$$

根据公式(15), 求得属性权重向量 w 为

$$w^* = (0.230, 0.142, 0.192, 0.436)^T$$

利用式(8) 求得各方案的综合属性值分别为区间数:

$\tilde{z}_1 = [0.386, 0.786]$, $\tilde{z}_2 = [0.258, 0.417]$,
$\tilde{z}_3 = [0.359, 0.746]$, $\tilde{z}_4 = [0.265, 0.450]$,
$\tilde{z}_5 = [0.274, 0.505]$

为了对各方案进行排序, 先利用式(7) 求出上述模型所得 $\tilde{z}_j (j = 1, 2, \cdots, 5)$ 两两比较的可能度矩阵:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.945 & 0.543 & 0.891 & 0.811 \\ 0.055 & 0.5 & 0.106 & 0.442 & 0.367 \\ 0.467 & 0.894 & 0.5 & 0.841 & 0.764 \\ 0.109 & 0.558 & 0.159 & 0.5 & 0.423 \\ 0.189 & 0.633 & 0.236 & 0.573 & 0.5 \end{bmatrix}$$

然后利用公式(16) 求出可能度矩阵 **P** 的排序向量:

$$\omega = (0.259, 0.148, 0.248, 0.162, 0.182)^T$$

因此, 方案的排序为 $x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_2$, 最优方案为 x_1.

4 结束语

针对属性权重信息完全未知、且属性值以区间数形式给出的不确定型多属性决策问题, 本文给出了求解属性权重的一个简洁公式, 并提出了一种基于可能度的决策方案排序方法. 该法能充分利用已有的客观信息, 具有简洁、直观、便于计算等优点.

参 考 文 献:

[1] Hwang C L, Yoon K S. Multiple attribute decision making: methods and applications[M]. Berlin: Springer, 1981

[2] 陈 珽. 决策分析[M]. 北京: 科学出版社, 1987

[3] Stewart T. A critical survey on the status of multiple criteria decision making theory and practice[J]. OMEGA, 1992, 20(3): 569-586

[4] Weber M, Borcherding K. Behavioral influences on weight judgements in multiattribute decision making[J]. European Journal of Operational Research, 1993, 67(1): 1-12

[5] Von Nitzsch R, Weber M. The effect of attribute ranges on weights in multiattribute utility measurements[J]. Management Science, 1993, 39(5): 937-943

[6] Fodor J, Roubens M. Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support[J]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994

[7] Edwards W, Barron F H. Smarts and smarter: improved simple methods for multi-attribute utility measurement[J]. Organizational Behavior and Human Decision Processes, 1994, 60: 252-266

[8] Lootsma F A. Multicriteria decision analysis in a decision tree[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 101(3): 442-451

[9] Bryson N, Mobolurin A. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems[J].

European Journal of Operational Research, 1996, 96(2): 379-386

[10] 樊治平, 张 权. 一种不确定性多属性决策模型的改进[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(12): 42-47

[11] 张 权, 樊治平, 潘德惠. 不确定性多属性决策中区间数的一种排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 19(5): 129-133

[12] 徐泽水. 模糊综合评价的排序方法研究[A]. Systems Engineering, Systems Science and Complexity Research[C]. Hemel Hempstead Hp2 7TD: Research Information Ltd, 2000. 507-511

[13] 达庆利, 刘新旺. 区间数线性规划及其满意解[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(4): 3-7

[14] 王应明. 运用离差最大化方法进行多指标决策与排序[J]. 系统工程与电子技术, 1998, 20(7): 24-26

[15] 徐泽水. AHP中两类标度的关系研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 97-101

[16] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311-314

Priority method for a kind of multi-attribute decision-making problems

XU Ze-shui, SUN Zai-dong

School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China

Abstract: This paper studies a kind of uncertain multi-attribute decision-making problems, in which the information about the attribute weights is unknown completely and the attribute values are in the forms of interval numbers. Some formulas for normalizing the decision matrix with interval numbers are given. Furthermore, a simple formula of maximizing deviations, based on deviation degree, for obtaining the attribute weights is given, and a priority method, based on possibility degree, for the uncertain multi-attribute decision-making problem is also proposed. Finally, a numerical example is given to show the feasibility and effectiveness of the method.

Key words: multi-attribute decision-making; deviation degree; possibility degree