多产品竞争环境中最优供货决策①

鲁其辉, 朱道立
(复旦大学管理学院管理科学系, 上海 200433)

摘要: 在有多产品竞争的市场中,产品零售商首先需要了解每个产品在市场中的地位和市场份额,然后通过了解市场需求总量和销售支出情况来决定产品的供应数量,以达到利润的最大化的目标. 怎样得到最优的供货量问题是现代库存管理的基础性问题之一. 通过引进产品特征描述和消费者一般支出的概念,给出一种市场份额的分析方法和市场份额的一些数学性质及经济特点. 然后引入管理中经典库存决策模型 ——"报童问题"模型,分析多产品竞争环境中零售商的最优供货决策问题. 最后研究了在产品的某些特征描述改变的条件下,零售商最优供货量、期望利润和市场利润总量的敏感性分析及其经济含义解释.

关键词: 市场竞争; 报童模型; 多产品; 库存问题; 决策分析
中图分类号: O221 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2005)06 - 0043 - 08

0 引 言

经济全球化、产品开发速度的不断加快使得市场中产品之间的竞争日趋激烈,从而使产品的零售商确定供货量变得更加困难. 传统的库存决策模型中往往只考虑消费者对价格的关注. 而实际上,消费者选择产品时,并不仅仅比较产品之间的价格,而且还会根据自身的偏好来同时衡量产品的其他特征. 因此,通过使用只考虑与价格有关的需求来决定供货量是不很完善的. 本文将引进产品特征描述的概念,通过消费者偏好形成消费者一般支出的表达式,得到产品的市场份额,然后综合考虑市场总需求量和零售商的销售支出情况给出最优决策模型.

目前,研究多产品供货决策问题的研究方向大致可以分为三类,第一类方向是研究单个零售商提供多个产品并且有多个资金和能力约束条件的情况,例如文献[1～4]. 在这个方向的研究一般假定每个产品的需求函数是已知的,并且产品的市场需求量是相互独立的或者已知它们的相关系数. 第二类方向是研究产品之间有替代性的问题,见文献[5,6],它的现实背景是:如果某个产品出现了缺货时,全部或者一部分消费者将选择市场中其他同类产品. 最后一类方向是考虑每个零售商具有不同的最大化效用目标的问题,见文献[7～11],文献[12]对研究多产品供货决策问题的文献进行了详细的评述.

本文的研究方式与以上文献所不同之处主要有以下两点:(1) 市场需求函数的不同. 以上文献的研究中一般假定需求函数是给定的,产品的相关性系数也是已知的,而本文是通过消费者的一般支出和偏好分布求出市场份额来得到产品的需求函数;(2) 敏感性分析方式的不同. 由于以前的研究工作中假定消费者面对产品的特征只有一个就是价格,假定产品有多个特征,因此本文研究产品的不同特征变化时,对零售商最优供货决策和收益的影响情况.

1 产品竞争描述

1.1 产品特征描述

在市场经济环境中,市场中产品是丰富多样

① 收稿日期:2003 - 12 - 15; 修订日期: 2005 - 09 - 28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70432001) ; 复旦大学研究生创新基金资助项目.
作者简介: 鲁其辉(1977 —) , 男, 湖南益阳人, 博士生.

的,消费者可以根据自身的经济状况和个人偏好进行选择.比如说,一位旅客要从上海市旅行到北京市,他面临着多种可供选择的交通方式,如,乘火车、坐飞机、坐汽车或轮船等等.但是不同的交通方式有旅行费用和旅行时间等方面的不同.一般来说,乘火车旅行花费的时间 (T_1) 要比坐飞机花费的时间 (T_2) 长,但是乘火车的旅行费用 (P_1) 要比坐飞机的旅行费用 (P_2) 低,即 $T_1 > T_2$, $P_1 < P_2$.因此,可以把同类商品或服务产品的共同特点提取出来作为该类产品的特征描述,例如上面旅行例子中的旅行费用 P 和旅行时间 T 作为交通方式的特征描述.下面给出同类竞争产品特征描述的数学定义.

定义 1 在一个提供同类消费结果的市场中,设有 n 种不同的产品:V_i, $i = 1, \cdots, n$,把可以区别产品的 $m+1$ 个数量特征称为该类产品的特征描述.记为 $P, T_1, \cdots, T_m$.那么产品 V_i 的特征描述值为 $P_i, T_{i1}, \cdots, T_{im}$.

1.2 消费者偏好及一般支出

假定 在面对具有不同特征描述的多种产品市场中,消费者按照最小的一般支出原则选择唯一一种产品消费.其中,一般支出可以分为两个部分:一个是显性支出,一般只有一个变量,它表现为货币支出,比如说上小节旅行实例中的旅行费用 P;另一个是隐形支出,它一般含有一个或多个变量,它们表现为非货币支出,比如说例中的旅行时间 T.假定消费者对于隐形支出有偏好,设对产品的特征描述 T_i 的偏好系数为 α_i,它的数量单位为(特征描述 P 的单位)/(特征描述 T_i 的单位).例如旅行实例中旅行时间 T 的偏好系数 α 的单位是(元/h),表示消费者对支出单位时间相当的货币数量,一般称为"时间价值"(value-of-time).下面给出消费者一般支出的定义.

定义 2 设在有 n 种不同的产品 $(V_i, i = 1, \cdots, n)$ 的市场中,产品 V_i 的特征描述为 $P_i, T_{i1}, \cdots, T_{im}$.设消费者对特征描述 T_i 的偏好系数为 α_i.那么,对于产品 V_i,消费者的一般支出为

$$C_i \overset{\Delta}{=} P_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_i T_{ij}, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

特别地,如果市场中只有两个同类产品且特征描述为 P 和 T,消费者面对的一般支出可简记为

产品 V_1

$$C_1 = P_1 + \alpha T_1; \tag{2}$$

产品 V_2

$$C_2 = P_2 + \alpha T_2; \tag{3}$$

如果 $P_1 < P_2$, $T_1 > T_2$, $\alpha \in (0, \alpha_{m\alpha}]$,则两个产品的一般支出可用图 1 表示.

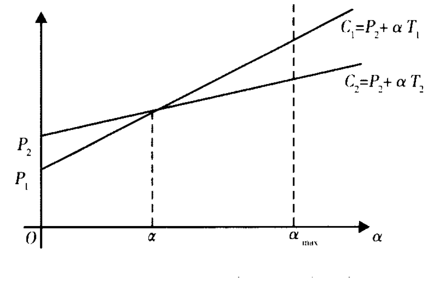

图 1 两个产品消费者一般支出示意图

Fig. 1 Customer's general cost of two kinds of products

1.3 市场份额

在市场中,不同消费者有不同的消费者偏好,可以采用市场调查的方式将消费者对产品特征 T_i 的偏好 α_i 进行统计,得到消费者偏好的概率分布.设 α_i 服从连续概率分布,分布函数为 $H_i(\alpha_i)$,概率密度函数为 $h_i(\alpha_i)$.设在销售季节时段内,到达市场的消费者总人数为 M,那么每位消费者对产品特征 T_i 的偏好 α_i 服从分布函数 $H_i(\alpha_i)$.

市场份额是指在有多个产品的市场中消费者选择某个产品的概率.下文将只考虑对于有两个竞争产品及两个特征描述的市场份额的计算.见图 1,显然,α 是两个产品的一般支出的交点,即满足下式

$$P_1 + \alpha T_1 = P_2 + \alpha T_2$$

那么

$$\alpha = \frac{P_2 - P_1}{T_1 - T_2} \tag{4}$$

从图 1 可以看出,对于消费者时间价值 α 属于区间 $(0, \alpha]$ 的消费者,不会选择产品 V_2 而只会选择产品 V_1;对于时间价值 α 属于区间 $(\alpha, \alpha_{m\alpha}]$ 的消费者,不会选择产品 V_1 而只会选择产品 V_2.这个特点与现实世界的情况也是相符合的.比如在例中,时间价值高的商务旅行者,一般会选择时间短的交通方式,而时间价值低的消费者将选择价格低的交通方式.

设已知消费者对产品特征 T 的偏好分布 $H(\alpha)$.则可按下式分别求出两个产品的市场份额

$$S_1 = \int^{\alpha} h(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = H\left(\frac{P_2 - P_1}{T_1 - T_2}\right) \tag{5}$$

$$S_2 = \int^{\alpha_{m\alpha}} h(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = 1 - H\left(\frac{P_2 - P_1}{T_1 - T_2}\right) \tag{6}$$

1.4　市场份额的特点

设在有两个产品的竞争市场中，零售商 1 在市场中提供产品 V_1，零售商 2 在市场中提供产品 V_2. 下面的命题给出市场份额的特点.

命题 3　在只改变产品 V_1 的特征描述 T_1 而不改变两个产品的其他特征描述的条件下，如果零售商 1 减低 T_1，那么产品 V_1 的市场份额会增加，即 $\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}T_1} < 0$. 同样，在不改变其他产品特征描述的条件下，如果零售商 2 减低 P_2，那么产品 V_2 的市场份额会增加，即 $\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}P_2} < 0$.

证明　由 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}T_1} < 0$ 和 $\frac{\mathrm{d}H(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} > 0$ 可知 $\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}T_1} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}T_1} < 0$ 成立. 同理 $\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}P_2} < 0$ 成立.　证毕.

例 1　设从上海到北京乘火车和坐飞机，消费者需要付出的旅行费用和旅行时间分别为 $P_1 = 200$，$T_1 = 15$；$P_2 = 600$，$T_2 = 3$，消费者对旅行时间的价值 α 服从均匀分布 $U[0,100]$. 设零售商 1 提供火车客运服务（产品 V_1），零售商 2 提供飞行客运服务（产品 V_2）. 在上述假设条件下，根据式(5) 和式(6)，容易求出产品 V_1 和产品 V_2 的市场份额分别为：33.3 %和 66.7 %. 在现实世界中，火车客运公司可以通过提高火车运行速度来减少旅行时间 T_1，现在假设提速后的旅行时间为 $T_1' = 10$，在其他参数不变的条件下，市场份额变化为 57.1 % 和 42.9 %. 同样如果其他参数不变降低飞机票价为 $P_2' = 500$，新的市场份额为 25 %和 75 %.

2　经典报童模型

2.1　经典报童问题

经典报童问题（Newsboy 或 Newsvendor）模型在现代库存管理中有着广泛的应用，文献[13]对近几十年中报童模型的推广及应用做了详细综述. 经典报童问题是指在一个销售季节短且只有一次订货机会的产品供货量决策中，零售商面对不确定的市场需求量 x，从供应商批发产品或自行提供产品的单价为 c. 如果提供的产品过多，在销售季节过后，未售出的产品引起的库存管理和其他处理费用的平均单价为 h，若出现缺货的情况，由于没有满足潜在消费者的需求而出现了机会损失，设单位产品的惩罚价为 s，每售出单位产品的零售价格为 P，在这些条件下，零售商在销售季节开始之前确定最优供货量 Q. 首先给出以下记号：

M ——到达市场的消费者人数；

X ——随机需求变量；

$f(x)$ ——X 的概率密度函数；

$F(x)$ ——X 的概率分布函数；

μ, σ^2 ——X 的均值和方差；

$\phi(x)$ ——标准正态分布密度函数，即 $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$；

$\Phi(\cdot)$ ——标准正态分布函数；

$\Phi^{-1}(\cdot)$ ——标准正态分布函数的逆函数；

见论文[1,7～10]，在供货量的决策过程中，若零售商的供货量为 Q 时，他的期望收益可表达成

$$\Theta(Q) = (P + s + h) \cdot \left(\int_{\infty}^{Q} x f(x) \mathrm{d}x - Q F(Q) \right) + (P + s - c) Q - s\mu \tag{7}$$

由于模型中零售商按照最大期望收益的原则选择最优供货量，且目标函数(7) 是一个严格凹函数，即 $\frac{\mathrm{d}^2\Theta(Q)}{\mathrm{d}Q^2} < 0$，那么可以通过求解 $\frac{\mathrm{d}\Theta(Q)}{\mathrm{d}Q} = 0$ 得到最优订货量. 见文献[1]，若需求函数是正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 时，最优供货量为

$$\mathrm{EQ}_{\mathrm{Ret}} = \mu + \Phi^{-1}(\lambda)\sigma \tag{8}$$

最大期望收益为

$$\mathrm{EP}_{\mathrm{Ret}} = (P - c)\mu - \Big((c + h)\Phi^{-1}(\lambda) + (P + s + h) b_r(\Phi^{-1}(\lambda)) \Big)\sigma \tag{9}$$

其中：记 $b_r(\Phi^{-1}(\lambda)) = \int_{\Phi^{-1}(\lambda)}^{\infty} (y - \Phi^{-1}(\lambda))\phi(y)\mathrm{d}y$

称 λ 为系统的服务水平

$$\lambda \triangleq \frac{P + s - c}{P + s + h} \tag{10}$$

2.2　不确定性需求

下两分析两个产品竞争市场中，消费者对产品的需求情况. 对于产品 V_i，由式(5)、(6) 可知每个消费者对它的需求 d_i 都是满足“泊努利分布”

的随机变量,均值为 s_i. 设每个消费者的决策都是相互独立的. 那么到达市场的 M 个消费者对产品 V_i 形成总的需求随机变量 D_i 服从"二项分布",它的均值和方差分别为

$$\mu_i = MS_i, \quad \sigma_i^2 = MS_i(1 - S_i) \tag{11}$$

见文献[14,15],如果 MS_i 和 $M(1 - S_i)$ 都大于 5,那么可以用正态分布很好的近似二项分布式(11),因此可以假设对于产品 V_i 的需求量 x_i 的需求分布为

$$x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \tag{12}$$

其中:μ_i,σ_i 由式(11) 给出.

从上面的分析可知,若已知两个产品的特征描述和销售参数以及消费者总数和偏好分布,就可以求出最优订货量和最大期望收益. 本文以下所有参数和最优值记号下加上对应产品和零售商的编号.

例 2 设两个产品的特征描述及销售参数由下表给出.

表 1 产品的特征及消费参数

Table1 Products' characterizations and sale parameters

参数	P_i	T_i	c_i	s_i	h_i
产品 V_1	200	15	180	150	120
产品 V_2	500	3	450	400	100

设到达市场的人数 $M = 1\,000$,并且消费者的偏好 α 服从(0,100] 上的均匀分布. 那么根据式(5)、(6)、(8) 和式(9) 可以求出两个产品的市场份额和最优订货量、最大期望收益:$S_1 = 0.25$, $EQ_{Ret\,1} = 245$, $EP_{Ret\,1} = 2\,588$; $S_2 = 0.75$, $EQ_{Ret2} = 748$, $EP_{Ret\,2} = 35\,263$.

3 敏感性分析

本节分析产品特征描述变化对于零售商最优供货及其最大收益的影响. 设市场中只有两个竞争产品 V_1, V_2,它们的产品特征描述值分别为 P_i, T_i, $i = 1,2$ 且 $P_1 < P_2$, $T_1 > T_2$. 对于现实世界来说,零售商 1 可以通过技术变革等方法进行改进产品 V_1 的特征 T_1,即降低 T_1,从而增加产品 V_1 的市场份额;零售商 2 可以通过降低产品 V_2 的价格 P_2 来增加产品 V_2 的市场份额. 下面分别分析这两种情况.

3.1 T_1 变化的情况

本节分析 $EQ_{Ret\,i}$, $EP_{Ret\,i}$,关于 T_1 的变化情况,还将得到两个产品的收益总额 EP_{Total} 和收益增量 $EPA_{Ret\,i}$, EPA_{Total} 的变化情况. 当 T_1 变化为 T_1' 时,定义

$$EP_{Total}(T_1') \triangleq EP_{Ret\,1}(T_1') + EP_{Ret\,2}(T_1') \tag{13}$$

$$EPA_{Ret\,i}(T_1') \triangleq EP_{Ret\,i}(T_1') - EP_{Ret\,i}(T_1) \quad i = 1,2 \tag{14}$$

$$EPA_{Total}(T_1') \triangleq EP_{Total}(T_1') - EP_{Total}(T_1) \tag{15}$$

例 3 首先看一个实例. 设参数由例 3.1 中给出. 在其他参数不变得条件下,如果产品 V_1 的特征描述 T_1 变化,两个零售商的市场份额和最优订货量、最大期望收益以及由式(13) —(15) 定义的收益值的变化情况见表 2.

表 2 收益值与 T_1 的变化情况

Table 2 Profits' changing with T_1

T_1	S_1	$EQ_{Ret\,1}$	$EP_{Ret\,1}$	S_2	$EQ_{Ret\,2}$	$EP_{Ret\,2}$	EP_{Total}	$EPA_{Ret\,1}$	$EPA_{Ret\,2}$	EPA_{Total}
15	0.250	245	2 588	0.750	748	35 263	37 852	0	0	0
14	0.273	268	2 974	0.727	726	34 063	37 037	35	- 111	- 76
13	0.300	295	3 448	0.700	698	32 633	36 081	859	- 2 630	- 1 771
12	0.333	328	4 041	0.667	665	30 898	34 940	1 453	- 4 365	- 2 912
11	0.375	370	4 804	0.625	623	28 749	33 553	2 215	- 6 414	- 4 299
10	0.429	423	5 815	0.571	569	26 015	31 830	3 227	- 9 248	- 6 021

从表 2 可以看出,如果 T_1 减少,产品 V_1 的市场份额增加,零售商 1 的最优供应量增加、最大期望收益增加,而零售商 2 的情况恰好相反. 下面通过分析表明在一般假设条件下,以上规律都成立.

下面首先给出几个假设条件:

条件 1 $\lambda_i \in (0.001, 0.999)$, $i = 1,2$;

条件 2 $S_i \in (0,01,0.99)$, $i = 1,2$;

条件 3 M 充分大.

条件 1 实际上表明零售商 i 提供产品时,不会由于服务水平 λ_i 过高或过低而引起巨大的多货或缺货损失,这个条件在现实中一般总是满足的. 而且容易知道,在条件 1 下, $\Phi^{-1}(\lambda_i) \in (-3.1, 3.1)$, 由式(8) 可知最优订货量 $EQ_{Ret\,i}$ 有上下界. 条件 2 要求两个产品的市场份额不能太低,因为如果太低,产品基本上处于出局的状态,这不是本文研究的重点.

由数值分析可知,在条件 1 和 2 下要使下式成立:

$$\sqrt{M} > |(2S_i - 1)\Phi^{-1}(\lambda_i)| \cdot \frac{1}{2\sqrt{S_i(1-S_i)}},\ i = 1,2 \tag{16}$$

仅仅要求消费者到达市场的总人数满足 $M > 240$. 消费者到达市场的总人数 M 充分大也是本文的一个基本假设.

命题 4　设 $S_i, \lambda_i, M, i = 1,2$ 满足条件 1,2,3. 那么

$$\frac{dEQ_{Ret\,1}}{dT_1} < 0,\ \frac{dEQ_{Ret\,2}}{dT_1} > 0 \tag{17}$$

证明　由于 $S_1 + S_2 = 1$,零售商 1,2 的最优供货量关于 T_1 的导数分别为

$$\frac{dEQ_{Ret\,1}}{dT_1} = \frac{d(\mu_1 + \Phi^{-1}(\lambda_1)\sigma_1)}{dT_1} = M\frac{dS_1}{dT_1} + \Phi^{-1}(\lambda_1)\frac{d\sigma_1}{dT_1} = \sqrt{M}\frac{dS_1}{dT_1}\left[\sqrt{M} + (1-2S_1)\Phi^{-1}(\lambda_1)\frac{1}{2\sqrt{S_1(1-S_1)}}\right]$$

$$\frac{dEQ_{Ret\,2}}{dT_1} = \frac{d(\mu_2 + \Phi^{-1}(\lambda_2)\sigma_2)}{dT_1} = \frac{d(M(1-S_1) + \Phi^{-1}(\lambda_2)\sigma_1)}{dT_1} = -M\frac{dS_1}{dT_1} + \Phi^{-1}(\lambda_2)\frac{d\sigma_1}{dT_1} = -\sqrt{M}\frac{dS_1}{dT_1}\left[\sqrt{M} + (1-2S_2)\Phi^{-1}(\lambda_2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{S_1(1-S_1)}}\right] = -\sqrt{M}\frac{dS_1}{dT_1}\cdot\left[\sqrt{M} + (1-2S_2)\Phi^{-1}(\lambda_2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{(1-S_2)S_2}}\right]$$

当 $(1-2S_i)\Phi^{-1}(\lambda_i) \geq 0, i = 1,2$ 满足时,由命题 1 的结论显然式(17) 成立. 若 $(1-2S_1)\Phi^{-1}(\lambda_1) < 0$ 时,由条件 1,2,3 有式(16) 成立,则式(17) 显然成立,故命题成立. 　　证毕.

下面分析 T_1 变化时零售商的最大期望收益的变化规律. 首先,零售商 1,2 的最大期望收益关于 T_1 的导数分别为

$$\frac{dEP_{Ret\,1}}{dT_1} = (P_1 - c_1)\sqrt{M}\frac{dS_1}{dT_1}\cdot\left[\sqrt{M} - \left(\frac{c_1+h_1}{P_1-c_1}\Phi^{-1}(\lambda_1) + \frac{P_1+s_1+h_1}{P_1-c_1}b_r(\Phi^{-1}(\lambda_1))\right)(1-2S_1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{S_1(1-S_1)}}\right]$$

$$\frac{dEP_{Ret\,2}}{dT_1} = -(P_2 - c_2)\sqrt{M}\frac{dS_1}{dT_1}\cdot\left[\sqrt{M} - \left(\frac{c_2+h_2}{P_2-c_2}\Phi^{-1}(\lambda_2) + \frac{P_2+s_2+h_2}{P_2-c_2}b_r(\Phi^{-1}(\lambda_2))\right)(1-2S_2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{S_2(1-S_2)}}\right]$$

令 $L(S_i)$ 定义为

$$L(S_i) \triangleq (1-2S_i)\frac{1}{2\sqrt{S_i(1-S_i)}}$$

在条件 2 下,易知 $L(S_i) \in (-5, 5)$. 在条件 1 下,通过数值计算可知

$$\Phi^{-1}(\lambda_i) \in (-3.1, 3.1)$$
$$b_r(\Phi^{-1}(\lambda_i)) \in (3.1, 0)$$
$$b_r(\Phi^{-1}(\lambda_i)) \geq \Phi^{-1}(\lambda_i)$$

因此可以求出 $B_i = \frac{c_i+h_i}{P_i-c_i}\Phi^{-1}(\lambda_i) + \frac{P_i+s_i+h_i}{P_i-c_i}\cdot b_r(\Phi^{-1}(\lambda_i))$ 的界为

$$\left(3.1\frac{P_i+s_i-c_i}{P_i-c_i}, 3.1\frac{P_i+c_i+s_i+2h_i}{P_i-c_i}\right).$$

那么

$$|B_i \cdot L(S_i)| \in \left(15.5\frac{P_i+s_i-c_i}{P_i-c_i}, 15.5\frac{P_i+c_i+s_i+2h_i}{P_i-c_i}\right) \tag{18}$$

即在条件 1,2 下上式有界,故在条件 1,2,3 下有

$$\frac{dEP_{Ret\,1}}{dT_1} > 0,\ \frac{dEP_{Ret\,2}}{dT_1} < 0$$

通过数值计算可知,对于实例 3.1 中的算例可知 $B_i\cdot$

$L(S_i)$ 的界为(26,120),(28,96). 在条件 1,2 下,要使 $\frac{\mathrm{d}EP_{Ret\,1}}{\mathrm{d}T_1} > 0$, $\frac{\mathrm{d}EP_{Ret\,2}}{\mathrm{d}T_1} < 0$ 成立只需 $M \geq 1\,900$.

下面用同样的分析方式来分析 EP_{Total} 与 T_1 的变化关系. 首先,EP_{Total} 关于 T_1 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}EP_{Total}}{\mathrm{d}T_1} = ((P_1 - c_1) - (P_2 - c_2))\sqrt{M}\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}T_1}\Big[\sqrt{M} - \frac{1}{(P_1 - c_1) - (P_2 - c_2)}\Big(\sum_{i=1}^{2}(c_i + h_i)\Phi^{-1}(\lambda_i) + \sum_{i=1}^{2}(P_i + s_i + h_i)b_r(\Phi^{-1}(\lambda_i))\Big)(1 - 2S_1)\frac{1}{2\sqrt{S_1(1 - S_1)}}\Big]$$

从上面的分析可知

$$\left|\frac{1}{(P_1 - c_1) - (P_2 - c_2)}\Big(\sum_{i=1}^{2}(c_i + h_i)\Phi^{-1}(\lambda_i) + \sum_{i=1}^{2}(P_i + s_i + h_i)b_r(\Phi^{-1}(\lambda_i))\Big)(1 - 2S_1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{S_1(1 - S_1)}}\right| \in \Big(\frac{15.5}{|(P_1 - c_1) - (P_2 - c_2)|}\sum_{i=1}^{2}(P_i + s_i - c_i),\ \frac{15.5}{|(P_1 - c_1) - (P_2 - c_2)|}\sum_{i=1}^{2}(P_i + s_i + c_i + 2h_i)\Big)$$

从现实情况可知,销售单价(P)高的产品的单位利润($P - c$)也要高,那么可以引入下列假设条件:

条件 4

$$P_1 - c_1 < P_2 - c_2$$

因此,在条件 1,2,3,4 下,由命题 1 可知

$$\frac{\mathrm{d}EP_{Total}}{\mathrm{d}T_1} > 0 \qquad (19)$$

计算表明,在条件 1,2,4 下,若 $M > 9\,000$,式(19)成立.

总结以上几条可以得到以下结论:

在条件 1,2,3,4 下,当产品 V_1 的特征描述 T_1 减少时,零售商 1 的收益将增大,零售商 2 的收益会减少,市场利润总量减少. 把这些规律转化为收益增量的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}EPA_{Ret\,1}}{\mathrm{d}T_1} < 0,\ \frac{\mathrm{d}EPA_{Ret\,2}}{\mathrm{d}T_1} > 0,\ \frac{\mathrm{d}EPA_{Total}}{\mathrm{d}T_1} > 0$$

例 4 中的结果可用下图表示:

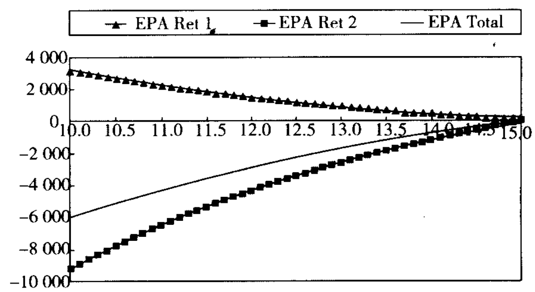

图 2 收益增量与参数 T_1 的关系图

Fig. 2 Relations between profit increment and T_1

3.2 P_2 变化的情况

例4 下面再看看例3.1中的算例. 在其他参数不变的条件下,如果产品 V_2 的特征描述 P_2 变化,两个零售商的市场份额和最优订货量、最大期望收益等量的变化情况见表 3.

表 3 收益值与 P_2 的变化情况

Table 3 Profits' changing with P_2

P_2	S_1	$EQ_{Ret\,1}$	$EP_{Ret\,1}$	S_2	$EQ_{Ret\,2}$	$EP_{Ret\,2}$	EP_{Total}	$EPA_{Ret\,1}$	$EPA_{Ret\,2}$	EPA_{Total}
1 000	0.667	668	27 870	0.333	341	199 334	227 204	0	0	0
900	0.583	585	24 023	0.417	423	209 337	233 322	- 2 348	9 986	6 139
800	0.500	502	20 242	0.500	506	202 913	223 155	- 7 629	3 579	- 4 050
700	0.417	418	16 523	0.583	588	180 083	196 606	- 11 348	- 19 251	- 30 599
600	0.333	335	12 871	0.667	669	140 811	153 682	- 15 000	- 58 522	- 73 522
500	0.250	251	9 294	0.750	751	85 091	94 385	- 18 576	- 114 243	- 132 819
400	0.167	168	5 817	0.833	832	12 922	18 739	- 22 054	- 186 412	- 208 466

从表3可以看出,当初始价格比较高时,如果 P_2 减少,零售商2的最优供应量增加、最大期望收益增加;如果零售商2继续降低价格,他的最优供应量增加、最大期望收益反而减少. 对于产品 V_1,如果零售商2降低价格,产品 V_1 的市场份额将减少,零售商1的最优供应量减少、最大期望收益减少. 下面通过分析表明,在上小节的几个假设条件下,以上规律都成立.

命题5　设 $S_i, \lambda_i, M, i = 1,2$ 满足条件1,2,3. 那么

$$\frac{\mathrm{d}EQ_{\mathrm{Ret}\,1}}{\mathrm{d}P_2} > 0, \frac{\mathrm{d}EQ_{\mathrm{Ret}\,2}}{\mathrm{d}P_2} < 0 \tag{20}$$

证明　零售商1,2的最优供货量关于 P_2 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}EQ_{\mathrm{Ret}\,1}}{\mathrm{d}P_2} = -\sqrt{M}\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}P_2}\Big[\sqrt{M} + (1-2S_1)\Phi^{-1}(\lambda_1)\frac{1}{2\sqrt{S_1(1-S_1)}}\Big]$$

$$\frac{\mathrm{d}EQ_{\mathrm{Ret}\,2}}{\mathrm{d}P_2} = \sqrt{M}\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}P_2}\Big[\sqrt{M} + (1-2S_2)\Phi^{-1}(\lambda_2)\frac{1}{2\sqrt{S_2(1-S_2)}}\Big]$$

由命题1的结论和命题2的证明方法可知命题成立.　　证毕.

零售商1的最大期望收益关于 P_2 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}EP_{\mathrm{Ret}\,1}}{\mathrm{d}P_2} = (P_1 - c_1)\sqrt{M}\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}P_2}\cdot \Big[\sqrt{M} - \Big(\frac{c_1+h_1}{P_1-c_1}\Phi^{-1}(\lambda_1) + \frac{P_1+s_1+h_1}{P_1-c_1}b_r(\Phi^{-1}(\lambda_1))\Big)(1-2S_1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{S_1(1-S_1)}}\Big]$$

按上小节同样的分析方法可知,在条件1,2,3下:

$$\frac{\mathrm{d}EP_{\mathrm{Ret}\,1}}{\mathrm{d}P_2} > 0$$

由于零售商2的最大期望收益及市场收益总量关于 P_2 的导数表达式非常复杂,很难通过进行严格的数学分析来得出结论,因此这里只采用数值分析的方法分析. 通过大量数值算例分析得出的规律与例4中的规律大体相似,图4即表明了一个较为典型的变化关系.

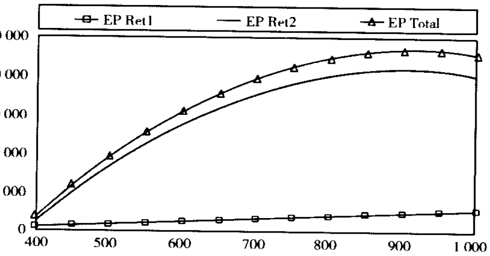

图3　期望收益与参数 P_2 的变化关系图

Fig. 3 Relations between expected profits and parameter P_2

4　结　论

本文引进了产品特征描述和消费者一般支出的定义,以此分析市场中消费者对产品的总体需求情况,进而应用经典报童模型给出了产品的最优供货量和最大期望收益的计算公式. 然后应用数值和数学分析相结合的方法分析了在产品的特征描述变化的条件下,零售商的供货量和期望收益的变化情况.

通过上面几节的分析可以得到以下主要结论:

1) 产品的零售商可以通过技术变革等方法来提高产品的品质,以达到增加市场份额和收益的结果,并且竞争对手的市场份额和收益会随之减少. 市场收益总量这时会减少,这是由于产品质量的提高带来了消费者福利的增加(即支出的减少)的原因.

2) 如果零售商采用降低价格来提高市场份额的方法,他的收益不一定会增加,这是由于新加入的消费者带来的利润有可能不能弥补降价带来的损失,但是竞争对手会由于降价失去市场份额和部分收益,因此降价一般来说可以达到削弱竞争对手的目的,这可能是目前产品价格激烈竞争的原因之一,在降价的幅度不太大的情况下,市场收益总量这时是增加的,如果价格降低太大,市场中商家的收益都会减少,即消费者的总支出减少,从而消费者福利增加.

本文给出了一种分析多产品竞争的分析方法和一些初步研究,可以将它和其他模型相结合来分析一些更复杂的现实问题.

参 考 文 献:

[1]Lau H S, Lau A H L. The newsstand problem: A capacitated multiple-product single-period inventory problem[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 94: 29—42.

[2]Moon I, Silver E A. The multi-item newsvendor problem with a budget constraint and fixed ordering costs[J]. Journal of the Operational Research Society, 2000, 51: 602—608.

[3]杜 荣, 胡奇英, 陈开周. 同类产品多品牌的最优定价模型[J]. 管理科学学报, 2004, 7(3): 69—74.
Du Rong, Hu Qiying, Chen Kaizhou. Optimal pricing model for various brands within product category[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(3): 69—74. (in Chinese)

[4]Mantrala M K, Raman K. Demand uncertainty and supplier's returns policies for a multi-store style-good retailer[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 115: 270—284.

[5]Khouja M, Mehrez A, Rabinowitz G. A two-item newsboy problem with substitutability[J]. Int. J. Production Economics, 1996, 44: 267—275.

[6]Agrawal N, Smith S A. Optimal retail assortments for substitutable items purchased in sets[J]. Naval Research Logistics, 2003, 50.

[7]Lin C-T, Chen C-B, Hsieh H J. Effects of centralization on expected profits in a multi-location newsboy problem[J]. Journal of the Operational Research Society, 2001, 53: 839—841.

[8]Lau A H-L, Lau H-S. Comparative normative optimal behavior in two-echelon multiple-retailer distribution systems for a single-period product[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144: 659—676.

[9]符国群, 佟学英. 品牌、价格和原产地如何影响消费者的购买选择[J]. 管理科学学报, 2003, 6(6): 79—84.
Fu Guoqun, Tong Xueying. How brand, price and country of origin influence consumers' purchase choices[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(6): 79—84. (in Chinese)

[10]Li J, Lau H-S, Lau A H-L. A two-product newsboy problem with satisfaction objective and independent exponential demands[J]. IIE Transaction, 1991, 23(1): 29—39.

[11]Kouvelis P, Gutierrez G J. The newsvendor problem in a global market: Optimal centralized and decentralized control policies for a two-market stochastic inventory system[J]. Management Science, 1997, 43(5): 571—585.

[12]李善民, 曾昭灶. 质量差异化与产品互补型企业兼并问题[J]. 管理科学学报, 2003, 6(6): 54—71.
Li Shanmin, Zeng Zhaozao. Quality differentiation and merger of complement firms[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(6): 54—71. (in Chinese)

[13]Khouja M. The single-period(news-vendor) problem: Literature review and suggestions for future research[J]. Omega. International Journal of Management Science, 1999, 27: 537—553.

[14]Lau A H-L, Lau H-S, Willet K D. Demand uncertainty and returns policies for a seasonal product: An alternative model[J]. Int. J. Production Economics, 2000, 66: 1—12.

[15]Marvel H P, Peck J. Demand uncertainty and returns policies[J]. International Economic Review, 1995, 36(3): 691—714.

Optimal ordering decision in multi-products competition environment

LU Qi-hui, ZHU Dao-li
Management School, Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract: In a multi-product competition market, the retailers of products at first must know the state and the market shares of the products in the markets, then decide the quantities of product through analysis the market and the revenue to gain the maximum profits. It is the fundamental problem in the market inventory management that how to gain the optimal order quantity. In this paper, through introducing the concepts of product characterization description and customer general cost, we give a method of market share and some mathematical properties of market share. Then we use the classical inventory management model-"newsboy problem" model to analysis the optimal ordering decision problem in the multi-products competition environment. In the last of this paper, we give the sensitive analysis and economic explanations of retailers' optimal ordering quantity, optimal expected profits and total profit in the market.

Key words: market competition; newsboy problem; multi-products; inventory problem; decision science