

# 高峰期内公交车均衡乘车行为与制度安排

黄海军<sup>1</sup>, 田琼<sup>1</sup>, 杨海<sup>2</sup>, 高自友<sup>3</sup>

(1. 北京航空航天大学经济管理学院, 北京 100083; 2. 香港科技大学土木工程系, 香港;  
3. 北京交通大学交通运输学院, 北京 100044)

**摘要:** 研究早晨高峰期内出行者由郊区住处乘公交车到达市中心工作地的交通行为, 所建立的均衡乘车行为模型考虑了时间延误成本和车内拥挤成本, 得到了固定需求下的最优发车间隔. 在弹性需求下, 比较了系统最优、垄断和寡头竞争三种不同制度安排下所导致的公交票价、公交车班次数、公司利润和社会净收益等指标.

**关键词:** 交通行为; 均衡乘车模型; 制度安排

**中图分类号:** U491

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1007 - 9807(2005)06 - 0001 - 09

## 0 引言

1969年, 诺贝尔经济学奖得主 Vickrey 应用确定性排队理论, 首次导出了一个令所有出行者具有相同交通费用的内生出发时间选择模型<sup>[1]</sup>, 这就是著名的瓶颈模型. 瓶颈模型考虑一条通行能力有限的公路连接生活区和工作区的情形, 出行者每天早晨使用该路段上下班. 所有出行者都希望在规定上班时间到达工作地, 但受瓶颈能力约束, 必然有一部分人早到或迟到, 并发生相应的延误费用. 出行者通过权衡行驶时间、延误惩罚成本和排队等待时间, 选择令自己的综合出行费用最小的出发时间, 达到平衡态时, 所有人的出行费用相等. 与瓶颈模型相伴的一个重要进展是拥挤道路使用收费理论, 该理论认为, 行驶在拥挤道路上的车辆应支付一定的费用, 才能抵消它所产生的外部不经济 (externality), 实现系统的净收益最大, 对于瓶颈, 则可以消除纯粹属于浪费的排队等待时间<sup>[1]</sup>. 根据经典的边际成本定价理论, 拥挤道路使用所支付的费用 (toll 或 fare) 应等于边际社会成本减去边际个人成本<sup>[2]</sup>, 该理论同样适合于具有一般结构的交通网络<sup>[3]</sup>.

瓶颈模型出现以后, 许多学者扩展了 Vickrey<sup>[1]</sup>的结果, Gazer<sup>[4]</sup>和 Cohen<sup>[5]</sup>分析了拥挤收费的福利影响, Braid<sup>[6]</sup>推导出弹性需求瓶颈的均匀和峰期收费公式, Arnott、De Palma 和 Lindsey<sup>[7~11]</sup>三人小组对瓶颈模型进行了系统的研究, 从多个并行瓶颈问题到第二最优收费问题, Verhoef<sup>[12]</sup>对道路交通中的各种管制措施 (包括拥挤收费) 做了比较严格的经济学原理剖析. 日本学者 Tabuchi<sup>[13]</sup>在一条含瓶颈的公路旁边, 加上一条并行的公交路线, 研究不同收费政策下两种交通方式之间的竞争. Huang<sup>[14]</sup>将 Tabuchi 的工作推广至含两组不同属性人群的情形, 研究了用拥挤收费的收入补贴公交的可能性, 模型中使用了车内体触拥挤函数. Huang<sup>[15]</sup>考虑了两种交通方式在总需求为弹性的情形下, 最优定价与次优定价对人群出行的影响.

但是, Tabuchi<sup>[13]</sup>、黄海军 - Bell - 杨海<sup>[16]</sup>、Huang<sup>[14, 15]</sup>都视公交的服务为一次性连续元素, 没有考虑公交出行的离散班次选择均衡问题, 这正是本文要研究的内容. 本文在建立了均衡乘车行为模型之后, 再分析和比较三种不同的公交系统运作制度.

收稿日期: 2005 - 02 - 28; 修订日期: 2005 - 08 - 08.

基金项目: 国家杰出青年科学基金 (B) 资助项目 (70429001).

作者简介: 黄海军 (1964 -), 男, 湖南人, 博士, 教授, 博士生导师.

### 1 基本模型

考虑一条公交线路连接生活区 H 和工作区 W, 每天早晨有  $N$  个乘客需要乘公共汽车从 H 出发去 W 上班. 为抓住问题的本质, 假设所有出行者同质, 早到或者迟到有相同的时间成本, 公交从 H 到 W 的行驶时间固定 (事实上, 本文所讨论的公交车亦可以是地铁).

乘客的出行总成本是  $C = p + \dots + c_{\text{体触}} + c_{\text{延误}}$ , 其中  $p$  为票价,  $\dots$  为车内时间,  $c_{\text{体触}}$  为乘客的车内体触拥挤成本,  $c_{\text{延误}}$  为时间惩罚成本. 早到,  $c_{\text{延误}} = T$ ,  $T$  是单位早到时间的惩罚成本,  $T$  为早到时间; 迟到,  $c_{\text{延误}} = T$ ,  $T$  是单位迟到时间的惩罚成本,  $T$  为迟到时间. 由于假设所有出行者的车内时间相同、值相等, 则  $\dots$  为常数, 它不产生乘客之间的决策差异, 因此可以设  $\dots = 0$ .

在早上的出行高峰期内, 公交车以间隔时间  $t$  发车, 是离散的. 设均衡状态下  $N$  个出行者需要分乘  $l$  批出发, 不考虑公交车在行驶过程中的超车现象, 那么公交车将以间隔时间  $t$  达到 W. 因为我们研究的对象是高峰期出行者每天的通勤行为, 他们的出行选择可以看作是无限多次博弈的均衡结果, 在发车间隔表确定的情况下, 可以假定他们对交通状况有完全信息, 因此将不存在车站等待列车的现象. 设最早出发的一批有  $n_1$  人, 最晚出发到达 W 的第  $l$  批有  $n_l$  人, 只有一班车准时到达, 早到的车有  $l_e$  班, 迟到的车有  $l_s$  班, 那么  $l = l_e + l_s + 1$ . 设车内拥挤成本函数为  $c_{\text{体触}} = g(n)$ ,  $n$  是一班车内的人数, 假定  $g(n) \geq 0$  是  $n$  的单调递增函数, 且  $g(0) = 0$ . 出行者在不同车次之间进行选择, 由于  $p + \dots$  为常数, 他们实际上是在体触拥挤成本和时间延误成本之间作比较并决定自己的乘车班次. 因为第  $l_e + 1$  批乘客可以准时到达 W, 乘第  $i$  次车出发的乘客的成本为

$$C_i = \begin{cases} p + g(n_i) + (l_e - i + 1)t & i = 1, 2, \dots, l_e \\ p + g(n_i) & i = l_e + 1 \\ p + g(n_i) + (i - l_e - 1)t & i = l_e + 2, \dots, l \end{cases} \quad (1)$$

在均衡状态, 所有人的成本应该相同, 没有人

可以通过单方面改变车次来减少成本, 所以有

$$C_1 = C_2 = \dots = C_l \quad (2)$$

此即

$$\begin{aligned} g(n_1) + l_e t &= \\ g(n_2) + (l_e - 1)t &= \dots = \\ g(n_{l_e}) + t &= g(n_{l_e+1}) = \\ g(n_{l_e+2}) + t &= g(n_{l_e+3}) + 2t = \dots = \\ g(n_l) + l_s t &= C_0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $C_0$  为常数, 表示均衡时乘客的体触拥挤成本和时间延误成本之和, 定义为非票价成本. 基本的均衡模型由下列方程组(4) —(8) 构成

$$g(n_{i+1}) - g(n_i) = t, \quad i = 1, 2, \dots, l_e \quad (4)$$

$$\begin{aligned} g(n_{i-1}) - g(n_i) &= t, \\ i &= l_e + 2, l_e + 3, \dots, l \end{aligned} \quad (5)$$

$$g(n_1) \leq t \quad (6)$$

$$g(n_l) \leq t \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^l n_i = N, \quad n_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (8)$$

其中: 式(4)、(5) 是由式(3) 推出的; 式(6) 保证不会有人先于第 1 班车出发, 否则  $l$  就不是均衡态所需要的班次; 同理, 式(7) 保证不会有人晚于第  $l$  班车出发; 式(8) 是乘客人数的守恒条件.

假设需求足够大、发车间隔足够小, 以致第 1 班车和第  $l$  班车所乘人数几乎达到了其拥挤约束的上限, 即

$$g(n_1) = t \quad (9)$$

$$g(n_l) = t \quad (10)$$

将式(9)、(10) 代入式(3), 得

$$C_0 = (l_e + 1)t = (l_s + 1)t \quad (11)$$

令  $\alpha = \frac{l_e + 1}{l_s + 1} > 1$ , 将式(11) 与  $l = l_e + l_s + 1$  联合, 可得

$$l_e = \frac{l - 1}{\alpha + 1}, \quad l_s = \frac{l - 1}{\alpha - 1} \quad (12)$$

将  $g(n_1) = t$  代入式(4), 得

$$n_i = g^{-1}(i t), \quad i = 1, 2, \dots, l_e + 1 \quad (13)$$

将  $g(n_l) = t$  代入式(5), 得

$$\begin{aligned} n_i &= g^{-1}((l + 1 - i)t), \\ i &= l_e + 2, l_e + 3, \dots, l \end{aligned} \quad (14)$$

将式(13)、(14) 代入式(8), 得

$$g^{-1}(t) + g^{-1}(2t) + \dots + g^{-1}(l_e t) +$$

$$g^{-1}((l_e + 1) t) + g^{-1}(l_s t) + g^{-1}((l_s - 1) t) + \dots + g^{-1}(t) = N \quad (15)$$

显然,若函数  $g(n)$  已知,将式(12)代入式(16),解一元方程就可以求出班次数  $l$ . 对于非线性的拥挤函数,该一元方程的结构很复杂. 假设  $g(n) = n$ , 该一元方程是

$$\frac{l}{2(l+1)}(l+1)^2 = N \quad (16)$$

因此,所需班次数  $l$  是方程(16)的解. 注意:式(16)的意义是,在给定了需求和发车间隔后,所需的班次数由“市场”行为决定,即广大乘客的均衡出行行为决定. 均衡态下的个人出行非票价成本是

$$C_0 = \frac{l}{l+1}(l+1) = \frac{2N}{l+1} \quad (17)$$

其中  $l$  由式(16)给出. 考虑票价后,均衡个人出行成本是

$$C = p + C_0 = p + \frac{2N}{l+1} \quad (18)$$

这是本节的核心结论,在后面各节中将应用这些结论.

## 2 最优发车间隔

令公交线路的建设成本分摊到一个高峰期的部分为  $G$ ,每一班车的可变成本为  $F$ ,每一位乘客的可变成本为  $f$ ,则一个高峰期内系统的总成本为

$$TSC = N(C_0 + f) + lF + G \quad (19)$$

在  $N$  确定的情况下给定一个发车间隔  $t$ ,就有均衡乘车状态的班次数  $l$  对应,就产生相应的  $TSC$ . 我们自然要问:令  $TSC$  极小的  $t$  值是多少. 将式(17)确定的  $C_0 = 2N/(l+1)$  代入式(19),解如下最优化问题

$$\min_l TSC = N\left(\frac{2N}{l+1} + f\right) + lF + G \quad (20)$$

令  $\frac{dTSC}{dl} = 0$ , 有

$$l^* = N \sqrt{\frac{2f}{F}} - 1 \quad (21)$$

则由式(16),最优的发车间隔是

$$t^* = \frac{2(l+1)}{(l+1)^2} N = \frac{(l+1)F}{N} \quad (22)$$

每个人的非票价成本是

$$C_0^* = \sqrt{2fF} \quad (23)$$

上述结果表明,调整公交车的发车间隔,可以实现系统总成本最小. 需求  $N$  越大、时间惩罚越高,发车间隔就应越短;每增开一班车的可变成本越高,就应尽量少发车. 一个有趣的结论是式(23),它表明,均衡个人出行非票价成本与需求  $N$  无关,而是与拥挤系数和公交车可变成成本正相关关系. 这是因为,最优的发车间隔在随需求改变,需求上升了,发车间隔缩短,所以每列车上的乘客没有体会到拥挤程度的变化;而  $F$  值越大,系统会少发车,导致拥挤上升. 如果定义高峰期的长度为  $\omega = (l+1)t$ ,可以发现最优的高峰期长度  $\omega = \frac{(l+1)F}{N} \sqrt{2fF}$  亦与需求  $N$  无关,这说明,系统只要科学地调整发车间隔,可以保证高峰期不延长. 当  $\omega < \sqrt{2fF}$  时,  $\omega > \sqrt{2fF}$ ; 当  $\omega = \sqrt{2fF}$  时,  $\omega = \sqrt{2fF}$ , 表明如果到达时间既不允许提前、又不许延后,所有出行者就应该选择准点到达  $w$  的那一班车. 因此,为达到社会收益最大,当出行人数增多时,要适当提高发车频率,当人们对拥挤很敏感的时候也需要缩短发车间隔,来分散人群、减少拥挤. 如果发车的变动成本很高,在其他情况不变的时候就要通过减少发车数来降低成本了.

## 3 弹性需求分析(系统最优)

上一节讨论了固定需求下的系统最优,本节研究需求为弹性时的情形. 设需求函数的逆函数为  $D^{-1}(w)$ ,它是单调递减的. 系统的净收益为

$$NB = \int_0^N D^{-1}(w)dw - N(C_0 + f) - lF - G \quad (24)$$

根据第 2 节的分析,均衡态所需的车次次数满足关系式(17),即  $C_0 = 2N/(l+1)$ ,将其代入式(24),令  $\frac{\partial NB}{\partial l} = 0$ ,就可以得到弹性需求情形下的  $N$  和

$l$ . 令  $\frac{\partial NB}{\partial l} = 0$ , 得

$$l = N \sqrt{\frac{2f}{F}} - 1 \quad (25)$$

令  $\frac{\partial NB}{\partial N} = 0$ , 得

$$D^{-1}(N) = \frac{2N}{l+1} + \left(\frac{2N}{l+1} + f\right) \quad (26)$$

联合求解方程组(25) —(26),可以得到最优的  $N^o$  和  $l^o$ , 相应地, 最优的发车间隔是  $t^o = (1 + 1) F / N^o$ . 根据定义(17), (18), 式(26) 右边第 1 项是非票价成本, 而式(26) 描述的是一种出行供需平衡关系, 所以每个出行者应该缴纳数值为  $[2 N^o / (l^o + 1) + f]$  的公交车乘用费, 这就是最优的票价水平. 最优票价水平由乘客可变成本和早到/ 迟到/ 拥挤外部性成本(Externality) 两部分共同构成.

将式(25) 代入式(26), 整理得

$$D^{-1}(N) = \sqrt{2} F + (\sqrt{2} F + f) \quad (27)$$

可见, 最优的公交票价与需求  $N$  没有关系. 对于简单的线性需求函数,  $N = N_0 - kC$ , 逆函数是  $D^{-1}(N) = (N_0 - N) / k$ ,  $N_0$  是潜在需求,  $k$  反应了需求对成本的部分弹性,  $k$  越大, 弹性越小、同时需求越小, 则由式(27) 可以解出最优的需求值为

$$N^o = N_0 - k(2 \sqrt{2} F + f) \quad (28)$$

代入式(25), 得

$$l^o = (N_0 - kf) \sqrt{\frac{2}{F}} - (4k + 1) \quad (29)$$

均衡个人出行成本为

$$C^o = \sqrt{2} F + (\sqrt{2} F + f) \quad (30)$$

其中, 票价为

$$p^o = \sqrt{2} F + f \quad (31)$$

公司的净收益(注意: 公司净收益与系统净收益是不同的概念) 为

$$NP^o = (p^o - f) N^o - l^o F - G = F - G \quad (32)$$

可见, 弹性需求、系统最优机制下的公司净收益只与  $F$  和  $G$  相关, 而与其它参数没有任何关系.

## 4 公交公司垄断分析(利润最大化)

第 2 节、第 3 节都是从系统最优的角度考虑需求和发车间隔的, 但经营公交线路的公司主要关心自己的利益. 本节假设一家公交公司垄断出行市场, 并谋求利润最大化.

公交公司通过确定票价和调整发车间隔来追求净利润最大化, 即

$$\max_{p, l} NNP = pN - (fN + lF + G) \quad (33)$$

均衡状态的  $l$  应该满足条件(16), 即  $\frac{t}{2(l+1)} \cdot (l+1)^2 = N$ . 而需求关系

$$D^{-1}(N) = p + C_0 = p + \frac{2N}{l+1} \quad (34)$$

也应被满足. 仍然用简单的线性需求函数说明问题, 即假设  $D^{-1}(N) = (N_0 - N) / k$ , 代入式(34),

得  $N = (l+1) \frac{N_0 - kp}{2k + l + 1}$ , 将此代入式(33),  $\max_{p, l} NNP$ , 就可以得到令公司净利润最大的  $p$  和  $l$ .

令  $\frac{\partial NNP}{\partial p} = 0, \frac{\partial NNP}{\partial l} = 0$ , 并求解联立方程, 得

$$p^m = \frac{N_0 + kf}{2k} = \frac{1}{2} \left( \frac{N_0}{k} + f \right) \quad (35)$$

$$l^m = (N_0 - kf) \sqrt{\frac{2}{F}} - (2k + 1) \quad (36)$$

将  $p^m$  和  $l^m$  代入  $N = (l+1) \frac{N_0 - kp}{2k + l + 1}$ , 可得需求为

$$N^m = \frac{1}{2} [N_0 - k(2 \sqrt{2} F + f)] \quad (37)$$

均衡个人出行成本为

$$C^m = \sqrt{2} F + \frac{1}{2} \left( \frac{N_0}{k} + f \right) \quad (38)$$

公交公司收益为

$$\begin{aligned} NP^m &= p^m N^m - (fN^m + l^m F + G) = \\ &= \frac{1}{4k} [N_0 - k(2 \sqrt{2} F + f)]^2 + F - G \end{aligned} \quad (39)$$

比较式(37) 和(28), (36) 和(29), 可以发现  $N^m = 0.5N^o, l^m = 0.5(l^o - 1)$ , 这说明, 公司追求利润最大化时, 与系统最优政策比较, 总需求将下降一半, 所需的车次数也下降一半以上. 比较式(39) 和(32), 得

$$\begin{aligned} NP^m - NP^o &= \frac{(N_0 - kf - 2k \sqrt{2} F)^2}{4k} = \\ &= \frac{N^o N^o}{4k} \end{aligned} \quad (40)$$

如果“系统最优”制度有解, 即  $N^o > 0$ , 说明潜在需求足够大,  $N_0 > kf + 2k \sqrt{2} F$ , 有  $NP^m > NP^o$ , 还可以进一步得出  $p^m > p^o$  和  $C^m > C^o$ . 可见, “系统最优”导致的是高需求、短发车间隔(或大  $l$  值) 的结果, 而公司利润最大化导致的是低需求、长发车间隔和高票价的结果, 但后一种制度反而可以产生比前一种制度还要多的利润. 这就解释了为

什么现实中垄断市场的公交公司宁可损失需求,也要实行高票价的现象.

## 5 公交公司寡头竞争分析

微观经济学的垄断竞争理论表明,在市场被垄断的情况下,生产者将通过提高价格、减少供给来谋求垄断利润.上一节的情形正是如此,当只有一家公交公司垄断公交服务市场时,它会采用高票价、低发车频率的策略,虽然出行者的个人成本上升了,总需求被抑制了,但公司的利润却是满意的.著名的古诺模型(Cournot model)<sup>[17]</sup>分析了产品市场上有两个寡头的情形,每个寡头生产同质产品,并追求各自利润的最大化,寡头们同时独立地做出产量决策.结论是:寡头竞争与垄断相比,均衡状态下的总产量更大、价格更低,寡头的总利润下降,但社会福利增加.本节借鉴古诺模型的思想,分析公交公司的寡头竞争行为.

假定公交线路上有两家寡头公司提供交通服务,服务水平通过票价和发车频率来体现,每家寡头公司都可以根据对方的服务水平来确定自己的服务参数,寡头公司之间没有勾结行为,出行者只考虑自己的成本最小化,对寡头公司没有偏好.

在上述假定下,寡头公司同时决定自己的服务参数 $(p_i, t_i)$   $i = 1, 2$ ,其中 $p_i, t_i$ 分别为公司 $i$ 的票价和发车间隔时间.设寡头之间对市场竞争的结果是有 $N_i$ 人选择公司 $i$ ,由第1节的出行者班次选择的均衡分析可知,班次数 $l_i$ 可以由式(16)算出,所以,寡头公司的服务水平实际上就是由 $(p_i, l_i)$   $i = 1, 2$ 体现.考虑下列均衡条件

$$C = p_1 + C_{01} = p_2 + C_{02} \quad (41)$$

$$C_{0i} = \frac{2 \cdot N_i}{l_i + 1}, \quad i = 1, 2 \quad (42)$$

$$C = \frac{N_0 - N}{k} \quad (43)$$

$$N_1 + N_2 = N \quad (44)$$

其中,式(41)是两个寡头公司给出的个人出行总成本之间的均衡;式(42)就是式(17),给出了某一公司的非票价出行成本与出行人数和均衡态所需班次数之间的关系;式(43)定义了一个线性的需求函数;式(44)是出行人数的守恒条件.显然,给定 $(p_1, l_1)$ 、 $(p_2, l_2)$ 后,从式(41)一式(44)可以

解出

$$N_1 = \frac{l_1 + 1}{l_1 + l_2 + 2 + 2k} \cdot \left[ N_0 - p_2 k - \frac{l_2 + 1 + 2k}{2} (p_1 - p_2) \right] \quad (45)$$

$$N_2 = \frac{l_2 + 1}{l_1 + l_2 + 2 + 2k} \cdot \left[ N_0 - p_1 k - \frac{l_1 + 1 + 2k}{2} (p_2 - p_1) \right] \quad (46)$$

公司 $i$ 的利润为

$$NP_i = (p_i - f_i) N_i - l_i F_i - G_i, \quad i = 1, 2 \quad (47)$$

式中 $f_i, F_i, G_i$ 分别是公司 $i$ 的乘客可变成本、班车可变成本和线路投资固定成本.将式(45)、式(46)代入式(47),同时求解下面的两个优化问题

$$\text{给定 } (p_2, l_2) \quad \max_{p_1, l_1} NP_1 \quad (48)$$

$$\text{给定 } (p_1, l_1) \quad \max_{p_2, l_2} NP_2 \quad (49)$$

注意,式(48)、(49)就是古诺竞争模型的数学表达式.令 $\frac{\partial NP_i}{\partial p_i} = 0, \frac{\partial NP_i}{\partial l_i} = 0, i = 1, 2$ 得到一组方程

$$N_0 - \frac{l_2 + 1 + 2k}{2} p_1 + \frac{l_2 + 1}{2} p_2 + \frac{l_2 + 1 + 2k}{2} f_1 = 0 \quad (50)$$

$$(p_1 - f_1) \frac{l_2 + 1 + 2k}{(l_1 + l_2 + 2 + 2k)^2} \cdot \left[ N_0 - p_2 k - \frac{l_2 + 1 + 2k}{2} (p_1 - p_2) \right] = F_1 \quad (51)$$

$$N_0 - \frac{l_1 + 1 + 2k}{2} p_2 + \frac{l_1 + 1}{2} p_1 + \frac{l_1 + 1 + 2k}{2} f_2 = 0 \quad (52)$$

$$(p_2 - f_2) \frac{l_1 + 1 + 2k}{(l_1 + l_2 + 2 + 2k)^2} \left[ N_0 - p_1 k - \frac{l_1 + 1 + 2k}{2} (p_2 - p_1) \right] = F_2 \quad (53)$$

从以上方程组,可以求出四个变量  $(p_1, l_1, p_2, l_2)$ .  
先考察从式(50) — 式(53) 推导出的关系式:

$$\left(\frac{p_1 - f_1}{p_2 - f_2}\right) \left(\frac{N_0 - p_2 k}{N_0 - p_1 k}\right) \left(\frac{2p_2 - p_1 - f_2}{2p_1 - p_2 - f_1}\right) = \frac{F_1}{F_2} \quad (54)$$

可见,两个寡头的票价之间的关系与其乘客可变成本、班车可变成本、潜在总需求和需求弹性相关. 写出  $(p_1, l_1, p_2, l_2)$  的解析式是非常困难的, 这里针对  $f_1 = f_2, F_1 = F_2$  的简单情形做一些定性分析, 可以发现, 方程组(50) — (53) 的稳定解是

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{N_0}{k} + f \right) + \frac{1}{2} \left[ 3 \sqrt{2} F \pm \sqrt{\left( \frac{N_0}{k} - f - \sqrt{2} F \right)^2 + 16 F} \right] \quad (55)$$

上式说明, 当两家公司的可变成本相等时, 竞争的结果是采取相同的票价策略. 式(55) 右边第 1 项是一家公司垄断时的票价水平  $p^m$ , 由于两个寡头之间没有共谋, 他们将通过降低票价来获得尽可能多的乘客, 所以, 式(55) 右边第 2 项中的正负号应取负号, 即

$$p^c = \frac{1}{2} \left( \frac{N_0}{k} + f \right) + \frac{1}{2} \left[ 3 \sqrt{2} F - \sqrt{\left( \frac{N_0}{k} - f - \sqrt{2} F \right)^2 + 16 F} \right] \quad (56)$$

且  $N_0$  应该足够大, 乃至

$$\sqrt{\left( \frac{N_0}{k} - f - \sqrt{2} F \right)^2 + 16 F} > 3 \sqrt{2} F \quad (57)$$

此即

$$N_0 > kf + 2k \sqrt{2} F \quad (58)$$

注意, 上式恰恰就是“系统最优”制度有解的基本条件. 因此, 当潜在需求满足式(58) 时, 两个寡头竞争均衡时的定价  $p^c$  小于一家垄断时的票价, 即  $p^c < p^m$ ; 否则, 寡头竞争系统将是不稳定的. 两家公司的公交车班次数的解是

$$l_1 = l_2 = \sqrt{\frac{2}{F}} (N_0 - p^c k) - (k + 1) \quad (59)$$

当  $p^c < p^m$  时, 总班次数为

$$l^c = l_1 + l_2 > l^m - 1 \quad (60)$$

所实现的总需求为

$$N^c = N_0 - p^c k - k \sqrt{2} F > N^m \quad (61)$$

个人出行成本为

$$C^c = p^c + \sqrt{2} F < C^m \quad (62)$$

因此, 当潜在需求超过一定值时, 寡头情形与一家垄断时相比, 票价下降、总需求上升、个人出行成本减少. 总班次基本增加. 但两家公司合起来的总利润, 目前难以进行解析比较, 需要通过数值模拟帮助进行判断.

如果可变成本相等的寡头公司有  $r (r > 2)$  个, 用前面类似的原理, 可以推出竞争均衡状态下的票价是  $p^u = p_1 = p_2 = \dots = p_r$ , 班次数为  $l_1 = l_2 = \dots = l_r$ . 有

$$p^c = \frac{1}{2} \left( \frac{N_0}{k} + f \right) + \frac{1}{2(r-1)} \left[ \sqrt{2} F (r+1) - \sqrt{(r-1)^2 \left( \frac{N_0}{k} - f - \sqrt{2} F \right)^2 + 8r F} \right] \quad (63)$$

当  $r$  时, 有  $\lim_r p^c = f + \sqrt{2} F$ , 注意, 这恰好就是系统最优时的票价  $p^o$ . 所以, 引入多家寡头竞争以后, 公交票价将进一步降低, 直至系统最优制度下的定价水平. 这一结论是符合古诺模型理论的.

## 6 数值模拟

设逆需求函数为  $D^{-1}(N) = (N_0 - N)/k$ , 其中  $N_0 = 1\ 000$  (人). 设车内拥挤成本函数为  $g(n) = n$ , 其中  $n = 0.025$ . 其它参数是  $(k, F) = (5, 30)$  (元/h),  $F = 50$  (元/班车),  $f = 0.1$  (元/人),  $G = 0$  (元). 改变代表一定需求弹性的参数  $k$  的值, 考察各模型所输出的数值解之间的关系, 以及它们对  $k$  值的敏感程度.

图 1 至图 6 分别给出了三种制度下的票价、个人出行成本、所需班次、实现的总需求、公交公司总收益(利润) 和社会净收益. 社会净收益是按照公式(24) 计算的. 这些结果与本文所推导的解析关系完全一致, 从公司收益上看, 最赚钱的是垄断情形, 其次是寡头情形, 在系统最优制度下所获取的公司利润最少; 从社会净收益角度看, 最好的制度是系统最优, 其次是寡头, 最差的是垄断. 系统最优能实现最多的需求, 所需要的发车班次也

最多, 票价最低, 个人成本最小; 在这些指标上居中间的是寡头制度, 处于末尾的是垄断制度. 综合起来考虑, 最现实的制度选择应该是寡头制度.

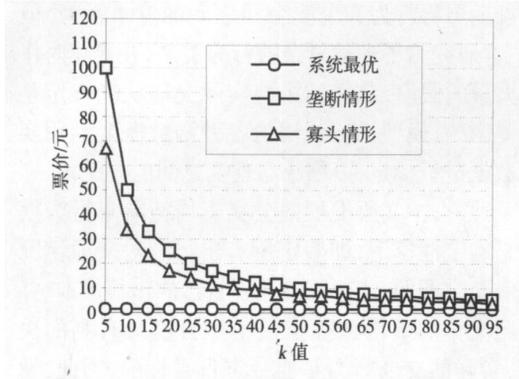


图 1 三种制度下的票价

Fig. 1 Bus fares in three configurations

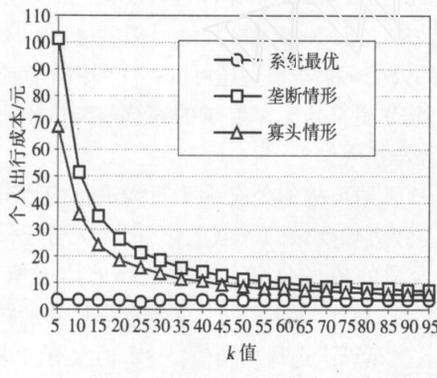


图 2 三种制度下的个人出行成本

Fig. 2 Individual costs in three configurations

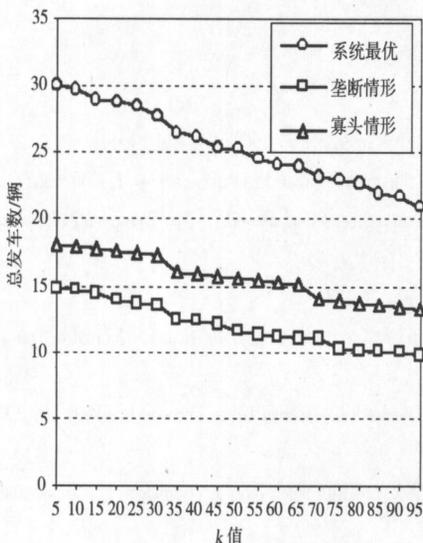


图 3 三种制度下的班次

Fig. 3 Required buses in three configurations

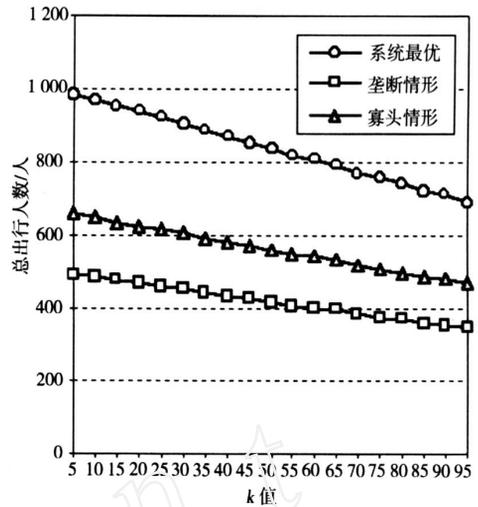


图 4 三种制度下的总需求

Fig. 4 Realized demands in three configurations

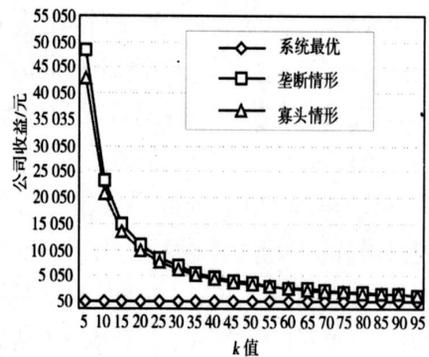


图 5 三种制度下的公交公司总收益

Fig. 5. Net profits in three configurations

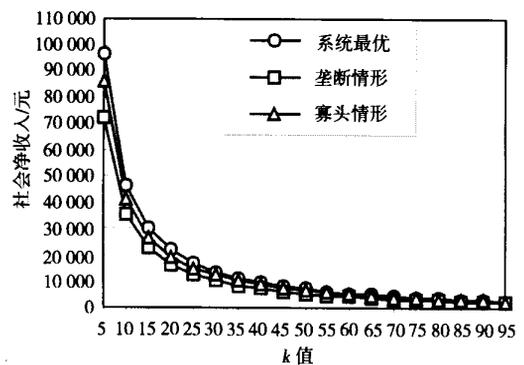


图 6 三种制度下的社会净收益

Fig. 6 Net benefits in three configurations

此外, 这些图形还显示, 除了系统最优制度下的票价、个人出行成本和公司收益不随参数  $k$  值变化外, 其它制度下的所有结果 (包括系统最优制度下的其它结果), 都随  $k$  值的增加而下降, 有

些是逐渐进入稳定值状态,有些则几乎是线性下降.这些结果与本文中所做的定性分析是吻合的.

作者还试验了非线性的需求函数和非线性的车内拥挤成本函数,所得结果与图1至图6中的曲线相比,虽然不完全重叠,但走势基本相同.为了使模型更接近实际交通条件,可以将非线性的体触拥挤成本函数设计成当车内人数逼近载客能力时、拥挤成本趋于无穷大的形式.作者对多种函数形式都进行了模拟计算,限于篇幅,这里不再对结果进行陈述.

## 7 结 论

本文研究早晨高峰期内出行者由郊区住处乘公交车到达市中心工作地的交通行为,所建立的均衡选择模型考虑了早到和晚到的时间延迟成本和车内拥挤成本,得到了固定需求下的最优发车间隔.在弹性需求下进行了严格的经济学分析,比较了系统最优和公交公司净利润最大化两种不同制度所导致的票价和出行分布.作者发现,如果允许公交公司追求自身利益最大化,公司将设定较高的票价,虽然抑制了需求、并延长发车间隔时间,但却可以得到较高的利润.当政府允许新的公交公司进入市场后,通过寡头之间的竞争,与一家垄断情形相比,可以实现票价降低、发车数增加、乘客数量上升和个人出行成本下降.当进入市场

的公交公司数量继续增加时,公交票价将向“系统最优”制度下的票价水平发展.这些基本结论是与现实观察相符合的,说明模型可以解释一定的高峰期出行行为和公交公司之间的竞争行为.但是,本研究为了理清复杂的行为关系,在建模时作了大量的假设,计算结果与实际交通状况肯定是有差距的,模型中所使用的各种函数需要利用实际数据进行标定,以缩小与现实之间的差距.

此外,本文所发展的公交车均衡乘车行为模型是确定性模型,即假定所有出行者对交通情况是完全掌握的,能够精确计算自己的出行成本、并在公交车的班次选择上做出对自己最有利的决策.实际的交通行为是有一定盲目性的,为此,发展随机均衡模型就显得更有意义,Huang Yang Bell<sup>[18]</sup>研究搭车的经济学原理时所提出的考虑需求弹性的 Logit-based 模型,值得借鉴.此外,本文提出的公交车乘车模型还可以扩展到停车换乘问题中,建立更符合实际要求的连续与离散出行混合的停车换乘模型<sup>[19]</sup>.

注记:对离散的公交乘车行为进行均衡分析一直是作者想要做的一项工作,但长久苦于没有找到合适的描述公交车班次选择的均衡模型.2003年底,首次刻划出一个只能考虑早到惩罚成本的公交车班次选择均衡模型<sup>[20]</sup>,但没有考虑寡头竞争问题.作者感谢陈平、W H K Lam、李志纯等的有益建议.

## 参考文献:

- [1] Vickrey W S. Congestion theory and transport investment[J]. American Economic Review, 1969, 34: 414—431.
- [2] Henderson J V. Road congestion: A reconsideration of pricing theory[J]. Journal of Urban Economics, 1974, 1: 346—365.
- [3] Yang H, Huang HJ. Principle of marginal cost pricing: how does it work in a general road network? [J]. Transportation Research A, 1998, 32: 45—54.
- [4] Gazer A. Congestion tolls and consumer welfare[J]. Public Finance, 1981, 36: 77—83.
- [5] Cohen Y. Commuter welfare under peak period congestion tolls: Who gains and who loses? [J]. International Journal of Transport Economics, 1987, 14: 239—266.
- [6] Braid R M. Uniform versus peak-load pricing of a bottleneck with elastic demand[J]. Journal Urban Economics, 1989, 26: 320—327.
- [7] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. Schedule delay and departure time decisions with heterogeneous commuters[J]. Transportation Research Record, 1988, 1197: 56—67.
- [8] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. Economics of a bottleneck[J]. Journal of Urban Economics, 1990, 27: 111—130.
- [9] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. Route choice with heterogeneous drivers and group specific congestion costs[J]. Regional Science and Urban Economics, 1992, 22: 71—102.

- [10] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. The welfare effects of congestion tolls with heterogeneous commuters[J]. *Journal of Transport Economics and Policy*, 1994, 28: 139—161.
- [11] Arnott R, De Palma A, Lindsey R. Recent developments in the bottleneck model[A]. Button KJ, Verhoef E In: *Road Pricing, Traffic Congestion and the Environment: Issues of Efficiency and Social Feasibility*[M]. Aldershot, Edward Elgar, 1998. 79—110.
- [12] Verhoef E. *The Economics of Regulating Road Transportation*[M]. Brookfield: Edward Elgar, 1996.
- [13] Tabuchi T. Bottleneck congestion and modal split[J]. *Journal of Urban Economics*, 1993, 34: 414—431.
- [14] Huang HJ. Fares and tolls in a competitive system with transit and highway: The case with two groups of commuters[J]. *Transportation Research E*, 2000, 36: 267—284.
- [15] Huang HJ. Pricing and logit-based mode choice models of a transit and highway system with elastic demand[J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 140: 562—570.
- [16] 黄海军, Bell M G H, 杨海. 公共与个体竞争交通系统的定价研究[J]. *管理科学学报*, 1998, 1(2): 17—23.  
Huang Hai-jun, Bell M G H, Yang Hai. Pricing and modal split in a competitive system of mass transit and highway[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 1998, 1(2): 17—23. (in Chinese)
- [17] Mas-Colell A, Whinston M D, Green G R. *Microeconomic Theory*[M]. New York: Oxford University Press, 1995.
- [18] Huang HJ, Yang H, Bell M G H. The models and economics of carpools[J]. *The Annals of Regional Science*, 2000, 34: 55—68.
- [19] 田琼, 黄海军, 杨海. 瓶颈处停车换乘的 logit 随机均衡选择模型[J]. *管理科学学报*, 2005, 8(1): 1—6.  
Tian Qiong, Huang Hai-jun, Yang Hai. Mode choice models based on logit stochastic equilibrium in transportation systems with park-and-ride option[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(1): 1—6. (in Chinese)
- [20] 田琼, 黄海军. 一个考虑早到惩罚的高峰期地铁乘车均衡模型[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2004, 4(4): 108—112.  
Tian Qiong, Huang Hai-jun. An equilibrium ride model for subway passengers with arrival early penalty[J]. *Transportation Systems Engineering and Information*, 2004, 4(4): 108—112. (in Chinese)

## Equilibrium bus riding behavior in rush hours and system configuration for providing bus services

HUANG Hai-jun<sup>1</sup>, TIAN Qiong<sup>1</sup>, YANG Hai<sup>2</sup>, GAO Zi-you<sup>3</sup>

1. School of Economics & Management, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083, China;
2. Department of civil Engineering, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, China;
3. School of Traffic and Transportation, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

**Abstract:** This paper deals with the riding behavior of commuters who take buses from a living place to a work place in rush hours. The equilibrium bus riding model proposed in this paper incorporates such costs as that associated with early and late arrival as well as body congestion in buses. The optimal time headway for dispatching buses is derived in the case of fixed demand. In the elastic demand case, the fare level, the number of buses required, the net profit from pricing and the system net benefit are obtained and compared under three types of system configurations, namely system optimum, monopoly by one bus company and oligopoly by two companies, respectively.

**Key words:** travel behavior; equilibrium bus riding model; system configuration