随机跳跃幅度的最优消费与证券选择策略问题①

杨瑞成[1] , 刘坤会[2]
(1. 烟台师范学院数学与信息学院, 烟台 264025; 2. 北京交通大学理学院, 北京 100044)

摘要: 在最优消费与证券选择问题中,假定投资市场有两种资产可供选择:一种为无风险资产(银行债券),另一种为风险资产(股票). 由于受重大信息的影响,风险资产的价格往往会产生跳跃. 文章研究了这种带跳跃的投资问题,用泊松过程与布朗运动模拟了投资者的财富过程. 为使投资者在整个生命周期的消费效用期望值最大,在跳跃幅度为一随机变量的条件下,利用贝尔曼动态规划原理,导出了最优消费及投资策略所满足的方程组,并且在跳跃幅度的概率分布已知的情况下,针对具体的参数值,给出了最优初始策略的数值解与最大消费效用期望值.

关键词: 随机跳跃幅度; 贝尔曼动态规划原理; 泊松过程; 布朗运动; 最优消费与证券选择策略
中图分类号: F224 文献标识码: A 文章编号: 1007 - 9807(2005)06 - 0083 - 05

0 引 言

传统的最优消费与证券选择问题由 Merton[1] 提出,模型假定投资市场有两种资产可供选择:一种为风险资产,譬如股票;另一种为无风险资产,譬如银行债券. 投资者通过构造资产的投资比例使其消费效用的期望值最大. 许多文献从不同的角度讨论此问题[2~8]. 一般情况下,风险资产的价格用几何布朗运动模拟其随机性,但是并不绝对一致,当一些重大信息到来时,风险资产的价格往往会发生跳跃,于是产生了许多带"跳跃过程"的最优消费与证券选择模型[9~11]. 本文讨论这种带跳跃的投资问题,与以往文献所不同的是,本文讨论的"跳跃过程"的跳跃幅度是一随机变量,为了使投资者在整个生命周期所获得的消费效用的期望值最大,利用贝尔曼动态规划原理,得出了最优消费与投资策略所应满足的方程组,并且在跳跃幅度的概率分布已知的情况下,针对具体参数,得出了最优策略的数值解与最大消费效用期望值.

1 模型建立

首先假定金融投资市场是完备的,且有两种资产可供投资者选择. 一种为无风险资产(银行存款),其 $t(t \geq 0)$ 时刻的价格 B_t 满足

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = r\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中, $r > 0$, 为银行收益率.

另一种为风险资产(股票),其 t 时刻的价格 S_t 服从

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z_t + \mathrm{d}q_t \tag{2}$$

其中:常数 $\mu > r$, 表示股票的预期收益率; $\sigma > 0$, 为股票价格不出现"跳跃过程"时预期收益率的波动标准差. 此价格过程包括两种不确定因素: z_t 是一维标准布朗运动[12]; q_t 是强度为 λ 的泊松过程[13], 表示价格的"跳跃过程", 其在 $(t, t+\Delta t)$ 时间内的增量 Δq_t 满足

$$\begin{cases} P\{\Delta q_t = 0\} = 1 - \lambda\Delta t \\ P\{\Delta q_t = \eta\} = \lambda\Delta t \end{cases} \tag{3}$$

其中: $P(\cdot)$ 表示概率; η 表示跳跃幅度, 为一定

① 收稿日期: 2003 - 04 - 29; 修订日期: 2004 - 03 - 12.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19671004).
作者简介: 杨瑞成(1970 —), 男, 山东潍坊人, 博士.

数;且 z_t 与 q_t 是相互独立的.

记投资者 t 时刻的财富为 W_t,消费过程为 C_t,投资于股票的比例为 $\pi_t \in [0,1]$,即风险资产 $S_t = \pi_t W_t$,无风险资产 $B_t = (1 - \pi_t) W_t$,则投资者的财富变化过程为 $\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}S_t + \mathrm{d}B_t = (\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z_t + \mathrm{d}q_t)\pi_t W_t + r(1 - \pi_t) W_t \mathrm{d}t - \mathrm{d}C_t$,即服从以下随机微分方程

$$\mathrm{d}W_t = [\pi_t W_t(\mu - r) + rW_t - C_t]\mathrm{d}t + \pi_t \sigma W_t \mathrm{d}z_t - \pi_t W_t \mathrm{d}q_t \qquad (4)$$

及初始条件 $W_s = x$. 其中, $s \ge 0$,为初始时刻, $x \ge 0$,为初始财富.

如果投资者 t 时刻的投资策略 (π_t, C_t) 满足 $W_t \ge 0$,称此策略为允许策略. 记所有允许策略的全体为 $\Sigma = \{(\pi, C)\ \pi = \{\pi_t, t \ge s\}, C = \{C_t, t \ge s\}\}$.

投资者的目的是选择一最优投资策略,使整个生命周期的消费效用期望值函数(称为目标函数)最大,即

$$J(x) = \max_{\Sigma} E\left(\int e^{-\beta t} U(C_t)\, \mathrm{d}t\right) \qquad (5)$$

这里: E 表示数学期望; $\beta > 0$,表示未来消费的贴现率; $U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ 是消费效用函数, $\gamma \in (0, 1)$,为相对风险厌恶参数.

2 贝尔曼方程与最优投资策略

为叙述方便,引入下列两算子

$$L(C) = U(C) - CV'(x) \qquad (6)$$

$$R(\pi) = (\mu - r)\pi x V'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \pi^2 x^2 V''(x) + \lambda E_\eta[V((1 - \pi\eta) x)] \qquad (7)$$

其中, $E_\eta(\cdot)$ 表示关于随机变量 η 的条件期望.

定理 1 对任意的 $x \in (0, +\infty)$,若存在凸函数 $V(x)$ 满足下列贝尔曼方程[14]

$$rxV'(x) - (\lambda + \beta) V(x) + \max_C L(C) + \max_\pi R(\pi) = 0 \qquad (8)$$

则 $V(x) \equiv J(x)$.

证明 由式(8)知,对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 和控制策略 $(\pi, C) \in \Sigma$,有

$$rxV'(x) - (\lambda + \beta) V(x) + L(C) + R(\pi) \le 0 \qquad (9)$$

假定 $(\pi^*, C^*) \in \Sigma$ 为使 $L(C^*) = \max_{C \in \Pi} L(C)$, $R^* = \max_{\pi \in \Pi} R(\pi)$ 同时成立的最优控制策略,则

$$rxV'(x) - (\lambda + \beta) V(x) + L(C^*) + R(\pi^*) = 0 \qquad (10)$$

对任意的 $T > 0$,利用伊藤(Ito)公式[14]对函数 $e^{-\beta t}V(W_t)$ 展开后,两边取期望,得

$$Ee^{-\beta(T-s)} V(W_{T-s}) - V(x) = E\int_s^{T-s} [-\beta V(W_t) + (\pi_t W_t(\mu - r) + rW_t - C_t) V'(W_t) + \sigma^2 V''(W_t)/2 + \lambda E_\eta(V((1 - \pi_t\eta) W_t) - V(W_t))]\mathrm{d}t \qquad (11)$$

令 $T \to \infty$,得

$$V(x) = -E\int_s^\infty [-\beta V(W_t) + (\pi_t W_t(\mu - r) + rW_t - C_t) V'(W_t) + \sigma^2 V''(W_t)/2 + \lambda E_\eta(V((1 - \pi_t\eta) W_t) - V(W_t))]\mathrm{d}t = -E\int_s^\infty [rW_t V'(W_t) - (\lambda + B) V(W_t) + L(C) + R(\pi) - U(C_t)]\mathrm{d}t \ge E\int_s^\infty U(C_t)\,\mathrm{d}t \qquad (12)$$

所以 $V(x) \ge J(x)$.

再由存在 $(\pi^*, C^*) \in \Sigma$,使得式(10)成立,因此 $V(x) \equiv J(x)$.

由定理 1 可以看出,目标函数 $J(x)$ 应为 $(0, +\infty)$ 上的凸函数,且满足下列贝尔曼方程

$$rxJ'(x) - (\lambda + \beta) J(x) + \max_C L(C) + \max_\pi R(\pi) = 0 \qquad (13)$$

命题 1 $L = \max_{C \in \Pi} L(C) = \max_{C \in \Pi}\{U(C) - CJ'(x)\}$ 的最优解 C^* 满足 $\frac{\partial L}{\partial C} = 0$,即

$$C^* = (U')^{-1}(J'(x)) \qquad (14)$$

其中, $(U')^{-1}(\cdot)$ 表示 $U'(\cdot)$ 的逆函数.

命题 2 如果 $J(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的凸函数,则 $R = \max_{\pi \in \Pi} R(\pi) = \max_{\pi \in \Pi}\{(\mu - r)\pi x J'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2\pi^2 x^2 J''(x) + \lambda E_\eta[J((1 - \pi\eta) x)]\}$ 的最优解 π^* 满足 $\frac{\partial R}{\partial \pi} = 0$,即

$$(\mu - r) xJ'(x) + \sigma^2 x^2 J''(x)\pi^* - \lambda x E_\eta[\eta J'((1 - \pi^*\eta) x)] = 0 \qquad (15)$$

证明 由于 $J(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的凸函数, $J''(x) \le 0$,因此函数 $R(\pi)$ 必存在最大值,即存在

最优解 π^* 满足 $\frac{\partial R}{\partial \pi} = 0$,命题 2 成立.

由式(15) 可以看出 $J(x)$ 的函数形式应为 $J(x) = bx^n$,把它带入式(13) 及式(14),经过简单的代数运算,得

$$n = 1 - \gamma \tag{16}$$

$$b = \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\beta + \lambda + r(\gamma - 1) + (\mu - r)(\gamma - 1)\pi^* + 1/2\gamma(1-\gamma)\sigma^2(\pi^*)^2 - \lambda E_\eta\left((1-\eta\pi^*)\right)^{1-\gamma}}{\gamma}\right)^{-\gamma} \tag{17}$$

$$C^* = b(1-\gamma)x \tag{18}$$

显然,$J(x) = bx^{1-\gamma}$ 为$(0, +\infty)$ 上的凸函数,且满足式(15).

由反馈控制器原理[14]及前面的讨论得出如下结论.

定理 2　如果 t 时刻的消费及投资策略(π_t^*, C_t^*) 是下列方程组的解

$$\begin{cases} (\mu - r) - \gamma\sigma^2\pi_t^* - \\ \qquad \lambda E_\eta\left[\eta(1-\eta\pi_t^*)^{\gamma-1}\right] = 0 \\ C_t^* = \left(b(1-\gamma)\right)^{-\frac{1}{\gamma}}W_t^* \end{cases} \tag{19}$$

且满足 $b > 0$,那么(π_t^*, C_t^*) 为所求最优消费投资策略,其中,W_t^*为对应于最优消费投资策略时的财富.

由以上方程组很难求出 π_t^* 的解析解,但是如果随机变量 η 的概率分布及所涉及到的参数值已知,可以通过计算得出最优策略的具体数值解及最大消费效用期望值.

3　算例分析

假设银行收益率 $r = 0.02$,未来消费的贴现率 $\beta = 0.01$,泊松过程的强度参数 $\lambda = 0.7$. 如果某投资者从现在$(s = 0)$ 开始,其初始财富 $x = 10$ 万元,相对风险厌恶参数 $\gamma = 0.8$.

算例 1　假定股票的预期收益率 $\mu = 0.1$,波动标准差 $\sigma = 0.4$;跳跃幅度 η 以概率 1 取常数 a,设 $a = 0.5$(这种情况可解释为投资者在 Δt 时间内以 $\lambda\Delta t$ 的概率收到相同的分红 a). 由方程组(19) 可以看出,π_t^* 是不随时间的变化而变化的. 利用 Mathematica 软件可以得出 $\pi_t^* = 0.7419$,初始消费量为 1.039 1 万元,投资于股票的初始量为 6.648 1 万元,购买银行债券的初始量为 2.312 8 万元,整个生命周期的消费效用的最大期望值为 1 319.47 元.

算例 2 假定跳跃幅度 η 服从$[-1,1]$ 的均匀分布,表 1 给出了当股票价格的波动标准差 $\sigma = 0.4$ 时,股票的预期收益率 μ 从 0.040 变化到 0.205 时的最优初始策略及相应的目标函数值 $J(x)$. 表 2 给出了当股票价格的预期收益率 $\mu = 0.1$ 时,波动标准差 σ 从 0.8 变化到 2.9 时,相应的最优初始策略的数值解及消费效用的最大期望值 $J(x)$(数据均通过 Mathematica 软件计算得出).

表 1　最优初始投资策略、最大效用期望值与股票的预期收益率之间的关系

Table 1 Distribution on optimal initial investment strategy, maximal utility expectation and stock expected return rate

μ	π_0^*	C_0^*	B_0^*	S_0^*	$J(x)$	μ	π_0^*	C_0^*	B_0^*	S_0^*	$J(x)$
0.040	0.114 3	3.898 4	5.404 2	0.697 4	0.252 0	0.125	0.577 1	1.653 4	3.529 8	4.816 8	0.291 0
0.045	0.142 8	3.760 6	5.348 4	0.891 0	0.252 9	0.130	0.601 0	1.589 7	3.355 7	5.054 6	0.295 7
0.050	0.171 4	3.622 4	5.284 5	1.093 1	0.253 9	0.135	0.636 7	1.432 9	3.112 4	5.454 7	0.287 0
0.055	0.199 8	3.485 2	5.213 1	1.301 7	0.255 1	0.140	0.660 6	1.326 9	2.943 7	5.729 4	0.289 9
0.060	0.228 7	3.334 6	5.141 0	1.524 4	0.256 4	0.145	0.685 2	1.219 4	2.764 1	6.016 5	0.291 3
0.065	0.256 4	3.212 1	5.047 5	1.740 4	0.258 1	0.150	0.709 1	1.111 6	2.585 6	6.302 8	0.292 7
0.070	0.284 5	3.076 9	4.953 5	1.969 6	0.259 8	0.155	0.734 1	1.010 4	2.390 3	6.599 3	0.291 4
0.075	0.312 6	2.942 0	4.851 7	2.206 3	0.258 5	0.160	0.755 6	0.919 7	2.219 2	6.861 1	0.294 1
0.080	0.340 4	2.808 9	4.743 7	2.448 1	0.263 7	0.165	0.782 5	0.811 0	1.998 6	7.190 4	0.286 7
0.085	0.368 5	2.674 8	4.625 9	2.699 3	0.265 7	0.170	0.802 7	0.728 9	1.829 2	7.441 9	0.288 6
0.090	0.396 0	2.544 1	4.503 4	2.952 5	0.268 0	0.175	0.812 0	0.686 2	1.751 0	7.562 8	0.310 9
0.095	0.425 3	2.413 8	4.359 8	3.226 4	0.269 4	0.180	0.845 3	0.563 1	1.459 9	7.977 0	0.283 6
0.100	0.445 3	2.309 9	4.265 7	3.424 4	0.275 9	0.185	0.865 2	0.488 4	1.282 2	8.229 4	0.280 8
0.105	0.478 0	2.157 8	4.093 6	3.749 6	0.275 1	0.190	0.885 3	0.416 3	1.099 3	8.484 4	0.275 3
0.110	0.504 8	2.032 9	3.945 3	4.021 8	0.277 7	0.195	0.904 5	0.349 3	0.921 6	8.729 1	0.269 1
0.115	0.531 5	1.909 4	3.790 4	4.300 2	0.280 0	0.200	0.922 0	0.290 7	0.757 3	8.952 0	0.264 0
0.120	0.555 8	1.797 2	3.643 7	4.559 1	0.284 2	0.205	0.938 2	0.238 7	0.603 2	9.158 1	0.259 2

从表 1 可以看出,当银行存款收益率一定,投资于股票的最优初始数量 S_0^*(以万元计) 随着股

票的预期收益率的增加而增长,而最优银行存款初始量 B_0^* (以万元计) 及最优消费数量 C_0^* (以万元计) 却相应减少. 事实上,当股票的预期收益率远大于银行债券利率且股票价格波动不是很大的情况下,投资者易于选择加大投资股票的比例以期获得更大的回报. 但是,消费效用期望最大值 $J(x)$ (以万元计) 的变化不是很大,其规律也不明显,但可以通过计算得出其数值解.

表 2 最优初始投资策略、最大效用期望值与股票预期收益率的波动标准差之间的关系

Table 2 Distribution on optimal initial investment strategy, maximal utility expectation and standard variance of stock expected return rate

σ	π_0^*	C_0^*	B_0^*	S_0^*	$J(x)$	σ	π_0^*	C_0^*	B_0^*	S_0^*	$J(x)$
0.8	0.826 1	0.404 5	1.668 7	7.926 8	0.051 1	1.9	0.163 2	4.083 1	4.951 3	0.965 6	0.148 1
0.9	0.675 5	1.144 2	2.873 7	5.982 1	0.062 0	2.0	0.147 4	4.179 3	4.962 7	0.858 0	0.154 3
1.0	0.558 2	1.775 6	3.633 5	4.590 9	0.072 4	2.1	0.134 0	4.260 2	4.970 7	0.769 1	0.159 8
1.1	0.467 7	2.284 8	4.106 8	3.608 4	0.082 3	2.2	0.122 3	4.331 5	4.975 2	0.693 3	0.165 0
1.2	0.397 3	2.691 1	4.405 1	2.903 8	0.092 3	2.3	0.112 1	4.393 4	4.978 1	0.628 5	0.169 8
1.3	0.335 6	3.049 4	4.618 0	2.332 6	0.103 9	2.4	0.102 9	4.448 3	4.980 4	0.571 3	0.174 5
1.4	0.294 8	3.293 5	4.729 4	1.977 1	0.111 2	2.5	0.094 9	4.497 1	4.980 7	0.522 2	0.178 7
1.5	0.257 6	3.515 0	4.814 5	1.670 5	0.119 9	2.6	0.087 7	4.504 7	5.013 4	0.481 9	0.182 8
1.6	0.228 2	3.691 7	4.868 7	1.439 6	0.127 2	2.7	0.081 5	4.578 5	4.979 6	0.441 9	0.186 2
1.7	0.202 7	3.844 9	4.907 5	1.247 6	0.134 7	2.8	0.075 9	4.612 6	4.978 5	0.408 9	0.189 5
1.8	0.181 3	3.974 2	4.933 3	1.092 5	0.141 7	2.9	0.070 5	4.645 3	4.977 2	0.377 5	0.193 1

表 2 表明,初始最优投资策略 π_0^* 随着股票价格波动的标准差 σ 的递增而减少,而初始最优消费 C_0^* (以万元计) 及效用期望最大值 $J(x)$ (以万元计) 随着 σ 的递增一直递增. 相应地,投资股票的最优数量 S_0^* (以万元计) 一直减少,银行存款最优数量 B_0^* (以万元计) 的增减取决于消费及投资于股票的数量之和. 由表 2 可以得出,银行存款数量首先递增然后递减,进一步可以看出,当股票价格波动较大时,如当 $\sigma = 2.9$,远大于股票预期收益率 $\mu = 0.1$ 时,投资者为避免较大的风险,投资股票的比例仅为 0.070 5.

实际上,利用动态规划原理[15],把任意时刻 看作初始时刻,可以求出任意时刻的最优投资策略及相应的最大消费效用期望值.

4 结束语

本文通过在风险资产中引入"跳跃过程",构造了跳跃幅度为随机变量时的消费投资模型. 利用贝尔曼动态规划原理,得出了最优消费与投资策略应满足的方程组. 在跳跃幅度的概率分布已知的情况下,对具体的参数值得出了相应的最优初始策略及消费效用的最大期望值.

参 考 文 献:

[1] Merton R C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 8(3): 373—413.

[2] 刘海龙, 樊治平, 潘德惠. 带有交易费用的证券投资最优策略[J]. 管理科学学报, 1999, 2(4): 39—43.
Liu Hailong, Fan Zhiping, Pan Dehui. The optimal strategy of security investment with transaction costs[J]. Journal of Management Sciences in China, 1999, 2(4): 39—43. (in Chinese)

[3] Duffie D, Fleming W, Soner M, *et al*. Hedging in incomplete markets with HARA utility[J]. Journal of Economic, Dynamics and Control, 1997, 21: 753—782.

[4] Cuoco D. Optimal consumption and equilibrium prices with portfolio constraints and stochastic income[J]. Journal of Economic Theory, 1997, 72: 33—73.

[5] Pham H. Smooth solutions to optimal investment models with stochastic volatilities and portfolio constraints[J]. Applied Mathematics & Optimization, 2002, 46: 55—78.

[6]徐叙松, 陈彦斌. 绝对离差证券组合投资模型及其模拟退火算法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(3): 79—85.
Xu Xusong, Chen Yanbin. Portfolio choice model based on mean absolute deviation and it's simulated annealing algorithm[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(3): 79—85. (in Chinese)

[7]杜子平, 张世英. 向量随机波动模型的共因子研究[J]. 管理科学学报, 2002, 5(1): 47—49.
Du Ziping, Zhang Shiying. Study on common factors of vector stochastic volatility[J]. Journal of Management Sciences in China 2002, 5(1): 47—49. (in Chinese)

[8]王　征, 樊治平, 潘德惠. 证券市场影响下投资的最优策略分析[J]. 决策与决策支持系统, 1997, 7(4): 65—70.
Wang Zheng, Fan Zhiping, Pan Dehui. Optimal strategy analysis under the security market[J]. Decision and Decision Support System, 1997, 7(4): 65—70. (in Chinese)

[9]刘海龙, 吴冲锋. 考虑随机方差的最优消费和投资策略问题[J]. 管理工程学报, 2002, 16(1): 47—49.
Liu Hailong, Wu Chongfeng. Optimal consumption and investment problem with stochastic volatility[J]. Journal of Management Engineering, 2002, 16(1): 47—49. (in Chinese)

[10]Aase K K. Optimal portfolio diversification in a general continuous time model[J]. Stochastic Process and Their Application, 1984, 18(1): 81—98.

[11]Aase K K. Adissible investment strategies in continuous trading[J]. Stochastic Process and Their Application, 1988, 30(2): 291—301.

[12]Bernt Oksendall. Stochastic Differential Equations[M]. 4th ed. New York: Springer-Verlag, 1995. 9—12.

[13]邓永录, 梁之舜. 随机点过程及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998. 17—115.
Deng Yonglu, Liang Zhishun. Stochastic Point Process and Application[M]. Beijing: Academic Press, 1998. 17—115. (in Chinese)

[14]Fleming W, Mete Soner H. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions[M]. New York: Springer-Verlag, 1992. 43—51.

[15]Bertsekas D. Dynamic Deterministic and Stochastic Models[M]. New Jersy: Prentice-Hall Inc, 1987. 184—186.

Optimal strategies on consumption and portfolio problem with stochastic jump-range

YANG Rui-cheng[1,2], *LIU Kun-hui*[2]

1. School of Mathematics and Infomation, Yantai Nomal University, Yantai 264025, China;
2. School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

Abstract: This paper examines an optimal strategy problem on consumption and portfolio. In this problem, we assume there are two assets to invest in for investors. One is risk-free asset (e. g., bond), the other is risky asset (e. g., stock). Investor can choose the investing proportion of assets to maximize his expected lifetime utility. In most situations, the price of risky assets will jump when some important information come, so it is significant to study this problem. This paper discusses this case in which the jump range is a stochastic variable, and gives the evolving process of his wealth that is modeled by Poisson process and Brownian motion. By using Bellman dynamic programming principle, we induce the equations that the optimal strategies satisfy. If the probability distribution of jump range is known, we can obtain its' explicit numerical solution to the equations for some concrete values of parameters. Moreover, we can get the value of the expected lifetime utility.

Key words: stochastic jump-range; Bellman dynamic programming principle; Poisson process; Brownian motion; optimal consumption and portfolio strategies