

动态消费者选择模型及贴现因子的确定

李纯青^{1,2}, 徐寅峰³

(1. 清华大学经济管理学院, 北京 100084; 2. 西安工业学院经济管理学院, 西安 710032;
3. 西安交通大学管理学院, 西安 710049)

摘要: 在分析零售企业与消费者之间的交易特点及消费者行为特征的基础上, 提出了动态消费者选择模型, 通过比较常用的固定贴现因子法和参数评估法, 提出用异质偏好函数法来确定动态消费者选择模型的贴现因子, 并将该方法用于一个超市的数据库中, 验证了异质偏好函数法确定贴现因子比前两种方法的优越性, 还讨论了三种方法的使用原则. 同时, 提出了在考虑客户偏好异质性时, 对消费者选择建模时所应考虑的主要变量.

关键词: 贴现因子; 偏好异质性; 最大似然函数; 消费者效用

中图分类号: F224

文献标识码: A

文章编号: 1007-9807(2005)03-0050-06

0 引言

消费者选择模型在动态客户关系管理中是一种有效且实用的市场研究技术. 其原理是在实验设计的基础上, 通过模拟所要研究的产品/服务市场竞争环境, 测量消费者的购买行为, 获知消费者如何在不同产品/服务属性水平和价格条件下进行选择^[1]. 在描述消费者行为的模型中, 常用的有静态与动态两种模型. 静态模型在建立消费者效用模型时, 只考虑消费者的当期效用, 不考虑当期决策对未来的影响; 而动态模型将消费者看成是动态决策者, 在决策时, 不但考虑当期效用, 而且考虑当期决策给未来带来的影响. 研究表明, 动态模型在很多方面(如模型的适应性、数据拟合性)比静态模型有优势^[2~5], 但动态模型中有一个贴现因子 δ 的确定问题, 且 δ 在消费者选择模型中起着比较重要的作用, 直接影响企业对消费者的最优决策. 大部分文献^[2, 4~8]对该因子的确定均使用了相同的方法: 将贴现因子当作固定常数(月贴现因子为0.991, 或星期贴现因子为

0.998, 于是客户的未来效用就以每年10%的贴现率进行贴现)处理, 效果并不理想. 也有人提出使用参数评估法^[2], 但该方法易导致不收敛问题, 所以很少有人尝试. 本文研究动态客户关系管理中消费者选择衍生的一个较为关键的问题, 研究发现, 不同的确定 δ 的方法得出的结果是不同的, 并且如果考虑客户的偏好异质性, 即将 δ 作为客户特性(年龄、性别和年收入)的函数进行评估时, 其结果要比前两种方法优越.

本文还针对零售业提出一个具体的消费者选择模型, 来说明贴现因子在该模型所起的作用与地位, 并提出常用的确定贴现因子的方法以外的异质偏好函数法, 并对所提出的方法进行验证, 给出评估结果及研究结论.

1 动态消费者选择模型

1.1 企业与消费者的反复交互作用

假设所研究的零售企业是一个独家垄断的超市(这在一些大、中城市, 方圆4、5 km只有一家超

收稿日期: 2003-05-15; 修订日期: 2005-01-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371094; 70121001); 陕西省自然科学基金资助项目(02G11; 03G07); 陕西省教育厅专项基金资助项目(02JK009; 03JK176).

作者简介: 李纯青(1970—), 女, 河南南阳人, 博士后, 教授.

市的现象是很普遍的),这种假设主要是为了方便将注意力集中在所研究的问题上.假定所研究的对象是零售企业的单个消费者,在每个时间周期内企业决定是否给消费者实施营销组合策略,而客户以购买的形式决定是否进行反应.企业与客户反应之间的交互是以这种方式在每一个周期内重复进行的.零售业出售的商品是非季节性产品,这种商品具有以下特性:是经常被购买的;是有品牌的;是耐储藏的;是受价格促进影响的,所以在不同时期消费者购买同样商品的效用是相同的.

客户的目标是在每一期做出购买或不购买的决策时使自己的长期效用最大,当客户做出决策时,不但考虑当前购买或不购买的效用,而且还考虑当前行为对未来决策的影响.

1.2 消费者的目标函数

消费者的目标函数是时间范围上一个期望的贴现效用

$$E\left(\sum_{t=1}^{t-1} \frac{1}{c} u_{it} d_{it}\right) \quad (1)$$

这里: c 是客户的贴现因子; u_{it} 是客户 i 在第 t 期从购买中获得的效用; d_{it} 是一个表示反应的二元 $(0, 1)$ 变量, d_{it} 为 1 表示购买, d_{it} 为 0 表示不购买(为方便问题的处理,这里将实际情况中的购买决策进行了简化(每次只购买一种商品),但并不影响问题的结论.实际情况可能是消费者除了购买与不购买的决策外,还有购买多少、什么品牌等,不管怎样,这些决策都是互斥的,每次消费者的选择应该是唯一的,因此决策空间是多维的而不是二维的).根据零售业数据的特性,时间周期以月为单位,由于寿命(以月来计量)是一个很长的时间,所以可以将时间轴看成是无限长的.

1.3 消费者的状态空间

在度量购买行为的主要特性中,细分客户的基础是流失时间(recency)、购买次数(frequency)、购买金额(monetary value)、即 RFM 方法^[9].该方法最早是在直销行业发展起来的^[10],最近也用在其他行业客户行为的描述上^[4].在本文的模型中,将状态变量定义为流失时间 r_{it} ,即距最近一次购买的时间间隔,以及客户的连续购买次数 f_{it} (为方

便评估,没有涉及购买金额,这并不影响所研究问题的结论).

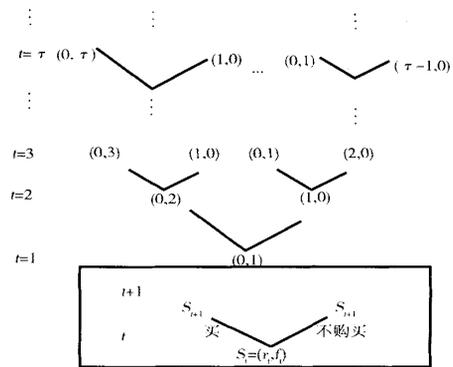
单个客户 i 的流失时间及购买次数以马尔可夫转变过程演变.流失时间随着一次购买($d_{it} = 1$)而置为 0,否则($d_{it} = 0$)递增 1

$$r_{i,t+1} = \begin{cases} 0 & \text{如果 } d_{it} = 1 \\ r_{it} + 1 & \text{如果 } d_{it} = 0 \end{cases} \quad (2a)$$

购买次数随着一次购买($d_{it} = 1$)而递增 1,否则($d_{it} = 0$)置为 0

$$f_{i,t+1} = \begin{cases} f_{it} + 1 & \text{如果 } d_{it} = 1 \\ 0 & \text{如果 } d_{it} = 0 \end{cases} \quad (2b)$$

对于一个第 1 次从这个企业中购买的客户,其流失时间设为 0,购买次数设为 1,从此,就收集这些客户的数据.以 $S_{it} = \{r_{it}, f_{it}\}$ 表示状态空间.图 1 为状态空间的图表.



注: 流失时间 r_{it} 及连续购买次数 f_{it} 两个变量对在每一个 $t = 1, \dots, T$ 期具有 $2(t - 1)$ 种不同的状态($t = 1$ 时除外, $t = 1$ 时,只有一种状态). 状态空间元素满足以下条件: 或者 $r_t = 0$ 且 $f_t = t$; 或者 $0 < r_t + f_t \leq t - 2$ 且 $r_t \times f_t = 0$; 或者 $r_t = t - 1$ 且 $f_t = 0$.

注: 流失时间 r_{it} 及连续购买次数 f_{it} 两个变量对在每一个 $t = 1, \dots, T$ 期具有 $2(t - 1)$ 种不同的状态($t = 1$ 时除外, $t = 1$ 时,只有一种状态). 状态空间元素满足以下条件: 或者 $r_t = 0$ 且 $f_t = t$; 或者 $0 < r_t + f_t \leq t - 2$ 且 $r_t \times f_t = 0$; 或者 $r_t = t - 1$ 且 $f_t = 0$.

图 1 状态空间结构

Fig. 1 The state space diagram

在 t 时刻,对于单个客户 i 的营销组合策略的决策是一个二元变量,即

$$mms_{it} = \begin{cases} 1 & \text{如果时刻 } t \text{ 对客户 } i \\ & \text{实行营销组合策略} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3)$$

当然,营销组合变量也可以是超过二维的多

贴现因子 = $1 / (1 + \text{贴现率})$.

崭新度代表距上次购买的流失时间、购买次数、过去购买的次数或整个时间周期内购买的比例,购买金额是至今为止所花费的金额或至今为止每次购买的平均金额.具体应根据所研究的问题及行业的数据特性确定.

维变量(如实行定价、发信、忠诚计划、优惠券、免费送货等营销组合策略,但注意在具体建模时要保证这些策略之间的互斥性),对该问题的简化处理只是为了方便评估,不影响所研究问题的结论.

1.4 消费者的效用方程及价值函数

根据客户是否享受营销组合策略,可以建立客户购买效用方程

$$u_{it} = \alpha + \beta mms_{it} + \gamma_1 r_{it} + \gamma_2 r_{it}^2 + \beta \ln(f_{it} + 1) + \epsilon_{it} = \bar{u}_{it} + \epsilon_{it} \quad (4)$$

式中: \bar{u}_{it} 表示效用方程中的确定部分; ϵ_{it} 表示未观察到的误差项. 式(4)的构建利用了 Gonul^[2] 的研究成果,即对于非季节性产品来说,消费者效用与流失时间有 U 型曲线的关系,这种关系在作者的一项关于零售业的研究中得到了证实^[11],消费者效用与连续购买次数之间的关系,运用了 Lewis^[4] 对零售业中消费者的研究成果,即两者之间是对数关系,这种关系在本文应用分析中也得到了验证. 至于参数评估时效用方程中各参数的符号的假定参考了文献^[11]的方法.

公式(1)的最大化可以通过选择最优控制变量序列 $\{d_{it}\}$ 来实现,通过使用最优性原理,不考虑初始状态及决策,只考虑当前的状态,剩余的决策一定是最优的^[12]. 当前的效用 u_{it} 与第 $t + 1$ 期以后的各期对未来期望的折现价值 $EV_{i,t+1}(S_{i,t+1})$ 的和,组成第 t 期的价值函数 $V_{it}(S_{it})$,即

$$V_{it}(S_{it}) = \begin{cases} \bar{u}_{it} + \beta EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 1) + \epsilon_{it} & \text{如果 } d_{it} = 1 \\ \beta EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 0) & \text{如果 } d_{it} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

这里状态变量依照等式(2)进行演变.

对于购买概率,研究人员并不能观察到随机部分的分布,但可以根据数据评估出客户从企业购买或不购买的概率. 于是,反应(购买)的概率为

$$\begin{aligned} Prob_{it}(d_{it} = 1 | S_{it}, mms_{it}) &= \\ & \frac{Prob(\bar{u}_{it} + \beta EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 1) + \epsilon_{it} > \\ & \beta EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 0))}{\left[Prob(\bar{u}_{it} + \beta (EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 1) - EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 0))) \right]} \end{aligned} \quad (6)$$

这里, Φ 是标准正态累积分布函数. 不反应的

$$\begin{aligned} Prob_{it}(d_{it} = 0 | S_{it}, mms_{it}) &= \\ & 1 - Prob_{it}(d_{it} = 1 | S_{it}, mms_{it}) \end{aligned}$$

采用文献^[1]的方法,可以得出客户的最大期望价值函数为

$$\begin{aligned} EV_{it}(S_{it}) &= Prob_{it}(d_{it} = 1 | S_{it}, mms_{it}) \times \\ & \left[\bar{u}_{it} + \beta EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 1) \right] + \\ & Prob_{it}(d_{it} = 0 | S_{it}, mms_{it}) \times \\ & \left[\beta EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 0) + \right. \\ & \left. \beta (EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 0) - EV_{i,t+1}(S_{i,t+1} | d_{it} = 1)) - \bar{u}_{it} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

期望的价值函数可以通过递归算法求出.

2 贴现因子 β 的确定

2.1 贴现因子 β 在价值函数中的作用

从公式(7)可以看出,贴现因子在购买、不购买以及误差项的处理中,都起着比较重要的作用,其取值范围是 $0 < \beta < 1$,取值的大小代表着消费者动态导向性的级别. 当 $\beta = 0$ 时,消费者在进行当前决策时,不考虑未来利益的影响. 当 $\beta = 1$ 时,消费者在进行当前决策时,将未来利益与当前利益当成同样重要. β 的值越大,说明消费者在进行当前决策时对未来利益的影响考虑得越多. 也有研究表明,消费者个人关心未来事件,但通常会低估这些未来事件与当前的关系^[13].

2.2 两种不同的确定贴现因子的方法

2.2.1 固定贴现因子法

在动态消费者选择模型中,大部分研究将固定贴现因子法作为常用的贴现因子 β 的确定方法^[2,4,6~8],即将所有客户的贴现因子都设为月贴现因子为 0.991(或星期贴现因子为 0.998),于是客户的未来效用就以每年 10% 的贴现率贴现. 也有学者建议 β 的取值范围在 0.8 ~ 0.95 之间^[14].

2.2.2 参数评估法

参数评估法是将 β 与消费者效用方程中其他参数一样进行评估,其原理是基于计量经济中的 ESDP(estimable structural dynamic programming)模型,该模型利用消费者的实际交易数据,使其样本对数-似然函数最大进行参数评估. 客户 i 在周期 t 的对数-似然函数

$$L_{it} = d_{it} \times \ln(Prob_{it}(d_{it} = 1 | S_{it}, mms_{it})) +$$

$$(1 - d_{it}) \times \ln(\text{Prob}_{it}(d_{it} = 0 / S_{it}, mms_{it})) \quad (8)$$

样本的对数 - 似然函数

$$LL = \prod_{i=1}^I \prod_{t=b_i}^{B_i} L_{it} \quad (9)$$

其中, I 是客户的数量; 周期 $[b_i, B_i]$ 是个体 i 被观察的时间间隔. 从评估原理来看, 这种方法肯定比将 c 当作一个常数来确定的结果要好. 但很少有人采用这种方法, 原因是这种方法容易出现不收敛问题^[2].

2.3 异质偏好函数法

在消费者选择模型中, 将考虑个体行为中存在的偏好异质性作为丰富该领域研究内容的方法之一, 忽视这种偏好异质性会引起预测误差^[15], 所以不同的客户数据, 用来描述客户对未来预期的贴现因子也是不同的, 有必要对消费者的偏好异质性与贴现因子之间关系进行专门的研究, 本文将贴现因子 c 看成是影响偏好异质性因素的一种函数, 在影响偏好异质性因素的选择方面, 借鉴了 Reinartz 等人的研究成果^[16], 但将其提出的“空间位置”变量去掉, 加上“性别”变量, 原因是: 独家垄断的假设使空间位置对于这家超市的长期客户来说是常量; 二是分析超市数据发现, 性别在购买决策中起了较明显的作用. 当然, 也可以根据所研究行业的数据特征改变变量的类型与数目. 通过以上的分析, 可以将 c 当作反映客户特性的主要变量(年龄、性别和年收入)的函数来进行评估, 其表达式为

$$c = 0 + \text{sex} \cdot \text{sex} + \text{ge} \cdot \text{ge} + \text{inc} \cdot \text{inc} \quad (10)$$

其中: 性别变量的表达式为

$$\text{sex} = \begin{cases} 0 & \text{男} \\ 1 & \text{女} \end{cases} \quad (11)$$

年龄变量的表达式为

$$\text{ge} = \begin{cases} 0 & \text{青年} \\ 1 & \text{中年} \\ 2 & \text{老年} \end{cases} \quad (12)$$

年收入变量的表达式为

$$\text{inc} = \begin{cases} 0 & \text{低收入} \\ 1 & \text{中等收入} \\ 2 & \text{高收入} \end{cases} \quad (13)$$

这样就可以根据消费者的数据, 将异质偏好函数中的参数与消费者效用方程中的参数一起进行评估, 进而得出消费者的价值函数.

3 实际应用分析及评估结果

3.1 数据描述

通过某超市的消费者交易数据来验证以上观点. 所采集的数据集来自一个超市集团的长期客户对某一商品(这里选择的是宝洁公司生产的洗发水——海飞丝)从 1999 年 1 月到 2001 年 6 月(30 个月)的购买历史数据. 所选择的商品全年消费并符合前述的四个特性. 将 1999 年 1 月开始第 1 次购买该商品的客户作为研究对象, 共获得 30 期的购买历史, 有 500 个客户符合选择要求, 其数据特性如表 1 所示.

表 1 样本统计

Table 1 Summary statistics

样本特性	mean	std. dev.	min	max
单个客户的购买次数	5.09	2.21	1	14
单个客户收到的信息次数 ($m = 1$)	8.57	2.68	2	18
243 个男客户的购买次数	4.52	1.85	1	11
257 个女客户的购买次数	5.61	2.40	1	14
138 个低收入的客户的购买次数	4.51	1.91	1	12
238 个中等收入的客户的购买次数	5.08	2.18	1	12
124 个高收入的客户的购买次数	5.69	2.48	1	14
118 个青年客户的购买次数	5.84	2.43	1	12
246 个中年客户的购买次数	5.02	2.06	1	14
136 个老年客户的购买次数	4.52	2.16	1	11
两次购买的时间间隔 / 月	5.46	5.57	1	29
单个客户连续购买的次数	1.06	1.29	0	8
单个客户 $d = 1$ 时的 r 值	4.70	5.53	0	29
单个客户 $d = 1$ 时的 f 值	0.37	0.72	0	5

注: 样本中的客户总数为 500. 总共观察到的数据个数为 15 000.

这里主要是为了探讨确定贴现因子的方法, 为方便评估, 采用简单的线性关系, 并忽略了其他因素带来的误差

3.2 三种方法的比较与评估结果

三种方法从不同的角度给出了确定 c 的方法,从第2部分的分析可以看出,三种方法各有特点,固定贴现因子法比较简单,但没有考虑不同的数据及行业消费者的贴现因子是不同的,即使是相同的行业,不同的数据库消费者的特性也是不同的,所以,以一种固定的贴现因子来代表所有客户的特性是不合适的. 参数评估法能够更好地拟合数据库的数据,但没有考虑客户的异质偏好性,即不同的年龄段、不同的收入水平及不同性别的客户对未来的预期是不同的. 根据实际数据,三种评估方法的结果也是不同的,从表2可以看出,参数评估法要比固定贴现因子法好,并且对于该数据库来说,宜采用0.7的贴现因子;从对数-似然函数值及AIC来看,异质偏好函数法比参数评估法的结果好. 三种方法需要评估的参数也是不同的,固定贴现因子法需要评估5个参数,参数评估法比固定贴现因子法多评估1个参数(将 c 当作参数来评估),而异质偏好函数法除了参数评估法的6个参数外,还要再评估3个反映异质偏好的参数,计算复杂程度高于前两种方法,尽管用参数评估方法容易导致不收敛的问题,但在实际应用分析中,并没有遇到不收敛的问题,不但评估结果要好于固定贴现因子法的结果,而且由于只增加了一个参数,计算复杂程度并没有提高很多.

根据实际应用的结果,可以得到结论:将贴现因子当作变量带来模型不收敛的问题时,宜采用固定贴现因子法;否则,在消费者的效用方程比较简单的情况下,宜采用异质偏好函数法;在消费者的效用方程比较复杂的情况下,宜采用参数评估法.

参考文献:

- [1] Kenneth Train. Discrete Choice Methods with Simulation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [2] Gönul Fusun, Meng Zeshi. Optimal mailing of catalogs: A new methodology using estimable structural dynamic programming models [J]. Management Science, 1998, 44 (9): 1249—1262.
- [3] Gönul Fusun, Srinivasan Kannan. Estimating the impact of consumer expectations of coupons on purchase behavior: A dynamic structural model[J]. Marketing Science, 1996, 15(3): 262—279.
- [4] Lewis Michael V. Applications of Dynamic Programming to Customer Management[D]. Evanston/ Chicago: Northwestern University, 2001.

表2 三种评估方法的结果与比较

Table 2 The estimation results of three ways

参数	固定贴现因子法 (0.991)	参数评估法 (0.7)	异质偏好函数法
	- 1.28	- 1.3	- 1.16
mms	0.38	0.34	0.323
$1r$	- 0.025	- 0.029	- 0.078 2
$2r$	0.002	0.002 2	0.004 5
f	0.36	0.44	0.316
c		0.7	
θ			0.38
sex			0.25
age			- 0.19
inc			0.13
LL	- 5 842.5	- 5 821.95	- 5 807.17
AIC	11 695	11 655.9	11 632.3
BIC	11 733.08	11 701.59	11 700.88

4 结 论

动态消费者选择模型是一种有效的进行定量客户关系管理的技术. 在考虑客户偏好异质性地, 贴现因子与消费者的年龄、性别及年收入有关. 与常用的两种确定贴现因子的方法相比, 本文提出的异质偏好函数法比参数评估法优越, 参数评估法在收敛的情况下比固定贴现因子法优越. 在具体问题中应遵循以下原则来确定贴现因子: 当将贴现因子当作变量会带来模型不收敛的问题时, 可采用固定贴现因子法; 在消费者的效用方程比较简单的情况下, 宜采用异质偏好函数法; 在消费者的效用方程比较复杂的情况下, 可采用参数评估法. 当然, 异质偏好函数法尽管很好地拟合了数据库, 但由于参数个数的增加, 增加了计算的复杂性.

- [5] Erdem Tulin, Keane Michael P. Decision-making under uncertainty: Capturing dynamic brand choice processes in turbulent consumer goods markets[J]. *Marketing Science*, 1996, 15(1): 1—20.
- [6] Wolpin K I. An estimable dynamic stochastic model of fertility and child mortality[J]. *Journal of Political Economy*, 1984, 92: 852—847.
- [7] Gönul F. Dynamic labor force participation decisions of males in the presence of layoffs and uncertain job offers[J]. *Journal of Human Resources*, 1989, 24(2): 195—220.
- [8] Hotz V J, Miller R A. Conditional choice probabilities and the estimation of dynamic models[J]. *Review of Economic Studies*, 1993, 60: 497—529.
- [9] Bitran G R, Mondshein S V. Mailing decisions in the catalog sales industry[J]. *Management Science*, 1996, 42(9): 1364—1381.
- [10] Dwyer F. Customer lifetime value to support marketing decision making[J]. *Journal of Direct Marketing*, 1989, 8(2): 73—81.
- [11] 李纯青, 姬升良, 董铁牛. 动态客户关系管理的建模及应用[J]. *西安工业学院学报*, 2003, 23(4): 355—360.
Li Chunqing, Ji Shengliang, Dong Tieni. Empirical study on a DCRM model[J]. *Journal of Xi'an Institute of Technology*, 2003, 23(4): 355—360.
- [12] Bellman Richard. *Dynamic Programming*[M]. Princeton: Princeton University Press, 1957.
- [13] Soman Dilip. The Effect of Time Delay on Multiattribute Choice[R]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 2002.
- [14] Loewenstein, Drazen Prelec. Anomalies in intertemporal choice: Evidence and an interpretation[A]. In: Loewenstein G, Elster J. eds. *Choice over Time*[C]. New York: 1992. 119—146.
- [15] Walker Joan Leslie. *Extended Discrete Choice Models: Integrated Framework, Flexible Error Structures, and Latent Variables*[D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2001. 23.
- [16] Reinartz Werner J, Kumar V. The Impact of Customer Relationship Characteristics on Profitable Lifetime Duration[R]. INSEAD R&D, Fontainebleau: INSEAD Association, 2001.

Determining of consumer choice models and discount factor

LI Chun-qing^{1,2}, XU Yin-feng³

1. School of Economics & Management, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. School of Economics and Management, Xi'an Institute of Technology, Xi'an 710032, China;
3. Management School, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

Abstract: Based on the analysis of the characteristics of dealing between the firm and consumers as well as consumers' behaviors, a dynamic consumer choice model has been presented. Through the comparing of two methods determining discount factor in the models which take it as a constant or a parameter methods, the method of taking the discount factor as the function of consumers' heterogeneity is also presented. Results show that the functional method is better than the other two methods in applicability about the model by simulating with an actual database of a supermarket and discusses the difference principle of the three methods. Besides, the main variables have been given out under the condition of taking account of the consumers' heterogeneity when developing the consumer choice models.

Key words: discount factor; heterogeneity; maximum likelihood; consumer utility