

基于凸度的套期保值模型及分析

杨宝臣¹, 张玉桂¹, 姜中锡²

(1. 天津大学管理学院, 天津 300072; 2. 新加坡南洋理工大学, 新加坡 639798)

摘要: 传统的债券久期和凸度的套期保值是非最优的, 通过考虑国债期货和其最便宜交割债券之间定价关系推导了其正确的套期比率. 套期比率方程明确表示了每种套期工具对对冲即期和远期利率风险的贡献, 数值分析表明传统的套期方法存在过度套期. 当(1)套期期限越长; (2)利率期限结构形状越陡峭; 或(3)最便宜交割债券的息票率越高时, 对高息票债券的过度套期程度越大. 此结论对不同到期期限的债券和最便宜交割债券具有鲁棒性.

关键词: 交叉套期; 凸度套期; 国债期货; 转换因子; 最便宜交割债券; 数值分析

中图分类号: F830

文献标识码: A

文章编号: 1007 - 9807(2005)06 - 0069 - 05

0 引言

当利率变化的不确定性很大时, 对冲债券组合的风险成为一项有挑战性的工作, 此时可以应用债券期权或期货等衍生工具对冲利率风险^[1~3], 其中对冲债券久期(duration)和凸度(convexity)是常用的策略. 文献[4~10]分别研究了久期和凸度的套期保值问题. 在关于久期-凸度套期保值的文献中, 任何两种非冗余性的国债期货合约的组合都可用来对冲久期和凸度变化^[7,11]. 这种传统的套期保值模型至少存在两个方面的问题.

首先, 由于套期保值行为依赖于任两种非冗余国债期货合约组合的选择, 因此难以评估这种套期保值的效果. 其次, 对于国债期货的久期和凸度的度量方法是不正确的, 因此不能准确估计套期保值的比率. 国债期货的利率风险应该考虑国债期货和其最便宜交割债券(cheapest-to-deliver treasuries, CID)之间的联系. 在基于久期的套期保值策略中, 文献[12]通过转换因子(conversion factor)考虑了这种联系, 但是没有考虑在利率变化较大时基于凸度的套期模型.

本文通过拓展文献[12]基于久期的套期模型

解决了传统的基于凸度的套期保值模型中存在的问题.

首先考虑国债期货和它的最便宜交割债券间的无套利定价联系, 得到国债期货和它的最便宜交割债券间的久期及凸度的正确关系. 然后对于给定的套期保值期限, 将债券分解成一个真实债券(generic bond position)和一个虚拟债券(synthetic bond position). 因此, 得到交叉套期保值(cross hedge)比率方程.

不同于文献[12]的单一套期保值比率方程, 本文的方程在对冲久期和凸度以及即期和远期利率风险方面考虑了两种套期工具间的相互依赖性. 也不同于传统的基于凸度的套期模型, 鉴于即期和远期利率风险影响国债期货的套期比率及它们之间的相互依赖性, 作为对冲工具的长期和中期国债期货的选择也不再是任意的.

1 基于凸度的国债期货套期保值模型

1.1 假设

本文基于以下有5点假设^[13,14]:

1) 利率的期限结构是非水平的但平行移动

收稿日期: 2003 - 12 - 18; 修订日期: 2005 - 01 - 28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471051).
作者简介: 杨宝臣(1966—), 男, 河北人, 博士, 教授.

的;2)债券的远期价格是远期合约到期日的即期价格的无偏估计;3)对于国债期货没有盯市(marked to market)及保证金要求,没有百搭牌(the wild card)、交割选择权(delivery option)和互换选择权(swap option);4)最便宜交割债券(CTD)的转换因子不存在偏差;5)套期保值到期日与期货的到期日是一致的。

由于篇幅关系,本文略去关于5条假设的解释。

1.2 债券价格对利率的敏感性

在假设(1)、(2)、(5)下,可以将付息票债券的全价表示为债券远期的现值和一系列零息票债券的现值之和

$$P + A = (P + A)e^{-nt} + \sum_{k=1}^m I_k e^{-r_k t_k} \quad (1)$$

其中: P 为债券净价(报价), A 为当前应计利息, $P + A$ 为债券全价的远期价格, e^{-nt} 为当前至期货合约到期日之间 t 期的折现系数, r 为 t 期以连续复利计算的即期利率, m 为国债期货合约到期前利息支付次数, I_k 为第 t_k 期支付利息, r_k 为当前与第 t_k 期之间以连续复利计算的即期利率。

方程(1)把债券组合的市场价值分解成一个真实债券(generic bond position)的市价与一个虚拟头寸(synthetic bond position)的内在价值之和。

应用修正久期和凸度的定义,对债券价格(净价)关于短期即期利率应用泰勒展开,忽略高于二阶的项,得到债券价格变化的微分方程

$$dP = [- (P + A) D e^{-nt} - (P + A) D] dr + [(P + A) e^{-nt} (C + tD) + (P + A) C] dr^2 \quad (2)$$

其中, $D = \frac{d(P + A)}{dr} \frac{1}{P + A}$, $C = \frac{1}{2} \frac{d^2(P + A)}{dr^2} \frac{1}{P + A}$, 分别为在债券远期合约到期日,债券的修正久期和凸度, $D = [t(P + A)e^{-nt} + \sum_{k=1}^m t_k I_k e^{-r_k t_k}] / (P + A)$, $C = [t^2(P + A)e^{-nt} + \sum_{k=1}^m t_k^2 I_k e^{-r_k t_k}] / [2(P + A)]$, 分别为在债券远期合约到期日支付 $P + A$,在到期前支付 m 次利息的虚拟债券(synthetic bond)的修正久期和凸度。

债券价格的微分方程包括利率的一阶效应(dr 前括号内的项)和二阶效应(dr^2 前括号内的项)。债券的久期表示为债券远期合约和虚拟债券

的久期之和。而债券的凸度表示为债券远期合约和虚拟债券的凸度以及债券远期久期之和。

不同于对传统的久期度量,方程中 dr 前的括号内的项将久期分解为两个部分:(i)关于超出套期保值期限(或债券远期合约到期日)的短期远期利率变化的久期和(ii)在套期保值到期(或债券远期合约到期)时即期利率变化的久期。同样地,方程中 dr^2 前的括号内的项把凸度也分解为两个组成部分。

这种价格变化(包括久期和凸度)的分解是得到交叉套期比率方程的基础,它明确表示了即期和远期利率变化对交叉套期比率影响。它使得中期和长期国债期货合约的选择在基于凸度的套期保值方程中不再是任意的。

1.3 国债期货价格对利率的敏感性

在假设(1)、(3)下,对期货报价关于短期即期利率应用泰勒展开,忽略高于二阶的项,得到

$$dF = \frac{dF}{dr} dr + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dr^2} dr^2 \quad (3)$$

国债期货报价是建立在息票率为6%的基准国债报价的基础上的,它是由CTD的报价和它的转换因子决定的。由假设(3)与(4)知,CTD是可以求出的^[15~17],而且国债期货报价可以直接由CTD报价除以转换因子得到。运用这种无套利关系以及久期和凸度的定义,得到期货报价变化的方程

$$dF = - \frac{(P_{CTD} + A_{CTD})}{f_{CTD}} D_{CTD} dr + \frac{(P_{CTD} + A_{CTD})}{f_{CTD}} C_{CTD} dr^2 \quad (4)$$

其中: f_{CTD} 为CTD在期货到期日的转换因子, F 为期货报价, P_{CTD} 为CTD在期货到期日的报价, A_{CTD} 为CTD在期货到期日的应计利息。

方程(4)表示了期货久期和凸度以及相应的CTD的久期和凸度之间的正确的无套利关系。传统模型错误地运用一个隐含的假设,即在套期保值期限内CTD将保持不变。在传统模型中,关于即期利率变化的期货报价变化只能通过当前期货报价、当前CTD以及即期利率变化解释。

1.4 基于凸度的套期比率方程

在假设(1)、(4)、(5)下,将套期组合和债券组合间的久期与凸度直接匹配。考虑在CBOT交易的长期国债期货和中期国债期货两个对冲工具,并设它们的套期保值比率分别为 h_1 和 h_2 。在本文的分析中,套期保值比率为正值表示期货空头头寸的数量,而负值表示期货多头头寸的数量。

把债券久期(方程 2 中第 1 项)同两种不同的期货久期(方程 4 中的第 1 项)匹配起来得到方程 5. 令债券凸度(方程 2 中第 2 项)等于两种不同的期货凸度(方程 4 中的第 2 项)得到方程 6.

$$(P + A) D e^{-n} + (P + A) D = h_1 \frac{P_{CTD_1} + A_{CTD_1}}{f_{CTD_1}} D_{CTD_1} + h_2 \frac{P_{CTD_2} + A_{CTD_2}}{f_{CTD_2}} D_{CTD_2} \quad (5)$$

$$(P + A) e^{-n} + (C + tD) + (P + A) C = h_1 \frac{P_{CTD_1} + A_{CTD_1}}{f_{CTD_1}} C_{CTD_1} + h_2 \frac{P_{CTD_2} + A_{CTD_2}}{f_{CTD_2}} C_{CTD_2} \quad (6)$$

其中: f_{CTD_1} 和 f_{CTD_2} 分别是相应于两个期货合约中的 CTD_1 和 CTD_2 的转换因子, P_{CTD_1} 和 P_{CTD_2} 分别是 CTD_1 和 CTD_2 在期货到期日的报价, D_{CTD_1} 和 D_{CTD_2} 分别是 CTD_1 和 CTD_2 在期货到期日的久期, C_{CTD_1} 和 C_{CTD_2} 分别是 CTD_1 和 CTD_2 在期货到期日的凸度, A_{CTD_1} 和 A_{CTD_2} 分别是 CTD_1 和 CTD_2 在期货到期日的应计利息.

联立方程式(9)和(10)的解为

$$h_1 = \frac{((P + A) D e^{-n} + (P + A) D) C_{F_2} - ((P + A) e^{-n} (C + tD) + (P + A) C) D_{F_2}}{D_{F_1} C_{F_2} F_1 - C_{F_1} D_{F_2} F_1} \quad (11)$$

$$h_2 = \frac{-((P + A) D e^{-n} + (P + A) D) C_{F_1} + ((P + A) e^{-n} (C + tD) + (P + A) C) D_{F_1}}{D_{F_1} C_{F_2} F_2 - C_{F_1} D_{F_2} F_2} \quad (12)$$

长期国债期货的套期保值比率(h_1)可以分解为两部分,第 1 部分指长期国债期货对长期利率风险的套期保值部分,第 2 部分指长期国债对短期利率风险的套期保值部分.同样地,中期国债期货的套期保值比率(h_2)也可分解为两部分,第 1 部分指中期国债期货对长期利率风险的套期保值部分,第 2 部分指中期国债期货对短期利率风险的套期保值部分.

2 数值分析

2.1 数值分析的设计

下面通过数值分析来比较传统的和本文的套期保值比率之间的区别.重点研究以下因素导致的套期保值比率差异.(i)利率期限结构的形状^[18];(ii)套期保

注意到期货合约的久期与 CTD 的久期之间的关系

$$D_F = \frac{(P_{CTD} + A_{CTD}) D_{CTD}}{f_{CTD} \cdot F} \quad (7)$$

其中: D_F 为期货合约的久期.

类似地,可以得到期货合约的凸度与 CTD 的凸度之间的关系

$$C_F = \frac{1}{2F} \frac{d^2 F}{dr^2} = \frac{(P_{CTD} + A_{CTD}) C_{CTD}}{f_{CTD} \cdot F} \quad (8)$$

其中: C_F 为期货合约的凸度.

把期货久期和凸度以及相应的 CTD 的久期和凸度间的正确关系代入方程(5)、(6)中,分别得久期匹配的方程(9)和凸度匹配的方程(10)

$$(P + A) D e^{-n} + (P + A) D = h_1 D_{F_1} F_1 + h_2 D_{F_2} F_2 \quad (9)$$

$$(P + A) e^{-n} (C + tD) + (P + A) C = h_1 C_{F_1} F_1 + h_2 C_{F_2} F_2 \quad (10)$$

其中: F_1 、 F_2 分别是两个期货合约的报价, D_{F_1} 、 D_{F_2} 分别是两个期货合约的久期, C_{F_1} 、 C_{F_2} 分别是两个期货合约的凸度.

值期限(从当前至国债期货到期日);(iii)债券的息票率以及到期时间;(iv) CTD 的息票率以及到期时间;(v)长中期国债期货的不同组合.

通过这种分析,可以突出本文的套期比率相对于传统的套期比率的行为,也可以证明基于不正确的国债期货的久期和凸度的传统套期比率的非最优性.

1)假设对冲工具是 30 a 长期国债期货和 10 a、5 a 或 2 a 中期国债期货之一.对于 30 a 长期国债期货的情况,考虑近似最大、近似中等和近似最小的到期期限的国债是它的 CTD ;对于 10 a 中期国债期货,考虑近似最大和近似最小的到期期限的国债是它的 CTD ;对于 2 a 的短期国债期货,考虑只有近似最大的到期期限的国债是它的 CTD .把 4.3、10.3 和 20.3 a 作为债券有效期,把 3%、

7%和11%作为CTD息票率.假设利率期限结构函数 $r(t) = 0.045 + \text{slope} \times (\ln(t + 5.0) - \ln(5.0))$, 分别取斜率参数值(slope)为0.02、0.04和0.06.因此,每组中的每个套期保值比率的统计以162个样本为基础(即 $162 = 6 \times 3 \times 3 \times 3$).

2) 在计算“套期比率和($h_1 + h_2$)的差异”中,首先取各套期比率的绝对值再相加.该差额是反映总的套期保值头寸和成本的差额.

2.2 数值分析的主要结果

数值分析结果表明,传统模型套期使用相对多的期货合约,在绝大多数情况下套期保值成本较高.

数值分析的关键结果可概括如下:1)传统模型相对于本文的套期保值来说过度套期(overhedge),从套期保值期限的合理变化、债券和CTD的息票率、期限结构的斜率参数以及长短期期货合约的各种组合中均得到了该结果.2)在传统模型中,套期保值期限越长、期限结构的形状越陡峭、债券和CTD的息票率越高,传统模型的过度套期程度越大.

在传统套期模型中,长期期货过度套期和中期期货过度套期,随债券的息票率和CTD息票率的增加而增大,表现尤为明显.相对地,在随着套期保值期限变长或期限结构变陡时,长期期货过度套期增加而中期期货过度套期减少,套期保值期限和期限结构效应相对较弱.3)尽管到期期限的效应不是单调的,传统模型中对不同到期期限的债券及CTD的过度套期依然存在.

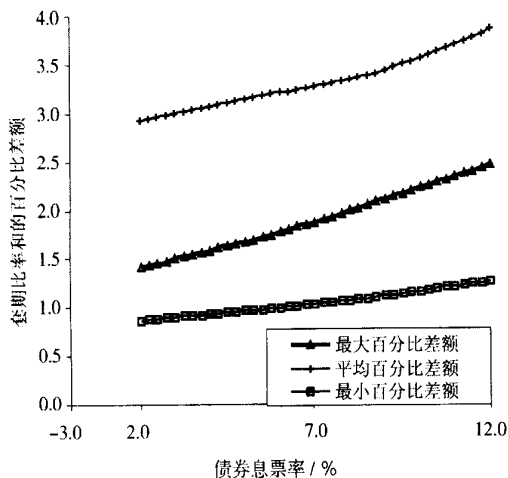


图1 长期和中期国债期货的套期比率和的百分比差额(不同的债券息票率)
Fig. 1 Percentage difference in sum of hedge ratios for T-bond and T-note futures (for various bond coupon rates)

图1给出了随着债券息票率变化,套期比率差异的百分比变化.假设一种典型的债券组合的息票率为10%,传统套期保值策略的成本总体上比本文套期保值策略要多至少2%.

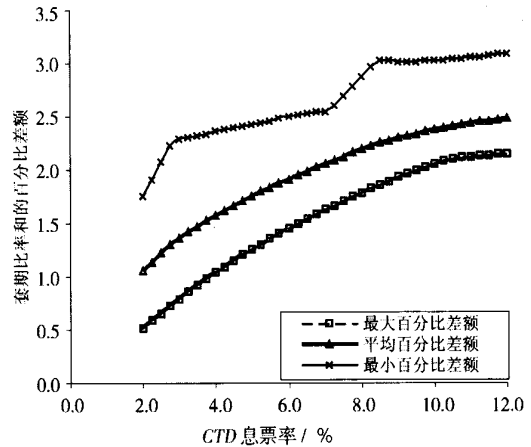


图2 长期和中期国债期货的套期比率和的百分比差额(不同的最便宜交割债券息票率)
Fig. 2 Percentage difference in sum of hedge ratios for T-bond and T-note futures (for various CTD coupon rates)

图2给出了随着CTD的息票率变化,套期比率差异的百分比变化.假设CTD的息票率为12%,传统套期保值套期成本总体上比本文的要多至少1.3%.

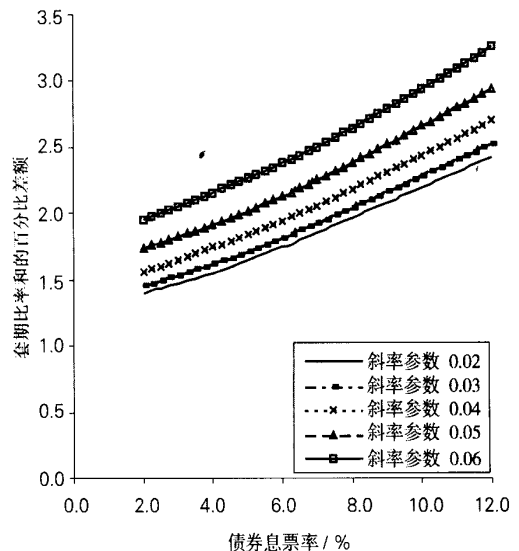


图3a 长期和中期国债期货的套期比率和的百分比差额(利率期限结构的不同斜率参数和债券息票率)
Fig. 3a Percentage difference in sum of hedge ratios for T-bond and T-note futures (for various slope parameters of term structure and bond coupon rates)

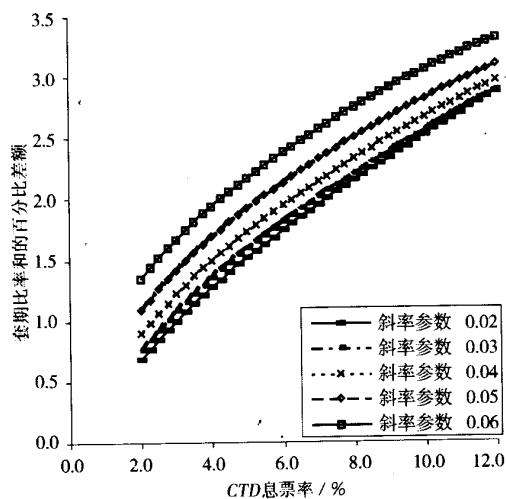


图3b 长期和中期国债期货的套期比率之和的百分比差额
(利率期限结构的不同斜率参数和 CTD 息票率)

Fig. 3b Percentage difference of hedge ratios for T-bond and T-note futures (for various slope parameters of term structure and CTD coupon rates)

图1、图2中传统套期保值模型的过度套期的结论是建立在较小平均斜率参数(即0.4)的基础上的. 传统套期策略的过度套期在利率期限结构变陡时更大, 因而本文的比较还是一种比较保守的情况. 对于不同斜率参数和其他条件变化时, 二者的差异见图3a和3b.

3 结论

本文研究了传统的凸度套期模型中存在的两个问题, 即(1)忽略了国债期货和它的 CTD 间的联系, 这导致了非最优的套期比率; (2) 在任两种非冗余国债期货组合的任意选择. 通过数值分析详细地比较了传统的和本文的套期比率间的差额, 最重要的发现是本文的套期比率比相应的传统套期比率小得多. 尤其当套期期限变长、期限结构变陡或高息票率国债是 CTD 时, 传统套期保值策略中过度套期在对冲高息票率债券时变得更大. 尽管到期期限效应并不很明显, 在不同到期期限的债券和 CTD 中过度套期依然存在.

参考文献:

- [1]陈晓红, 朱霞. 基于神经网络的期货套期保值决策支持系统[J]. 管理科学学报, 2001, 4(6): 18—23.
Chen Xiao-hong, Zhu Xia. Future hedge decision support system based on neural network[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(6): 18—23. (in Chinese)
- [2]刘海龙, 吴冲锋. 期权定价方法综述[J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 67—73.
Liu Hai-long, Wu Chong-feng. Survey of option pricing methods[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 67—73. (in Chinese)
- [3]蔡明超, 杨朝军, 张静. 国债价格行为的布朗桥运动模型与久期方法比较[J]. 中国管理科学, 2003, 11(1): 28—32.
Cai Ming-chao, Yang Chao-jun, Zhang Jing. Brown motion and duration method in government bonds' price behavior[J]. Chinese Journal of Management Science, 2003, 11(1): 28—32. (in Chinese)
- [4]Schaefer S M. Immunization and duration: A review of theory, performance and applications[J]. Midland Corporate Finance Journal, 1984, Fall: 99—115.
- [5]Bierwag G O, Kaufman G G, Latta C M. Duration models: A taxonomy[J]. The Journal of Portfolio Management, 1988, 15: 50—54.
- [6]Godman L, Vijayaraghavan N R. Combining various futures contracts to get better hedges[J]. Advances in Futures and Options Research, 1988, 3: 257—268.
- [7]Daigler R T, Copper M. A future duration-convexity hedging method[J]. The Financial Review, 1998a, 33: 61—80.
- [8]Daigler R T, Copper M. Simultaneously hedging bond duration and convexity[J]. Derivatives Quarterly, 1998b, 5: 50—59.
- [9]王春峰, 张伟. 具有隐含期权的商业银行利率风险测量与管理: 凸度缺口模型[J]. 管理科学学报, 2001, 4(5): 21—29.
Wang Chun-feng, Zhang Wei. Measuring and managing interest rate risk in commercial banks with embedded option: Convexity gap model[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(5): 21—29. (in Chinese)
- [10]朱世武, 李豫, 董岳. 交易所债券组合动态套期保值策略研究[J]. 金融研究, 2004, (9): 65—76.
Zhu Shi-wu, Li Yu, Dong Yue. Study on dynamic hedge strategies for bond portfolio in Shanghai Security Exchange[J]. Journal of Financial Research, 2004, (9): 65—76. (in Chinese)
- [11]Neuberger A. Hedging long-term exposures with multiple short-term futures contracts[J]. Review of Financial Studies, 1999, 12: 429—459.

(下转第82页)

method of stratified sampling with the help of Nanfang Bond Company. The results showed the level of investors' risk perceptions was low on the seven risk resources, especially on the risk of pursuing high going-up stock and excess speculation. The two factors that years in stock and asset would influence the risk perceptions of the pursuing high going-up stock and excess speculation. From the model of stock investment behavior, we found the risk perception had positive effect on investment performance, and governmental information, information asymmetry and information announcement had positive effect on the risk perception. The return and reassign of the company had negative effect on the risk perception. Finally we gave some suggestion based on the results on the investors' education and management of return of the company.

Key words: stock investors; risk perception; the stock market

(上接第73页)

- [12] Rendleman R J Jr. Duration-based hedging with Treasury bond futures[J]. *Journal of Fixed Income*, 1999, 9: 84—91.
- [13] Castellino M G. Hedge effectiveness: Basis risk and minimum variance hedging[J]. *Journal of Futures Markets*, 2000, 20: 89—103.
- [14] Lence S H. On the optimal hedge under unbiased futures prices[J]. *Economics Letters*, 1995, 47: 385—388.
- [15] Benninga S, Wiener Z. An investigation of cheapest-to-deliver on the treasury bond futures contract[J]. *Journal of Computational Finance*, 1999, 2: 39—55.
- [16] Livingston M. The cheapest deliverable bond for the CTD treasury bond futures contract[J]. *Journal of Futures Markets*, 1984, 4: 161—172.
- [17] Castellino M, Chatterjee S. T-bond futures prices: Cheapest to deliver versus the index[J]. *Advances in Futures and Options Research*, 1988, 3: 291—300.
- [18] Kane A, Marcus A J. Conversion factor risk and hedging in the treasury bond futures market[J]. *Journal of Futures Markets*, 1984, 4: 55—64.

Convexity based hedge with Treasury futures : Model and numerical analysis

YANG Bao-chen¹, ZHANG Yu-gui², Joseph Kang Choong Seok²

1. School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. Nanyang Business School, Nanyang Technological University, Singapore 639798

Abstract: Traditional hedges of bond duration and convexity are non-optimal. We derive correct hedge ratios by capturing the neglected volatility linkage between Treasury futures and cheapest-to-deliver Treasuries. Our hedge-ratio equations specify each hedge instrument's contribution against short-term spot and forward rate exposures. Numerical analysis indicates that traditional hedge substantially over-hedges. The relative over-hedge is especially large in hedging high coupon bond when the hedge horizon is long, the term structure is steep, or the cheapest-to-deliver is a high coupon Treasury. The results are robust to various maturities of bond and the cheapest-to-deliver Treasuries.

Key words: cross hedge; convexity hedge; Treasury futures; conversion factor; cheapest-to-deliver (CTD); numerical analysis