

# 经济系统混沌时序重构的分析和应用

马军海<sup>1</sup>, 盛昭瀚<sup>2</sup>

(1. 天津大学管理学院, 天津 300072; 2. 南京大学管理科学与工程研究院, 南京 210093)

**摘要:** 在国内外学者应用 Legendre 坐标法重构一类经济动力系统的相空间, 研究了时序间隔  $\tau$  的取值范围, 讨论了时序间隔  $\tau$  对相空间重构工作的影响, 并用所提方法重构了这类经济动力系统的吸引子, 算例表明该方法是有用的

**关键词:** 混沌经济时序; 相空间重构; Legendre 坐标法

**中图分类号:** C931.1

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1007-9807(2002)03-0073-06

## 0 引言

相空间重构理论是由 Packard, et al<sup>[1]</sup>, Ruell 和 Takens<sup>[2]</sup>在80年代首次提出来的。它的重大贡献在于证明了相空间重构能保持混沌时序所对应的原非线性动力系统内在本质结构特征的几何不变性, 比如: 系统嵌入空间矩阵的本征值、吸引子的分维数、其轨线的 Lyapunov 指数以及其内在的分岔和混沌特性等的不变性

实测的时序数据不可避免地要受到噪声的干扰, 而时序中所含的噪声水平会影响到混沌时序重构的方法。文[2]证明了在存在噪声的情况下时序可以被嵌入到相空间中。文[3]给出了混沌时序中所含噪声水平的一个合理估计。由于原动力系统的方程是未知的, 所以不能从系统的方程中得到它的吸引子, 然而可以在所选择的嵌入空间中从实测的时序数据中重构原系统的奇怪吸引子而使其保持原所有内在特征的不变性。假设  $d$  是生成时序向量  $\bar{X}(t)$  的动力系统的分维数

$$\bar{X}(t) = [x(t), x(t-\tau), x(t-2\tau), \dots, x(t-(m-1)\tau)]^T$$
 而  $\tau$  是时序之间的采样间隔,  $m$  是嵌入空间矩阵的维数。Takens<sup>[2]</sup>证明了在存在噪声的情况下重构相空间时  $m$  应满足:  $m \geq 2[d] + 1$ 。在相空间重构的过程中  $\tau$  的取值也是非常重要

的。如果  $\tau$  的值取得太少, 则其所有的坐标几乎是一致的, 轨线在相空间中龟缩在同一条直线上; 如果  $\tau$  的值取得太大, 轨线在相空间中会出现间断现象, 这样一来有可能导致比较简单的几何图线在相空间中看起来非常复杂, 系统的相图失真。文[4]给出了  $\tau$  值选取的初步理论估计, 文[5]给出了初略  $\tau$  值选取的上界估计值。从总体上讲, 在时序存在噪声的情况下, 系统的一些不变量如: 分维数  $d$  和 Lyapunov exponents 等与  $m$  和  $\tau$  的选取有关, 所以相空间重构的中心任务便是合理地选取  $m$  和  $\tau$ 。

相空间重构的基本方法有 3 种, 它们分别是导数法<sup>[1]</sup>, 时间延迟法<sup>[2]</sup>和基本分量坐标法<sup>[9]</sup>。到目前为止这 3 种方法之间的关系还没有完全弄清楚。Gibson, et al 最近指出基本分量坐标<sup>[10]</sup>和由 Packard, et al<sup>[1]</sup>, Takens<sup>[2]</sup>所提出的导数坐标之间存在着非常紧密的联系; 更进一步地, 对于很少的延迟时间他们提出了基本分量坐标是基于简化了的 Legendre 多项式的观点。

因此, 在最近的几年里对不同相空间重构方法的研究便成为此领域研究的焦点。与此相关的是求出比较好的重构方法中的各相关参数值<sup>[9, 11]</sup>。文[12]给出了用基本分量坐标法重构相空间的相应结论。本文在国内外学者工作的基础

上,应用Legendre 坐标法重构原非线性动力系统的相空间,讨论了时序间隔  $\tau$ 对相空间重构工作的影响,并用所提方法重构了系统的吸引子,算例表明本文建议的方法是有效的

### 1 Legendre 坐标变换

为方便起见,选择嵌入维数  $m$  为奇数,即  $m = 2p + 1$ . 对于  $x \in R^{m=2p+1}$  定义延迟向量  $x(t)$  为

$$x(t) = [x(t - p\tau), \dots, x(t), \dots, x(t + p\tau)]^T \tag{1}$$

这里  $\tau$ 为时序间隔,  $T$  表示转置. 围绕时序的导数得到坐标变换

$$w_j(t) = \sum_{n=-p}^p r_{j,p}(n)x(t + n\tau) \tag{2}$$

式中时序  $x(t)$  是输入  $w_j(t)$ , 是输出,  $r_{j,p}(n)$  是离散变换的核. 假设时序的窗口宽度  $\tau$ 充分小,则可以得到下式

$$w_j(t) = \sum_{i=0}^p r_{j,p}(n) \left[ \frac{(n\tau)^i}{i!} x^{(i)}(t) \right] = \sum_{i=0}^p \frac{\tau^i}{i!} x^{(i)}(t) \left[ \sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) \right] \tag{3}$$

从式(3)可以看出在  $i < j$  的情况下如使括号内的向量消失,则  $r_{j,p}(n)$  必满足下式

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{35}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

### 2 时间间隔 $\tau$ 的选取

根据文[13]的结论:

$$\text{Log}_2 C(r, \tau, M) \leq D_2 \text{Log}_2 r - M \tau^T K_2 \text{bg}_2 e \tag{13}$$

$$\sum_{n=-p}^p n^i r_{j,p}(n) = 0 \quad \text{for } i < j \tag{4}$$

$$\sum_{n=-p}^p r_{i,p}(n) r_{j,p}(n) = \delta_{ij},$$

$$\sum_{n=-p}^p r_{j,p}^2(n) = 1 \quad \text{for } i, j = 2p \tag{5}$$

从式(4)和式(5)可以得到

$$r_{j,p}(n) = \frac{1}{C_j p^j} \left[ n^j - \sum_{k=0}^{j-1} r_{k,p}(n) \sum_{l=-p}^p l^k r_{k,p}(l) \right] \quad \text{for } j = 2p \tag{6}$$

定义离散的Legendre 多项式在  $R^{m=2p+1}$  的正交基  $r_j$  为

$$r_j = (r_{j,p}(-p), \dots, r_{j,p}(0), \dots, r_{j,p}(p))^T \tag{7}$$

由此可定义Legendre 坐标  $w_j(t)$  为

$$w_j(t) = x^T(t) r_j \tag{8}$$

由  $m$  个离散的Legendre 多项式通过  $m \times m$  矩阵

$$R = (r_0, r_1, \dots, r_{m-1}) \tag{9}$$

来定义变换  $R: R^m \rightarrow R^m$ , 这里  $R$  是正交的矩阵

定义Legendre 坐标向量为

$$w(t) = (w_0, w_1, \dots, w_{m-1})^T \tag{10}$$

可以得到

$$w^T(t) = x^T(t) R \tag{11}$$

取  $p = 2$  则可求得  $R$  为

$K_2$  为 2 熵, 计算时  $K_2$  可取最大的 Lyapunov Exponent 这里  $T$  可取 1. 这时落入半径为  $r$  的  $D_2$  维球体内的点集个数  $J$  为

$$J = \frac{1}{2} N^{2p} r^{2p} e^{-M \tau^T K_2} \tag{14}$$

由于  $J$  必须大于等于 1, 则最少的搜索半径  $r$  应满足式 (15)

$$\text{Log}_2 r_{\min}(\tau, M) > (1 - 2\text{Log}_2 N + \mathcal{M}TK_2\text{Log}_2 e) / D_2 \quad (15)$$

由于  $J \leq N$ , 则最大的搜索半径  $r$  应满足式 (16)

$$\text{Log}_2 r_{\max}(\tau, M) \leq (1 - \text{Log}_2 N + \mathcal{M}TK_2\text{Log}_2 e) / D_2 \quad (16)$$

结合文 [14] 所证得式 (17)

$$\text{Log}_2 r_{\max}(\tau, M) - \mathcal{M}TK_2\text{Log}_2 e / (D_2 - M) \quad (17)$$

可以进一步得到

$$\Delta = \text{Log}_2 r_{\max}(\tau, M) - \text{Log}_2 r_{\min}(\tau, M) < \mathcal{M}TK_2\text{Log}_2 e / (D_2 - M) - (1 - 2\text{Log}_2 N + \mathcal{M}TK_2\text{Log}_2 e) / D_2 \quad (18)$$

根据文 [14] 的研究结论  $\Delta$  应满足

$$\Delta \leq 4 \quad (19)$$

于是可以进一步得到

$$\tau_{\max} < \frac{(2\text{Log}_2 N - 1 - 4D_2)(M - D_2)}{M^2 K_2 T \text{Log}_2 e} \quad (20)$$

对于 Lorenz system  $\sigma = 10, r = 13\ 926, b = 8/3$  标准混沌的情况,  $D_2 = 2\ 06, K_2 = \lambda_1 = 1\ 51, T = 1$ , 计算时取  $N = 3\ 000$ , 则可算得

$$\tau_{\max}(M) < 6\ 362\ 950\ 464 \frac{(M - D_2)}{M^2} \quad (21)$$

文 [15] 采用计算时序  $x_{i+\tau}$  的自相关函数  $\Psi(\tau)$  求得  $\tau$

$$\Psi(\tau) = \frac{[x(t + \tau) - \bar{x}][x(t) - \bar{x}]}{[x(t) - \bar{x}]^2} \cdot 1/e \quad (22)$$

这里  $\bar{x}$  为时序  $x_{i+\tau}$  的平均值, 均值  $\bar{x}$  与时间  $t$  有关. Thelier 建议最佳的时序采样间隔  $\tau$  可以通过

式 (22) 求得

对于实测数据采样间隔  $\tau$  的选取, 建议可通过考虑 Thelier 给出的自相关函数法和文中给出的式 (20) 来求得

### 3 计算结果

取如下 2 组数据对本文的算法进行验证

第 1 组 对

$$\text{Lorenz system} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

取  $\sigma = 10, r = 13\ 926, b = 8/3$  标准同缩分岔的情况, 前 1 000 点作为暂态点去掉, 把后 3 000 点作为第 1 组原始数据点

第 2 组 用所得到的经济混沌数据 3 000 点作为实验数据, 作为第 2 组实验数据

由于本文所采用的 2 组数据: 第 1 组数据的分维数为  $d = 2\ 06$ , 第 2 组数据的分维数为  $d = 1\ 33$ , 由此可取嵌入维数  $m = 3$ , 由式 (1) 可知此时  $p = 1$ , 再由式 (21) 可求得第 1 组数据的时序间隔满足

$$\tau_{\max}(M) < 0\ 664\ 574\ 826 \quad (23)$$

由式 (22) 可求得第 2 组数据的时序间隔满足

$$\tau = 0\ 026(\text{s}) \quad (24)$$

本文用计算所得到的 2 组数据  $\tau$  值允许的范围用由式 (11) 所决定的 Legendre 坐标法 (3 个坐标轴分别为:  $w_0, w_1$  和  $w_2$ ) 进行了重构工作, 重构结果如下. 图 1 给出了第 2 组实测混沌数据的时间历程图

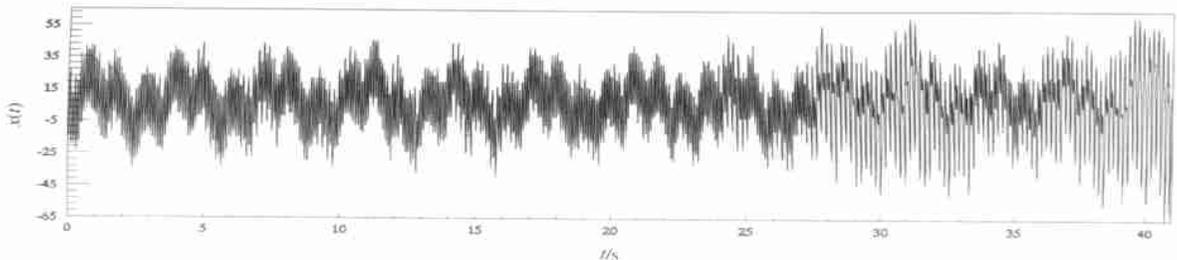


图 1 第 2 组实测混沌数据的时间历程图

图 2a~ 图 2c 为第 1 组数据的 2 维相空间重构相图, 其横、纵坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.6$

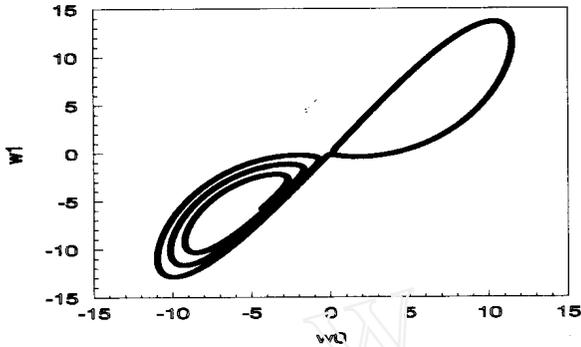


图 2a 第 1 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_1$ . 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.6$

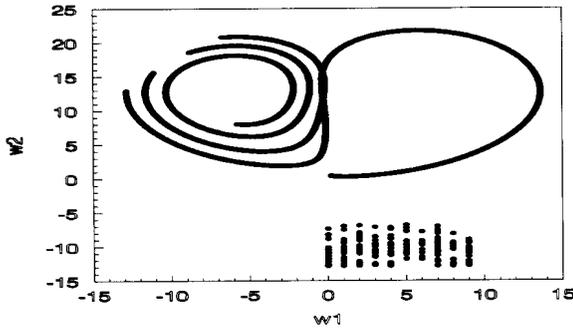


图 2c 第 1 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_1$ , 纵标为  $w_2$ . 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.6$

图 2d 为第 1 组数据的 3 维相空间重构相图, 其横坐标、纵坐标和竖坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.6$

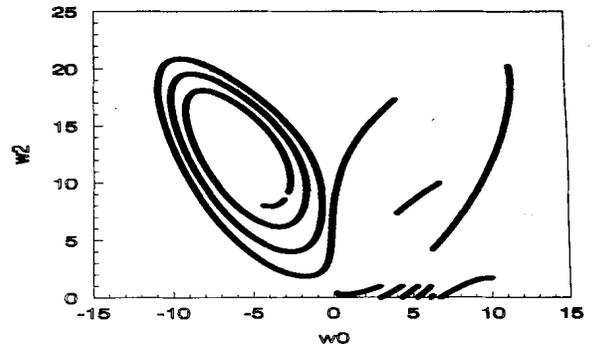


图 2b 第 1 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_2$ . 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.6$

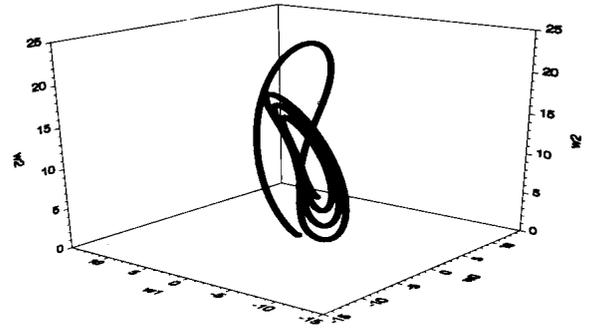


图 2d 第 1 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_1$ , 竖坐标为  $w_2$ . 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.6$

本文也对  $\tau = 0.8 \sim 1.2$  (不满足式 (23)) 时第 1 组数据进行了相空间重构工作, 其相图中出现了轨线间断现象, 重构效果失真

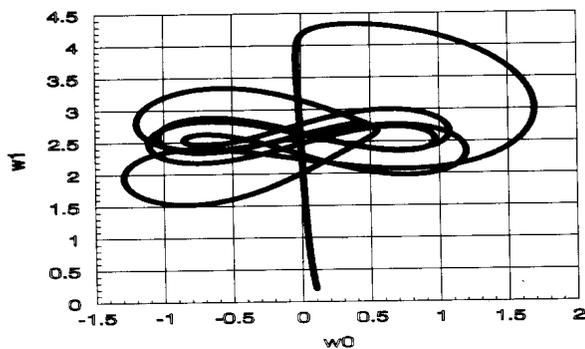


图 3a 第 2 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_1$ . 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.024$

图 3a~ 图 3c 为第 2 组数据的 2 维相空间重构相图, 其横、纵坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ , 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.024$

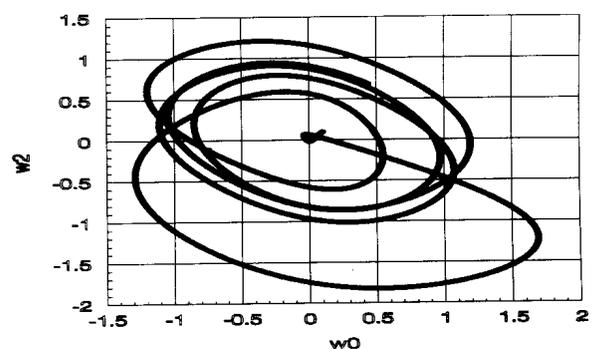


图 3b 第 2 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_1$ , 纵标为  $w_2$ . 嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.024$

图 3d 为第 1 组数据的 3 维相空间重构相图, 其横坐标、纵坐标和竖坐标分别为  $w_0, w_1$  和  $w_2$ ,

嵌入维数  $m = 3, \tau = 0.024$

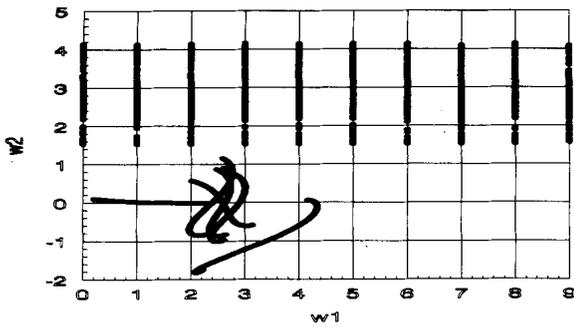


图 3c 第 2 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_2$  嵌入维数  $m = 5$ ,  $\tau = 0.024$

本文也对  $\tau = 0.01, 0.015$  (不满足式 (24)) 时第 2 组数据进行了相空间重构工作, 其相图中也出现了轨线间断现象, 重构效果失真

## 4 结论

(1) 用 Legendre 坐标法进行相空间重构, 其局部的重构效果良好

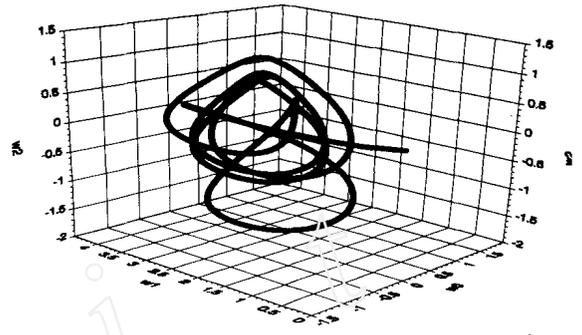


图 3d 第 2 组数据的相空间重构图, 横标为  $w_0$ , 纵标为  $w_1$  竖坐标为  $w_2$  嵌入维数  $m = 3$ ,  $\tau = 0.024$

(2) 相空间重构工作应在允许的  $\tau$  值范围内进行

(3) 从图 3d 中可以看出第 2 组数据为混沌数据, 但其混沌特征基本上是发生在某一平面上, 这与从得到的其分维数值来得出的结论是完全吻合的

(4) 利用相空间重构可以很好的确定最佳嵌入维数  $m$ , 这对接下来要进行的混沌时序的预测和控制工作有重要意义

## 参考文献

- [1] Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D, Shaw R S. Geometry from a time series[J]. Phys Rev. Lett, 1980, 45: 712-716
- [2] Takens F, Sauer M, Verduyn Lunel Y L, et al. Detecting strange attractors in fluid turbulence[A]. Rand D A, Young L S. Dynamical systems and turbulence. Vol 898 of Lecture Notes in Mathematics[C]. Berlin: Springer, 1986: 366
- [3] Pilgram B, Kaplan D T. A comparison of estimators for  $1/f$  noise[J]. Phys D, 1998, 114: 108-122
- [4] Casdagli M, Eubank S, Farmer J D, et al. State space reconstruction in the presence of noise[J]. Phys D, 1991, 51: 52-98
- [5] Ying Cheng Lai, Lerner D. Effective scaling regime for computing the correlation dimension from chaotic time series[J]. Phys D, 1998, 115(5): 1-18
- [6] Badii R, Broggi G, Derighetti B, et al. Dimension increase in filtered chaotic signals[J]. Phys Rev. Lett, 1988, 60: 979-984
- [7] Mitschke F. A causal filter for chaotic signals[J]. Phys Rev. A, 1990, 41: 1169-1171
- [8] Scargle J D. Studies in astronomical time series analysis. V. Modeling chaotic and random processes with linear filters[J]. Astrophys J, 1990, 359: 469-482
- [9] Gibson J F, Casdagli M, Eubank S, et al. An analytic approach to practical state space reconstruction[J]. Phys D, 1992, 57: 1-30
- [10] Broomherd D S, et al. Extracting qualitative dynamics from experimental data[J]. Phys D, 1987, 20: 217-236
- [11] Liebert W, Pawelzik K, Schuster H G. Optimal embeddings of chaotic attractors from topological considerations[J]. Europ Phys Lett, 1991, 14: 521-526
- [12] 盛昭瀚, 马军海. 管理科学: 面对复杂性—混沌时序经济动力系统重构技术(D)[J]. 管理科学学报, 1998, 1(1): 31-42

- [13] Ma Jun-hai The non-linear dynamic system reconstruction of the chaotic timeseries[D]. Tianjin: Tianjin University, 1997
- [14] Theiler J. Statistical precision of dimension estimators[J]. Phys Rev. A, 1990, 41(6): 3038-3051
- [15] 盛昭瀚, 马军海. 管理科学: 面对复杂性—混沌时序经济动力系统重构技术(II). 管理科学学报, 1998, 4(1): 15-19

## Study of reconstruction of chaotic economic time series and its applications

MA Jun-hai<sup>1</sup>, SHEN G Zhao-han<sup>2</sup>

1. School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China

2. Graduate School of Management Science & Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China

**Abstract:** Based on the related results of existing literature, a state space about a kind of chaotic economic time series is reconstructed using the method of Legendre coordinate in this paper. Several different scaling regimes for lag time  $\tau$  are identified. The influence for state space reconstruction for this economic chaotic dynamics of lag time  $\tau$  is discussed. The results show us that this approach is a good practical method for state space reconstruction.

**Key words:** chaotic economic time series; state space reconstruction; Legendre coordinates

(上接第22页)

- [9] Cooter R D, Rubinfeld D L. Economics analysis of legal disputes and their resolution[J]. Journal of Economic Literature, 1989, 27: 1067-1097
- [10] Huberman G. Limited contract enforcement and strategic negotiation[J]. American Economic Review, 1988, 78: 471-484
- [11] Lewis T R, Sappington D E. Inflexible rules in incentive problems[J]. American Economic Review, 1989, 79: 69-84
- [12] Kathryn E S. Incomplete contracts and signaling[J]. RAND Journal of Economics, 1992, 23(3): 71-80
- [13] 黄京华等. Agent 在电子商务环境下供应链应用研究, 管理科学学报, 2001, 4(5): 58-64

## Bi-level decision in supply contract management

CHEN Xiang-feng, ZHU Dao-li

School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, China

**Abstract:** From behavior motive and quality conflict between purchasing and supply, the paper sets up a NASH model and analyzes contract parameter's effect to quality of product in producing period. Furthermore, it even makes a bi-level decision model, and discusses contract parameter's effect to quality control in supply chain, and comes up with a negotiating strategy in contract management as well.

**Key words:** contract logistics; contract management; quality management; Nash-equilibrium; bi-level decision