

经济管理混沌模型的控制域研究

姚洪兴^{1,2}, 盛昭瀚², 田立新¹

(1. 江苏大学系统工程研究所, 镇江 212013; 2. 南京大学管理科学与工程研究院, 南京 210093)

摘要:在进行混沌控制时,有时要经过很长时间才到达目标轨道,有时甚至不能有效控制,正如在基于预测的反馈控制中看到的,究其原因一是混沌模型有时有多个不动点,二是混沌轨道的稠密性.提出一种等价关系,计算基于概率的动力系统的特征指数,给出混沌经济动力系统的稳定周期轨道的有用信息,通过讨论特征指数的符号,选择有效的控制参数,得到相应的控制参数取值范围,从而得到混沌经济模型中的参数变量的混沌控制域.

关键词:经济管理模型;混沌控制域;概率动力系统;特征指数

中图分类号: F124.8; TP27; O415.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2003)05-0029-05

0 引言

混沌控制的目的是对有害的混沌加以控制,对有益的混沌加以诱导,如果根据混沌具有遍历性,采取“守株待兔”的办法,当状态点落到不动点的吸引盆内,先经历混沌暂态,再进入预定的受控轨道^[1~4].正如在基于预测的反馈控制中看到的^[5],需要经历很长时间才达到控制目的,有时甚至失效,从这里可以看出讨论混沌控制有效性比讨论混沌控制方法本身更重要,国内目前这方面的文献很少,基于这样的想法,讨论了经济管理系统中的混沌控制域的有关问题,得到一些好的结论^[6].为了准确有效地进行混沌控制,也许你可能会提出如何才能有效地进行参数扰动控制?又如何计算参数扰动的范围?本文就这些问题利用基于概率的动力系统建立一个等价于受参数扰动的混沌系统,计算相关的特征指数,并给出控制参数扰动的条件.

在进行混沌控制时,由于混沌系统的周期轨道在相空间中都是不稳定的和稠密的^[7].从一个不稳定轨道进入另一个不稳定轨道通常受到外部

扰动,另外要使系统回到原始轨道也必须受到外界一个扰动,而且外部扰动必须进行微小调节,否则控制就不能如人所愿.这里通过建立一个与外部参数小扰动等价的概率动力系统,这样可以减少连续调节参数的盲目性,而且这种方法只要通过计算特征指数来确定控制条件^[8,9].

1 特征参数法

通过讨论离散的混沌经济系统

$$X_{i+1} = f(X_i, \mu_i) \quad (1)$$

是 $R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 的一个映射,其中: $X_i \in R^n$ 为系统状态, $\mu_i \in R^m$ 为系统的控制参数,映射 f 充分滑.假设系统(1)在 $\mu = \mu^*$ 时处于完全混沌状态,在这种情形下,通过控制参数 μ 的值来控制 $f(x, \mu^*)$ 的不稳定周期轨道.为了保证混沌系统能被控制,那么如何调节参数 μ ?假设状态变量 x 落在将要控制的不稳定周期轨道的很小邻域 $U(x^*, \epsilon)$ 内(ϵ 为很小的正数),这样才能保证参数扰动 μ 的控制有效.为了考虑混沌系统 $f(x, \mu^*)$ 的不稳定不动点的控制问题,下面研究在邻

收稿日期:2001-08-15; 修订日期:2003-07-06.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(90210004; 70271071); 国家博士后基金资助项目(2003033498); 校基金资助项目(1683000027; 02JD014).

作者简介:姚洪兴(1964—),男,江苏扬州人,博士后,副教授.

域 $U(x^*, \delta)$ 内等价于一个受扰系统 $f(x, \mu)$ 的伸缩映射,如下式表示:

$$C(x, \delta) = x^* + \delta(x - x^*) \quad (2)$$

参数 δ 与受扰映射 $f(x, \mu)$ 的不动点 x^* 有关. 若 $0 < \delta < 1$ ($\delta > 1$) 时,映射 $C(x, \delta)$ 以变化率 δ 等价于扰动的系统 $f(x, \mu)$ 的一个伸缩映射. 对每一个参数 μ 根据它的线性性和 $C(x^*, \delta) = x^*$, 应有关于 $f(x, \mu)$ 的不动点 x^* 的 $C(x, \delta)$, 而 δ 表示为

$$\delta = x^* + \delta(x - x^*) \quad (3)$$

其中: δ 表示关于系统 $f(x, \mu)$ 扰动大小的一个参数. 从不动点方程 $f(x, \mu) = x$ 出发可以得到控制参数 μ 关于不动点 x^* 的表达式,再结合式(3)得到控制参数 μ 关于 x 的表达式,再将它代入到 $f(x, \mu)$ 中,利用 $C(x^*, \delta) = x^*$ 得到 $C(x, \delta)$ 的变换表达式,最后如果 δ 是充分小,在 x^* 附近取 $C(x, \delta)$ 的线性表达式来近似,这样就得到在邻域 $U(x^*, \delta)$ 的伸缩率 δ .

参数 μ 通过控制参数 δ 确定扰动幅度,由于函数 $\mu(x)$ 在不动点附近是单调的,对每一次落在邻域 $U(x^*, \delta)$ 内的 x ,通过选择 δ 值确定了扰动 μ 的允许形式,此时扰动的范围就由参数 μ 的最大最小值所确定,比如选择 $\mu_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 就得到控制参数 μ_i 的值^[10~12].

由式(3)可知扰动参数 μ 也依赖于 x 的结果,若点 x 与周期轨道越近,参数 μ 的变化就越小(除了 δ 为常数情形),如果扰动 μ_i 每一步并没有完全确定,根据概率论知识,数集 $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ 与数集 $\{\delta_i\}_{i=1}^N$ 具有相同的概率 $p(\delta_i)$ (因为 μ_i 与 δ_i 通过线性映射 $C(x, \delta_i)$ 是一一对应),这样定义 $C(x, \delta_i)$ 每次迭代的概率,实际上就定义了一个基于概率的动力系统 $\{C(x, \delta_i), p(\delta_i)\}_{i=1}^N$. 通过等价关系,计算基于概率的动力系统的特征指数,得到关于系统 $f(x, \mu^*)$ 不稳定周期轨道的有用信息. 这是考虑离散的情形,在很多情况下,需要讨论

$$\lambda(0, \mu_x) = \frac{\max_{\mu} p(\mu) \log |3 - 2|}{\int_0^{\max_{\mu}} p(\mu) \log |3 - 2| d\mu} = \frac{(3 - 2) \log |3 - 2|}{\int_0^{\max_{\mu}} p(\mu) \log |3 - 2| d\mu} \quad (\text{取 } \min_{\mu} = 0) \quad (11)$$

关于式(11)的图形如图1所示. 从图1可以看出,当 $1 < \mu_{\max} < 2$ 时, λ 为负的,这相当于扰动参

数 μ 关于 x 和 μ 是连续的情形,这时只需把 x 看作一个随机变量,就得到关于 x 的概率密度 $p(x)$, 通过计算 λ 后,得到了等价的动力系统的特征指数:

$$\lambda(\mu_{\min}, \mu_{\max}) = \frac{\int_{\mu_{\min}}^{\mu_{\max}} p(\mu) \log |3 - 2| d\mu}{\int_{\mu_{\min}}^{\mu_{\max}} p(\mu) d\mu} \quad (4)$$

其中: μ_{\max} 和 μ_{\min} 分别为 μ 的最大值和最小值. 通过讨论特征指数 $\lambda(\mu_{\min}, \mu_{\max})$ 取负值时,得到控制参数的取值范围.

2 虫口管理模型的混沌控制域

下面通过虫口管理模型来说明混沌控制域的方法

$$f(x, \mu) = \mu x(1 - x) \quad (5)$$

这里 $\mu > 0$, 当 $\mu > 3.569\ 945\ 972 \dots$ 系统进入混沌状态,为了便于讨论取 $\mu = 4$,首先讨论不动点 $x^* = 0.75$ 的稳定性问题,由系统式(5)很容易得到

$$\delta = \frac{\mu - 1}{\mu}, \text{ 这样 } \mu = \frac{1}{1 - \delta} \quad (6)$$

由式(3)定义

$$\delta = 0.75 + \delta(x - 0.75) \quad (7)$$

将式(7)代入到式(6)得

$$\mu(\delta) = \frac{4}{1 - 4\delta(x - 0.75)} \quad (8)$$

再由方程(5)得到

$$C(x, \delta) = \frac{4x(1 - x)}{1 - 4\delta(x - 0.75)} \quad (9)$$

假定 δ 很小,这样将式(8)利用泰勒公式得到一次近似

$$C(x, \delta) = 0.75 + (3 - 2)\delta(x - 0.75) \quad (10)$$

这时取 $\delta = 3 - 2$,假定 μ 具有式(9)定义的基于概率的动力系统的概率密度 $p(\mu)$, 它等价于在不动点 $x^* = 0.75$ 附近的受扰的虫口管理模型(5),则该系统的特征指数为

数 μ 的最大最小值与 $\mu_{\max} (1 < \mu_{\max} < 2)$ 的某个值相关,也就是说,当 $\mu_{\max} < 1$ 或 $\mu_{\max} > 2$ 时则

不能控制到不稳定轨道(当 $p(\cdot)$ 为常数),所以为了使系统(5) 稳定不动点 x^* , 扰动参数不能取得太大也不能取得太小. 下面将利用虫口管理模型进行数值计算,取 $\mu = 0.01$, 由式(10),对于控制域中不同 μ_{\max} 值,可以得到不同控制时间,这个控制时间实际上是扰动系统的混沌短暂逗留的长度. 得到的控制时间与特征指数的倒数 $T = 1/\lambda$ 成正比, 则控制的逗留时间近似为 $T = 1/\log(\lambda)^{-1}$, 这里 λ 是有效控制的相空间中域的大小, μ 是被观察的动力系统模型的精度.

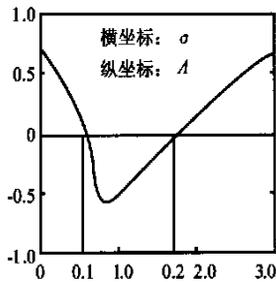


图 1 关于虫口管理模型不动点的特征指数

利用式(8) 估计最大扰动参数 μ 的最大范围, 取 $\mu = 0.01$, $x^* = 0.75$, $\mu_{\max} = 0.9$, 则 $3.8610 < \mu < 4.1494$.

有时为了多周期混沌控制, 为了特征指数控制域方法的完整性, 下面继续研究虫口管理模型周期 2 轨道的控制域问题. 利用式(5) 得到虫口管理模型的周期 2 不动点 $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{5-\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8})$, 同上可以得到控制参数 μ 关于不动点 λ 的关系:

$$\mu = \frac{1 - \lambda + \sqrt{(1+3\lambda)(1-\lambda)}}{2(1-\lambda)} \quad (12)$$

当 $\lambda < 1/2$ 时, 式(12) 变为

$$\mu = \frac{1 - \lambda_1 + \sqrt{(1+3\lambda_1)(1-\lambda_1)}}{2\lambda_1(1-\lambda_1)} \quad (13)$$

同样由式(3) 得到

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} + \lambda_1 \left[x - \frac{5-\sqrt{5}}{8} \right] \quad (14)$$

将式(14) 代入到式(12) 得

$$C_1(x, \lambda_1) = \mu(\lambda_1) x(1-x) \quad (15)$$

由于 $\mu(\lambda_1)$ 太烦琐, 这里略去不写, 然后将式(15)

在 $x_1^* = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ 处写出它的一次近似

$$C_1(x, \lambda_1) = \frac{5+\sqrt{5}}{8} + (-1.7519\lambda_1 + 1.2361) \left[x - \frac{5-\sqrt{5}}{8} \right] \quad (16)$$

$\lambda > 1/2$ 时, 式(12) 变为

$$\mu = \frac{1 - \lambda + \sqrt{(1+3\lambda)(1-\lambda)}}{2\lambda(1-\lambda)} \quad (17)$$

而 $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} + \lambda_2 \left[x - \frac{5+\sqrt{5}}{8} \right]$, 类似于式(15),

在 $x_2^* = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ 取一次近似

$$C_2(x, \lambda_2) = \frac{5-\sqrt{5}}{8} + (1.2973\lambda_2 - 3.2361) \left[x - \frac{5+\sqrt{5}}{8} \right] \quad (18)$$

由式(16) 和式(18) 分别得到 $\lambda_1(\lambda_1) = -1.7519\lambda_1 + 1.2361$ 和 $\lambda_2(\lambda_2) = 1.2973\lambda_2 - 3.2361$, 则关于周期 2 的特征指数为

$$\lambda^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\lambda_1) \log | \lambda_1(\lambda_1) | d\lambda_1 + \int_0^{2\pi} p(\lambda_2) \log | \lambda_2(\lambda_2) | d\lambda_2 \quad (19)$$

这里取 $\lambda_{1\min} = \lambda_{2\min} = 0$, 同时取 $\lambda_{1\max} = \lambda_{2\max} = \mu_{\max}$, $p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = \text{常数}$,

则式(19) 变为

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(\mu_{\max} - 0.7056) \log | -1.7519\mu_{\max} + 1.2361 | - \mu_{\max} + 0.7056 \log 1.2361 + (\mu_{\max} - 2.4945) \log | 1.2973\mu_{\max} - 3.2361 | - \mu_{\max} + 2.4945 \log 3.2361] \quad (20)$$

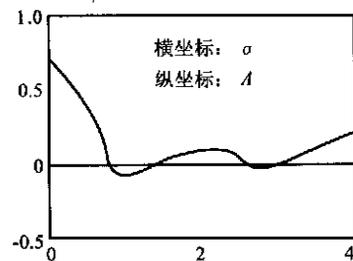


图 2 关于虫口管理模型周期 2 不动点的特征指数

式(20) 的图形如图 2 所示, 从图可以看出 μ_{\max} 太大或太小, 由 λ 表明周期 2 轨道不能控制, 也就是说要在有限次时间内达到控制的目的, 特征指数 λ_{\max} 的值必须小于 0.

同样可以得到周期 T 的不稳定轨道的控制条件, 只要相应地将特征指数进行推广 $\lambda^{(T)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$. 下面讨论财产管理模型的混沌控制域的问题.

3 财务管理混沌模型的混沌控制域

下面讨论一种财务管理混沌模型的混沌控制域^[13]:

$$\begin{cases} x_{i+1} = 0.6 + pz_i \\ y_{i+1} = x_i + ry_i z_i \\ z_{i+1} = 1 - qx_i - y_i + z_i \end{cases} \quad (21)$$

其中: p, q, r 为参数项, p 表示库存资金转移率, q 表示资产投资率, r 表示库存有效率, x_i 表示在阶段 i 用于销售的资产, y_i 表示在阶段 i 消费量, z_i 表示在阶段 i 的公司的库存资本. 根据该管理模型的具体要求 $0 < x_i < 1, 0 < y_i < 1, 0 < z_i < 1/r$.

若在阶段 i 处有过剩库存, 公司的目标是处理多余的存货, 即将资产从生产转向销售. $x_i < 0$ 表示必须借入资金促进生产来补充销售的滞后, $y_i < 0$ 表示必须在其它地方购进货物, $z_i < 0$ 表示销售超过生产, 会导致交货迟滞. 当 $p = 0.42, q = 1, r = 0.2$, 系统(21) 完全进入混沌状态, 如图 3

所示, 下面首先讨论式(21) 的不动点 $(x^*, y^*, z^*) = (0.5175, 0.4825, 0.9478)$ 的稳定性问题, 由系统(21) 很容易得到

$$\begin{cases} p = \frac{x^* + 1(x - x^*) - 0.6}{z^* + 3(z - z^*)} \\ q = \frac{1 - (y^* + 2(y - y^*))}{x^* + 1(x - x^*)} \\ r = \frac{(y^* + 2(y - y^*))(x^* + 1(x - x^*))}{(y^* + 2(y - y^*))(z^* + 3(z - z^*))} \end{cases} \quad (22)$$

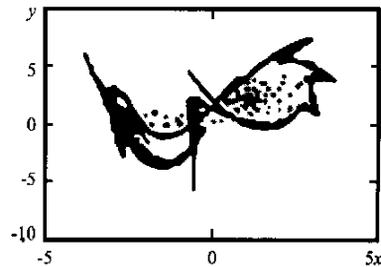


图3 财务管理模型的混沌吸引子

这样将 $(x^*, y^*, z^*) = (0.5175, 0.4825, 0.9478)$ 代入到财务管理混沌模型(21), 得到系统(21) 的雅可比行列式:

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -0.0870436(1 - 3) \\ 1 - 1 & 1 + 1.0725388(2 - 1) & 0.0369276(3 - 1) \\ 1 - 1 & 2 - 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (23)$$

式(23) 提供了在稳定流形 W^s 和不稳定流形 W^u 上的特征值 λ_s 和 λ_u , λ_s 和 λ_u 是受扰的雅可比矩阵的特征值, 实际上是未受到扰动情形 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$) 的不精确的三个特征值. 这样关于不动点 (x^*, y^*, z^*) 就有三个特征指数. 现在考虑 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 时, 它的概率密度 $p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = p(\lambda_3)$ 为常数, 在这种情况下受扰的动力系统的稳定和不稳定方向不依赖于 λ_i , 于是特

征指数由式(24) 给出

$$\lambda_{1,2,3} = \frac{\max_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_{1,2,3}|}{\min_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_{1,2,3}|} \quad (24)$$

取 $\min_{\lambda_i} p(\lambda_i) = 0$, 得到

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1.214 \max_{\lambda_i} - 0.214 \\ \lambda_2 &= 1.597 \max_{\lambda_i} - 0.597 \\ \lambda_3 &= -0.139 \max_{\lambda_i} + 1.139 \end{aligned}$$

所以

$$\lambda_1 = \frac{\max_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_1|}{\min_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_1|} = \frac{(\max_{\lambda_i} - 0.1763) \log / 1.214 \max_{\lambda_i} - 0.214 / - \max_{\lambda_i} + 0.1763 \log 0.214}{\max_{\lambda_i}}$$

同样得到

$$\lambda_2 = \frac{\max_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_2|}{\min_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_2|} = \frac{(\max_{\lambda_i} - 0.3738) \log / 1.597 \max_{\lambda_i} - 0.597 / - \max_{\lambda_i} - 0.3738 \log 0.597}{\max_{\lambda_i}}$$

$$\lambda_3 = \frac{\max_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_3|}{\min_{\lambda_i} p(\lambda_i) \log |\lambda_3|} = \frac{(\max_{\lambda_i} - 8.1942) \log / -0.139 \max_{\lambda_i} + 1.139 / - \max_{\lambda_i} - 8.1942 \log 1.139}{\max_{\lambda_i}}$$

至于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 与 \max_{λ_i} 的关系, 如图4所示, 同样只要当 λ_1, λ_2 和 λ_3 都小于0时的区域, 就是控

制到不稳定不动点轨道的有效范围. 如取 $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 0.4$, $\lambda_3 = 4$, 取 $\epsilon = 0.01$, 利用式(22)得到控制参数的范围, $0.4150 < p < 0.4452$, $0.9621 < q < 1.0394$, $0.1865 < r < 0.3579$.

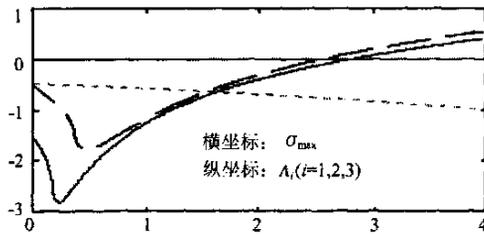


图4 关于资产管理混沌模型的特征指数
(λ_1 :——; λ_2 :---; λ_3 :-·-)

参考文献:

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64: 1196—1199
- [2] Lai Y C, Grebogi C, TeHl T. Controlling transient chaos in dynamical systems[C]. In Towards the Harnessing of Chaos. The 7th TOYOTA Conference, Elsevier, Amsterdam, 1994. 153—167
- [3] 盛昭瀚, 马军海, 陈国华. 管理科学: 面对复杂性 II——经济时序动力系统分形及混沌特性分析研究[J]. 管理科学学报, 1998, 1(4): 15—19
- [4] 姚洪兴, 盛昭瀚. 一类经济混沌模型控制方法的研究[J]. 管理科学学报, 2001, (4): 16—21
- [5] 姚洪兴. 混沌经济系统的复杂性及非线性方法的研究[D]. 南京: 东南大学, 2001
- [6] 姚洪兴, 盛昭瀚. 反馈控制方法在经济混沌模型中的应用[J]. 系统工程学报, 2002, (6): 507—511
- [7] 马军海, 盛昭瀚, 陈春旺. 经济时序动力系统的分形及混沌特性研究[J]. 系统工程学报, 15(1): 13—18
- [8] Antoniou I, Bosco F, Suchanecki Z. Spectral decomposition of expanding probabilistic dynamical systems[J]. Phys Lett A, 1998, 239: 153—159
- [9] Antoniou I, Bosco F. Spectral decomposition of contracting probabilistic dynamical systems[J]. Chaos Solitons and Fractals, 1998, 9(3): 401—408
- [10] Bosco F. Generalized spectral decomposition of probabilistic dynamical systems[D]. Brazil: Universite Libre de Bruxelles, 1996
- [11] Romeiras F J, Grebogi C, Ott E, et al. Controlling chaotic dynamical systems[J]. Phys D, 1992, 58: 165—192
- [12] Ott E, Grebogi C, York J A. Soviet American Perspectives on Nonlinear Science[C], in D. K. Campbell (Ed.), American Institute of Physics, NY, 1990. 153—162
- [13] Priesmeyer H R, Baik K. Dynamic economic system[J]. Planning Review. 1994, 17(6): 14—26

Study on control region of economic and management chaotic model

YAO Hong-xing^{1,2}, SHENG Zhao-han², Tian Li-xin¹

1. Institute of System Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;

2. Graduate School of Management Science and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China

Abstract: It usually takes a long time to obtain a target orbit by controlling chaos. But a chaotic system sometimes cannot be effectively controlled, which is shown in the feedback control based on forecasting. Among the reasons, one is that chaotic models may have many fixed points, the other is the density of orbits. In order to know when to control, an equivalence relation is introduced in this paper. The characteristic exponent based on a probabilistic dynamical system is calculated, which provides some useful information on unstable periodic orbits of the chaotic economic dynamical system. An effective controlling parameter is chosen by discussing the sign of the characteristic exponent. Furthermore, the control regions of the parameter variable are proposed. Therefore the controllable domain of chaos in the chaotic economic model can be obtained.

Key words: economic management model; chaotic control region; probability dynamic system; characteristic exponent