

# 广告竞争模型中的混沌同步特性分析

齐洁, 汪定伟

(东北大学信息科学与工程学院系统工程研究所, 沈阳 110004)

**摘要:** 提出一个基于 V - W 销售广告反应模型的二维离散广告竞争动态模型. 在两家卖主竞争的市场上, 企业可以生产相互替代的商品, 运用广告促销吸引顾客, 提高销量. 在 V - W 模型的基础上, 把广告投入作为控制量, 采用线性反馈控制, 通过数学分析和数值计算, 得出模型中两个状态变量在一定参数下混沌同步. 并且对混沌同步的稳定性进行了分析.

**关键词:** 广告; 竞争; 动态模型; 混沌同步

**中图分类号:** F713.8; O415.5      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007 - 9807(2004)02 - 0027 - 05

## 0 引言

广告模型的研究受到越来越多的关注, 其中, 以广告投入动态模型的研究最为集中. 最初的也是最基本的广告最优投入模型分为两个分支<sup>[1~3]</sup>, 一类是销售 - 广告反应模型, 又称 V - W 模型, 由 Vidale 和 Wolfe 提出, 描述了广告投入与销量变化的关系; 另一类是 Nerlove 和 Arrow 提出的广告资本股模型(N - A 模型). 以后的各种广告最优投入模型都是在这两类模型的基础上扩展而来. 本文提出的竞争广告模型就是在 V - W 模型的基础上, 借用 Lanchester 的战斗模型表示由广告投入引起的竞争双方市场占有率的动态变化<sup>[4]</sup>. 模型采用的广告投入策略是许多企业采用的销售百分比法<sup>[5]</sup>, 即取当期销售额的一定比率作为广告投入, 并根据对手的销售额做适当调整. 对模型进行分析, 得出在一定条件下, 模型具有混沌同步的动态特性, 对认识市场结构的演变和采取相应的对策具有重要意义. 当前, 国内对经济系统混沌现象的研究多集中于经济混沌时序方面<sup>[6,7]</sup>, 本文从模型入手, 说明经济系统中存在的混沌现象.

## 1 模型的描述

针对 Chintagunta 和 Vilcassim 提出的模型<sup>[4]</sup>, 讨论了把广告投入作为线性反馈控制量的模型的动态特性, 提出如下模型:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a_1 x_t + k_1 u_t^1 (1 - x_t) - k_2 u_t^2 x_t \\x_{t+1} &= a_2 x_t + k_2 u_t^2 (1 - x_t) - k_1 u_t^1 x_t\end{aligned}\quad (1)$$

其中:  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ ,  $T$  为商业周期数, 考虑  $T$  个时间周期内模型随时间的动态演变;  $x_t$  和  $x_t$  分别是在第  $t$  个周期中购买企业 1、2 商品的顾客占总人口的比例, 且  $0 < x_t, x_t < 1$ ;  $k_1, k_2$  是企业 1、2 的广告效果参数;  $a_1, a_2$  是顾客对商品的忠诚度因子, 表示在一个周期后还有多大比率的顾客保留他们的购买习惯;  $u_t^1, u_t^2$  分别是企业 1 和 2 的广告投入. 这里, 参数的取值范围是

$$0 < k_1, k_2, a_1, a_2 < 1\quad (2)$$

假定购买两种商品的顾客人数占总人口比例之和的可能值为: 大于 1, 小于 1 和等于 1. 因为实际上购买了一种商品的顾客由于不喜欢或受到广告的诱惑等种种原因, 还可以购买另一种商品, 即一个人在一个时间周期内可以同时购买两种商品, 此时  $x_t + x_t > 1$ . 同时, 可能有的顾客一种商品也不买 ( $x_t + x_t < 1$ ), 也有可能购买两种商品的

收稿日期: 2002 - 11 - 25; 修订日期: 2004 - 01 - 05.  
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60084003; 70171056).  
作者简介: 齐洁 (1978 -), 女, 云南人, 博士生.

总人口数恰好等于人口总和 ( $x_t + y_t = 1$ ) (这里购买商品的人数是指买其中一种商品的人数, 如果一个顾客两种商品都买了, 就要在购两种商品的人数上都加 1)。

这里, 采取的广告策略是实务中由许多企业采用的销售百分比法<sup>[5]</sup>, 取企业销售额的一定比例作为广告投入, 并根据对手的销售做适当调整<sup>[8]</sup>. 广告投入函数为

$$\begin{aligned} u_t^1 &= p_1 B x_t + p_1 B y_t \\ u_t^2 &= p_2 B x_t + p_2 B y_t \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $B$  表示商品覆盖区域的人口总数;  $p$  指商品价格;  $p_1, p_2$  意味着广告投入将随本企业销售额的增加而增加;  $p_1, p_2$  强调广告投入量相应对手的销售额作增量调整, 为了方便, 令

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1 B, & h_2 &= p_2 B \\ j_1 &= p_1 B, & j_2 &= p_2 B \end{aligned} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)中, 再将所得值代入式(1), 可以得到映射

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= p_1 x_t + k_1 (h_1 x_t + j_1 y_t) (1 - x_t) - \\ &\quad k_2 (h_2 y_t + j_2 x_t) x_t \\ y_{t+1} &= p_2 y_t + k_2 (h_2 y_t + j_2 x_t) (1 - y_t) - \\ &\quad k_1 (h_1 x_t + j_1 y_t) y_t \end{aligned} \quad (5)$$

记  $T(x_t, y_t) = (x_{t+1}, y_{t+1})$ , 且  $T: R^2 \rightarrow R^2$ . 令  $T(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$ , 可以求出映射(5)有 3 个不动点:  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1$  和  $E_2$ . 有 8 个参数的  $E_1$  和  $E_2$  的解析解非常复杂. 由参数的取值范围大致可以推算出  $E_1$  和  $E_2$  只有一个点在  $[0, 1]$  内, 另一个不动点在这个范围外. 并且可以通过求解 Jacobian 矩阵特征值的方法得出  $E_0$  是不稳定的.

## 2 对称结构的动态特性

如果映射(5)中两个竞争对手的参数相同, 即模型描述的特征两个竞争者相同, 则可得到一个对称的二维映射. 令  $a_1 = a_2 = a, k_1 = k_2 = k, h_1 = h_2 = h, j_1 = j_2 = j$ , 代入式(5), 可得

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= p x_t + k (h x_t + j y_t) (1 - x_t) - \\ &\quad k (h y_t + j x_t) x_t \\ y_{t+1} &= p y_t + k (h y_t + j x_t) (1 - y_t) - \\ &\quad k (h x_t + j y_t) y_t \end{aligned} \quad (6)$$

$x$  与  $y$  互换位置映射(6)不变, 所以映射(6)关于对角线对称.

### 2.1 不变集

对于映射  $T: R^2 \rightarrow R^2$ , 如果存在集合  $V \subset R^2$ , 满足  $V$  是  $R^2$  上的闭集, 且  $T(V) = V$ , 则  $V$  是映射  $T$  的不变集. 可行解域定义为映射中的变量符合经济意义的取值范围, 在这里是  $(x, y) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$ . 由上述定义, 有关于不变集的定义<sup>[9]</sup>.

**定理 1** 映射(6)在可行解域  $(x, y) \in D$  中的不变集是  $x = 0, y = 0, x = 1$  和  $x + y = 1 + \frac{-1}{k(h+j)}$ .

**证明** 分别将  $x_t = x_t, y_t = -x_t$  和  $x_t = 1 + \frac{-1}{k(h+j)} - x_t$  代入映射(6), 得到

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= [p + k(h+j)] x_t - \\ &\quad 2k(h+j) x_t^2 = y_{t+1} \\ x_{t+1} &= (p + k(h-j)) x_t \\ y_{t+1} &= - (p + k(h-j)) x_t \\ x_{t+1} &= (1 - 2kj) x_t + jk + \frac{-1}{h+j} j \\ y_{t+1} &= (2kj - 1) x_t - jk + \\ &\quad \frac{(2j - j + h)k + -1}{k(hj)} \end{aligned}$$

它们满足  $x_{t+1} = y_{t+1}, x_{t+1} = -y_{t+1}$  和  $x_{t+1} + y_{t+1} = 1 + \frac{-1}{k(h+j)}$ , 对于映射  $T$  不变, 符合不变集定义, 因此定理 1 成立. 证毕

### 2.2 对称结构中的混沌同步

在二维映射中, 两个变量的动态行为之间有 3 种关系<sup>[10]</sup>:

1) 完全不相关. 两个变量的运动各自呈现混沌特性, 并且在每个时间周期中, 它们之间的运动状态没有任何关联, 不能从其中一个已知变量推测出另一个变量的运动状态, 在二维相空间  $(x, y)$  中它们的运动轨迹充满了相空间的区域.

2) 有关联的混沌. 两个变量的运动都呈现混沌特性, 如果在一个时间周期  $t$  中,  $x_t, y_t$  表示它们的运动状态, 则  $x_t, y_t$  之间的关系可以用一个函数表示, 例如  $y_t = f(x_t)$  或者  $x_t = f(y_t)$ . 它们的混沌吸引子, 在二维空间中大致分布在一条一维曲线周围.

3) 混沌同步. 混沌关联性的一个极端情况是同步. 混沌的轨线最终嵌入到一个一维的不变子流形  $(x, y)$  中, 由对角线外的点  $(x_t, y_t)$  出发的轨线, 如果满足当  $t \rightarrow \infty$  时,  $|x_t - y_t| \rightarrow 0$ , 则称此二维映射的两个变量同步.

#### 2.2.1 同步混沌的数值结果

在一定参数范围内, 映射(6)的变量  $x, y$  各

自具有混沌动态特性,对  $x$ 、 $y$  分别作相对于  $j$  的分岔图(图 1). 映射中控制参数选取讨论:取  $h$  为 4, 可以这样考虑,当人口总数  $B$  为 50(单位设为百万),商品价格  $p$  是 0.2(单位设为元),  $a$  等于 0.4

时,  $h$  为 4(百万). 在图 1 中  $j$  的取值范围为 0 到 2.4. 可以看到,当参数  $j$  变化到大约 1.8 时,系统进入混沌状态,而且这两个分岔图基本相同,表明系统(6)混沌同步.

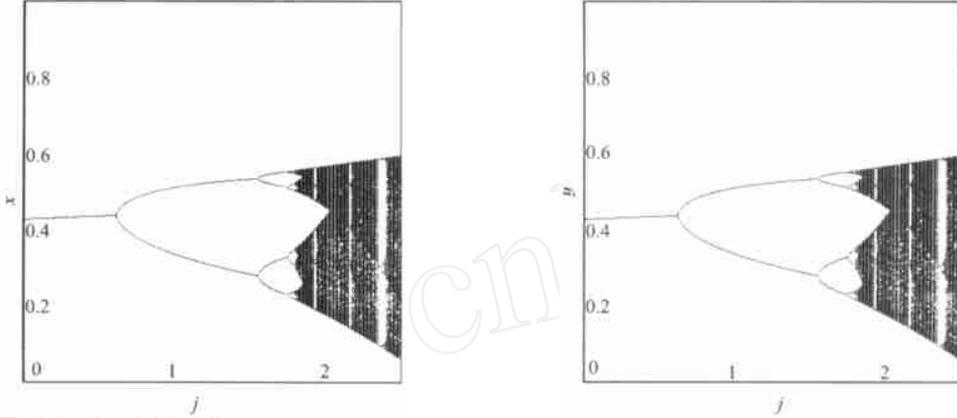
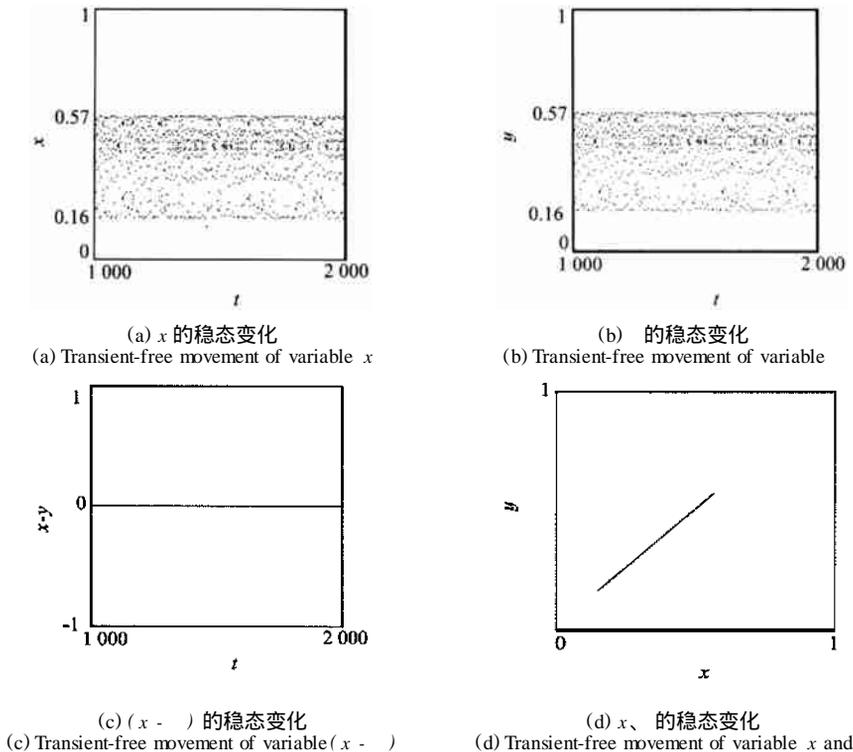


图 1 参数  $a = 0.7, k = 0.5, h = 4, j = 2$  时,变量  $x, y$  对参数  $j$  的分岔图

Fig. 1 Bifurcation diagram of the variable  $x, y$  versus parameter  $j$  with the parameters  $a = 0.7, k = 0.5, h = 4, j = 2$

选取系统(6) 1 000 步到 2 000 步的迭代值(此时系统参数为  $a = 0.7, k = 0.5, h = 4, j = 2$ ). 在二维空间  $(x, y)$  中,作图 2(a) —(d). 取 1 000 步迭代后的点是为了排除系统的暂态行为,考察系统进入稳定状态后的特性. 图 2(a)、(b) 分别是  $x, y$  相对于迭代时间在平面上分布的点. 从图 2(d) 可看出系统的

相图最终收敛于空间的一条直线  $x = y$ , 因此  $x, y$  同步,也就是在任意时刻,两种商品的销售量相等. 同步性还可以在图 2(c) 中看到,  $(x - y)$  相对于时间  $t$  是一条为零的直线. 实际上,如果两个竞争对手的状态相同并采取相同的竞争策略,往往它们的竞争结果也相同,即销售量相同.



(a)  $x$  的稳态变化  
(a) Transient-free movement of variable  $x$

(b)  $y$  的稳态变化  
(b) Transient-free movement of variable  $y$

(c)  $(x - y)$  的稳态变化  
(c) Transient-free movement of variable  $(x - y)$

(d)  $x, y$  的稳态变化  
(d) Transient-free movement of variable  $x$  and  $y$

图 2 变量  $x, y$  的稳态变化趋势图

Fig. 2 Transient-free trend diagram of variables  $x$  and  $y$

### 2.2.2 混沌同步的理论分析

考虑系统(6)在对角线  $x =$  上的动态特性, 令  $x_t = x_t$ , 系统(6) 变为一维映射

$$x_{t+1} = [ + k(h + j) ]x_t - 2k(h + j) x_t^2 \tag{7}$$

用  $A_s$  表示映射(7) 在一维空间的吸引子, 映射(7) 决定了系统在对角线上的动态特性. 映射(7) 拓扑共轭于标准的 Logistic 映射<sup>[9,11,12]</sup>. 令

$$\mu = + k(h + j) \tag{8}$$

并且进行代数变换  $x = \frac{+k(h+j)}{2k(h+j)} z$ , 可将映射(7) 变为标准的 Logistic 映射  $z_{t+1} = \mu z_t(1 - z_t)$ . 把状态变量限制在一维不变集 上(初始值在不变集上), 当  $\mu = \mu$  3.569 945 6 时, Logistic 映射将从倍周期分岔进入到混沌状态<sup>[9,12]</sup>, 根据式(8), 可以计算出在给定  $a, k, h$  的情况下, 混沌出现点的值:  $j = 1.739 87$ , 对应图 1 中的估计值  $j = 1.8$ . 此外, 根据 Logistic 映射确定吸引子在不变集上的范围<sup>[12]</sup>, 对应图 2 中的  $x [0.16, 0.57]$ .

对角线  $x =$  是二维系统的不变集, 只要系统的初始值在对角线上, 系统轨道就不会离开不变集. 这样的同步能不能在横向的小扰动下稳定? 需要对混沌同步的横向稳定性进行分析. 首先计算系统(6) 的 Jacobian 矩阵, 并令  $= x$

$$DT(x, x) = \begin{bmatrix} l(x) & m(x) \\ m(x) & l(x) \end{bmatrix}$$

其中:  $l(x) = + kh - 3k(h + j)x$ ;  $m(x) = kj - k(h + j)x$ . 此时, Jacobian 矩阵的特征值为

$$= + kh + kj - 4hkx - 4jkx, \text{ 对应的特征}$$

向量是  $r = (1, 1)$

$$= + kh - kj - 2kx - 2jkx, \text{ 对应的特征}$$

向量是  $r = (-1, 1)$

定义横向 Lyapunov 指数

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln | + kh - kj - 2k(h + j) x_t | \tag{9}$$

取  $x_0 \in A_s, x_t$  是映射(7) 上的混沌轨道. Lyapunov 横向指数表示: 在与不变集垂直的方向上加一微小的扰动(使  $|x - | > 0$ ), 这一微小的扰动引起的轨道离开不变集垂直方向的平均指数距离. 所以系统(6) 的混沌同步稳定性可以用横向 Lyapunov 指数来判定<sup>[13~15]</sup>. 如果横向 Lyapunov

指数小于零, 则系统横向稳定, 此时在不变集上的吸引子, 不但是一维映射(7) 的吸引子, 也是二维映射(6) 的吸引子. 反之如果  $L > 0$ , 系统(6) 的轨线受扰离开对角线后就会发散, 不再回到对角线上, 同步不稳定.

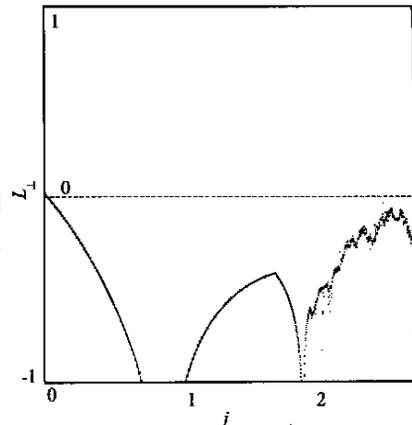


图 3 L 的变化趋势

Fig. 3 Variation of transverse Lyapunov exponent L with the parameter j

由于 L 由各参数和映射(7) 决定的  $x$  轨道确定, 所以可以求出  $L < 0$  的参数范围, 这个参数范围与  $x$  在映射(7) 上的轨道有关. 理论上,  $n$  时,  $x$  处于混沌状态的轨线与  $x$  的初始值无关, 所以 L 与初值无关. 故设定一个较大的迭代步数可以近似得到 L, 取  $a = 0.7, k = 0.5, h = 4, j = 2$ , 除去前面的  $10^4$  个点, 用后面  $10^5$  个点计算出 L, 发现在  $0 < j < 2.6$  范围内,  $L < 0$ , 如图 3. 从而, 可以判定在上述参数范围内,  $L < 0$ , 系统混沌同步稳定.

### 3 结论

通过计算机仿真和数学分析, 本文得出对称模型中存在令人惊叹的稳定的混沌同步. 混沌性表明市场行为的不可长期预测性和初值敏感性. 市场变化的轨迹在图 2(a)、(b) 所示的区间  $[0.16, 0.57]$  上稠密, 同步性表明两种产品的市场占有率即使初始值不同, 经过几个周期的市场作用, 也将趋于一致, 两个企业的广告竞争并不能分出胜负. 增加广告投入, 只会引起市场剧烈波动(进入混沌状态), 而平均销量并没有增加. 显然应该避免产生这样的结果. 因此, 为避免广告战, 只需投入适量广告宣传产品, 扩大顾客群.

## 参 考 文 献:

- [1]席酉民,陆晓明. 广告的动态最优控制模型[J]. 系统工程理论与实践, 1998, (8): 11—18.  
Xi Youmin, Lu Xiaoming. Dynamic optimal control models in advertising[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 1998, (8): 11—18(in Chinese).
- [2]Nerlove M, Arrow KJ. Optimal advertising policy under dynamic conditions[J]. *Economica*, 1962, 29: 129—142.
- [3]Vidale ML, Wolfe H B. An operations research study of sales response to advertising[J]. *Operations Research*, 1957, 5(3): 370—381.
- [4]Chintagunta P, Vilcassim N J. An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly[J]. *Management Science* 1992, 38 (9): 123—124.
- [5]张纪康. 广告经济学实用教程[M]. 上海:上海远东出版社, 1998. 157—178.  
Zhang Jikang. The Utility Tutorial of Advertising Economics[M]. Shanghai: Shanghai Far East Publishing Company, 1998. 157—178(in Chinese).
- [6]盛昭瀚,马军海,陈国华. 管理科学:面对复杂性 II——经济时序动力系统分形及混沌特性分析研究[J]. 管理科学学报, 1998, 1(4): 15—19.  
Sheng Zhaohan, Ma Junhai, Chen Guohua. Management science to face with complicated problems-study on some problems about fractal and chaotic of the economic dynamical time series[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 1998, 1(4): 15—19(in Chinese).
- [7]马军海,盛昭瀚. 经济系统混沌时序重构的分析和应用[J]. 管理科学学报, 2002, 5(3): 73—78.  
Ma Junhai, Sheng Zhaohan. Study of reconstruction of chaotic economic time series and its applications[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2002, 5(3): 73—78(in Chinese).
- [8]Wang Dingwei, Ip W H, Yung KL. Advertising Strategy Analysis for Enterprise in Duopoly[R]. Shanghai: Preprint of International Symposium on Complexity Science, 2002. 223—229.
- [9]盛昭瀚,马军海. 非线性系统分析引论[M]. 北京:科学出版社, 2001. 44—63.  
Sheng Zhaohan, Ma Junhai. Theory of Nonlinear Dynamic Systems Analysis[M]. Beijing: Science Publishing Company, 2001. 44—63(in Chinese).
- [10]Bischi G I, Stefanini L, Gardini L. Synchronization, intermittency and critical curves in a duopoly game[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1998, 44: 559—585.
- [11]Devaney R I. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems[M]. Menlo Park: Benjamin/Cummings Publishing Co, 1989.
- [12]Hiborn Robert C. Chaos and Nonlinear Dynamics[M]. 2 edition. London: Oxford University Press, 2000. 163—183.
- [13]Lora B, James H, Eric P. Lyapunov exponents, singularities, and a riddling bifurcation[J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79 (6): 1018—1022.
- [14]Ying-Cheng L. Symmetry-breaking bifurcation with on-off intermittency in chaotic dynamical systems[J]. *Physical Review(E)*, 1996, 53(5): 4267—4270.
- [15]Popovych O, Maistrenko Y, Mosekilde E, et al. Transcritical loss of synchronization in coupled chaotic systems[J]. *Physics Letters(A)*, 2000, 275: 401—406.

## On analysis of chaotic synchronization in advertising competition model

QI Jie, WANG Ding-wei

Institute of Systems Engineering, School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China

**Abstract:** This paper presented a two-dimensional discrete dynamic competitive model in advertising based on the classic V-W model, namely the sales-advertising response model. In the duopoly market, goods produced by two companies are exchangeable, and so in order to increase sales they have to lend advertising to attract customers. Since advertising expenditures were used as control variable in this paper, the model could be regarded as a linear feedback control system. By means of mathematic analyzing and numerical computing, it can be obtained that two state variables is chaotic synchronization under certain parameters regions. Furthermore, the stability of the chaotic synchronization was also analyzed.

**Key words:** advertising; competition; dynamic model; chaotic synchronization