第9卷第3期 管理科学学报 Vol.9 No.3
2006年6月 JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA Jun. 2006

摩擦市场上最优投资组合的一种数值解法①

杨国梁，黄思明
（中国科学院科技政策与管理科学研究所，北京 100080）

摘要：在实际的证券交易市场上存在着诸如交易费用、税收等摩擦.投资者在交易的过程中，不可避免的要受到市场摩擦的影响.作者以投资者为了获取最大的投资效用为目标函数，建立了摩擦市场上最优投资组合问题的数学模型，并提出一种适用于此类模型求解的内点算法，同时也给出了算法的具体实现步骤和一个具体的算例.

关键词：投资组合；二次规划；效用；市场摩擦

中图分类号：C931；F224 **文献标识码**：A **文章编号**：1007－9807(2006)03－0062－06

0 引 言

由于在实际的投资市场中总存在着交易费用、税收等摩擦，他们对投资者的决策行为有着直接的影响.事实上，许多文献在讨论最优投资组合的选择问题时，已经考虑了这个问题以及其他的一些问题.例如 Arnott 和 Wagner[1]发现，忽略交易费用会导致无效的投资组合；Mao[2]，Jacob[3]，Brennan[4]，Patel 和 Subrahmanyam[5]等讨论了固定交易费的投资组合问题；Pogue[6]，Chen[7]，Jen 和 Zionts[8]，Yoshimoto[9]等讨论了可变交易费用的投资组合问题；秦学志等[10]研究了风险偏好对投资组合的影响.王春峰等[11]给出了一种几何的求解方法；李仲飞，汪寿阳[12]给出了基于单纯形法的线性规划方法去求解摩擦市场的最优投资组合问题.而我们知道，由于单纯形法并不是一个多项式时间的算法，因此当问题的规模比较大的时候，单纯形法并不是一个很好的选择.由于证券市场的行情瞬息万变，为了快速及时的调整投资者的投资组合，一个有效的，快速的求解投资组合问题的算法就成为模型应用的关键.

本文根据投资者在摩擦市场效用最大化的原则的基础上，提出了一个求解摩擦市场的投资组合问题的新算法－内点算法.该算法可以证明是多项式的，而且本算法的起点为可行域外的任意一点，因此初始值很容易设定.

根据以前的论述[13]，用于计算投资组合效用的一个函数如下，其自变量为期望回报率和回报率方差

$$u = R_p - 1/2A\sigma_p^2 \tag{1}$$

式(1)中用期望回报率 R_p 来表示投资组合的回报，用回报率的方差表示此投资组合的风险，A 是风险参数，并且 $A \geqslant 0$.

在实际的投资组合的选择过程中还要涉及到证券买卖时的交易费用与税收，而且交易费用与税收对最优投资组合和投资组合的有效前沿有直接的影响.摩擦市场的最优投资组合问题已经有一些学者应用单纯型法进行了研究[3].

考虑这样的资本市场，它由一个收益率固定的无风险资产和 N 个收益率为随机变量的风险资产组成.投资者追求扣除税收和交易费用后的投资组合效益的最大化.假定有基本收入税和资本收入税两种，并且风险资产的红利和交易费用在期末支付但在期初就已经确切知道.投资者在这个无风险资产和 N 个风险资产之间分配其财富.

---

① 收稿日期：2003－06－10；修改日期：2006－04－01.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70171023；19731010；79970052).
作者简介：杨国梁(1977—)，男，河北唐山人，硕士.

1 模型的建立

记

t_g—— 边际资本收入税率；

t_0—— 边际基本收入税率；

d_i—— 风险资产 i 的红利率(等于期末红利收入除以期初价格), $i = 1,\cdots,n$；

$\tilde{r}_i$—— 风险资产 i 的随机收益率(等于期末价格除以期初价格), $i = 1,\cdots,n$；

r_i—— 风险资产 i 的期望收益率 $E[\tilde{r}_i], i = 1,\cdots,n$；

r_{n+1}—— 无风险资产的收益率；

σ_{ij}—— $\tilde{r}_i$ 和 $\tilde{r}_j$ 的协方差 $\mathrm{cov}(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j), i,j = 1,\cdots,n$；

k_i—— 单位风险资产 i 的交易费用, $k_i \geqslant 0, i = 1,\cdots,n$；

x_i—— 将投资在风险资产 $i(i = 1,\cdots,n)$ 或无风险资产 $(i = n+1)$ 上的投资比例；

x_i^0—— 已投资在风险资产 $i(i = 1,\cdots,n)$ 或无风险资产 $(i = n+1)$ 上的投资比例；

于是投资组合 $x = (x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})$ 的总资本收入是

$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i x_i$$

而总的基本收入为

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i + r_{n+1}x_{n+1}$$

风险资产 i 的交易费 c_i，而交易费用 c_i 是新旧投资组合 $x = (x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})$ 和 $x^0 = (x_1^0,\cdots,x_n^0,x_{n+1}^0)$ 之差的 V 型函数

$$c_i = k_i \mid x_i - x_i^0 \mid, i = 1,\cdots,n$$

因而总的交易费为

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \mid x_i - x_i^0 \mid$$

所以,投资组合的扣除税收和交易费用后的净收益为

$$\begin{aligned}&(1-t_g)\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i x_i + (1-t_0)\times \\ &\quad\left[\sum_{i=1}^{n} d_i x_i + r_{n+1}x_{n+1}\right] - \sum_{i=1}^{n} k_i \mid x_i - x_i^0 \mid \\ &= \sum_{i=1}^{n}[(1-t_g)\tilde{r}_i + (1-t_0)d_i]x_i + \\ &\quad (1-t_0)r_{n+1}x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} k_i \mid x_i - x_i^0 \mid \\ &= \sum_{i=1}^{n}\tilde{R}_i x_i + R_{n+1}x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} k_i \mid x_i - x_i^0 \mid\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{R}_i = (1-t_g)\tilde{r}_i + (1-t_0)d_i$$

是风险资产 $i(i = 1,\cdots,n)$ 的税后收益率

$$R_{n+1} = (1-t_0)r_{n+1}$$

是无风险资产的税后收益率.投资组合的扣除税收和交易费用后的期望收益率是

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - \sum_{i=1}^{n} k_i \mid x_i - x_i^0 \mid$$

其中

$$R_i = E[\tilde{R}_i] = (1-t_g)r_i + (1-t_0)d_i$$

是风险资产 $i(i = 1,\cdots,n)$ 的期望税后收益率.投资组合的扣除税收和交易费用后的净收益的方差是

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_j)x_i x_j \\ &= (1-t_g)^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j\end{aligned}$$

仍然以投资者效用的最大化作为规划问题的目标函数.有

$$\begin{cases}\max\ U = \sum\limits_{i=1}^{n+1} R_i x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \mid x_i - x_i^0 \mid - \\ \qquad \dfrac{1}{2}A(1-t_g)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \\ \qquad x_i \geqslant 0,\ i = 1,\cdots,n,n+1\end{cases} \tag{2}$$

其中:第1个约束条件表示资金全部分配到风险资产和无风险资产上,另一个约束表示禁止卖空风险资产和借贷风险资产.

考虑问题(2)的等价问题:

$$\begin{cases}\max\left[\sum\limits_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2}\right] - \\ \qquad \dfrac{1}{2}A(1-t_g)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \mid x_i - x_i^0 \mid \leqslant x_{n+2} \\ \qquad \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \\ \qquad x_i \geqslant 0,\ i = 1,\cdots,n,n+1\end{cases} \tag{3}$$

定理 1　投资组合$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{n+1}^*)$是问题(1)的一个最优解,当且仅当存在 x_{n+2}^* 使得$(x_1^*, \cdots, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*)$是问题(1)的一个最优解[11].

现令

$$d_i^+ = \frac{|x_i - x_i^0| + (x_i - x_i^0)}{2}$$

$$d_i^- = \frac{|x_i - x_i^0| - (x_i - x_i^0)}{2}$$

则

$$d_i^+ - d_i^- = |x_i - x_i^0|$$

$$d_i^+ - d_i^- = x_i - x_i^0$$

$$d_i^+ d_i^- = 0$$

$$d_i^+ \geqslant 0,\ d_i^- \geqslant 0$$

可以证明以上问题(3)等价于如下线性规划问题

$$\begin{cases} \max \left[\sum_{i=1}^{n+1} R_i x_i - x_{n+2} \right] - \\ \quad \frac{1}{2} A (1 - t_g)^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} k_i (d_i^+ + d_i^-) \leqslant x_{n+2} \\ \quad d_i^+ - d_i^- = x_i - x_i^0, i = 1, \cdots, n \\ \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \\ \quad d_i^+ \geqslant 0,\ d_i^- \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, n \\ \quad x_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, n+2 \end{cases} \tag{4}$$

式(4)为一个二次规划问题.

2　问题的计算

前人对此问题的计算一般直接应用 Lingo, Lindo 等数学软件,也有一些学者[12]提出了一种线性规划的算法,另外还有几何的解法[11].但是这些算法对于规模很大的问题应用起来十分困难.因此提出一种适合大规模的此类问题求解的算法是非常必要的.近年来,内点算法作为一个从全新的思路来求解线性规划和非线性规划问题的算法在国际运筹学界已经比较成熟,其基本思想是从可行域内甚至可行域外的任意一点作为迭代的起点,通过对最优方向和步长的逐次搜索逼近问题的最优解.其求解的效率也得到大家的承认.在这里针对摩擦市场上的投资组合问题给出的一种一般形式的算法描述,本算法的迭代起点为可行域外的任意一点,这无疑对问题的求解造成很大的方便.

二次规划问题(QP):

$$\min \left(c^{\mathrm{T}} x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x \right)$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$x \geqslant 0$$

其对偶问题(QD):

$$\max \left(b^{\mathrm{T}} y - \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x \right)$$

$$\text{s.t. } s = c - A^{\mathrm{T}} y$$

$$x, s \geqslant 0$$

构造齐次可行性模型(HLP):

$$Ax = \tau b$$

$$A^{\mathrm{T}} y + s - Qx = \tau c$$

$$b^{\mathrm{T}} y - c^{\mathrm{T}} x = \theta$$

$$x, s, \tau, \theta \geqslant 0$$

令 $F_h^0 = R_{++}^n \times R^m \times R_{++}^n \times R_{++} \times R_{++}$,并且$(x, y, s, \tau, \theta) \in F_h^0$ 为任意一点,定义误差为

$R_p = \tau b - Ax^0$,原始齐次误差

$R_d = \tau c - A^{\mathrm{T}} y^0 - s^0 + Qx$　对偶齐次误差

$r = -(\theta^0 - b^{\mathrm{T}} y^0 + c^{\mathrm{T}} x^0)$　目标函数误差

$u = [(x^0)^{\mathrm{T}} s^0 + \tau^0 \theta^0]/(n+1)$

定义非可行的中心邻域为

$$N(\beta) = \left\{ (x, y, s, \tau, \theta) \in F_h^0 : \left\| \begin{pmatrix} Xs \\ \tau\theta \end{pmatrix} - u e_{n+1} \right\| \leqslant \beta u \right\}, \beta \in (0, 1)$$

搜索方向$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}s, \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\theta)$为如下线性系统的解

$$\begin{cases} X\mathrm{d}s + S\mathrm{d}x = \gamma u e - Xs \\ \tau \mathrm{d}\theta + \theta \mathrm{d}\tau = \gamma u - \tau\theta \\ A\mathrm{d}x - b\mathrm{d}\tau = (1 - \gamma) R_p \\ A^{\mathrm{T}} \mathrm{d}y + \mathrm{d}s - \mathrm{d}\tau c - Q\mathrm{d}x = (1 - \gamma) R_d \\ \mathrm{d}\theta - b^{\mathrm{T}} \mathrm{d}y + c^{\mathrm{T}} \mathrm{d}x = (1 - \gamma) r \end{cases}$$

在这里 $\gamma \in [0, 1]$.

任给$(x^0, y^0, s^0, \tau^0, \theta^0) \in R_{++}^n \times R^m \times R_{++}^n \times R_+ \times R_+$

非可行内点算法的具体实现过程为

步骤 1　给定$(x^0, y^0, s^0, \tau^0, \theta^0) = (e, 0, e, 1, 1)$

步骤 2　解如下线性系统

$$\begin{cases} X\mathrm{d}s + S\mathrm{d}x = \gamma ue - Xs \\ \tau\mathrm{d}\theta + \theta\mathrm{d}\tau = \gamma u - \tau\theta \\ A\mathrm{d}x - b\mathrm{d}\tau = (1-\gamma)R_p \\ A^{\mathrm{T}}\mathrm{d}y + \mathrm{d}s - \mathrm{d}\tau c - Q\mathrm{d}x = (1-\gamma)R_d \\ \mathrm{d}\theta - b^{\mathrm{T}}\mathrm{d}y + c^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x = (1-\gamma)r \end{cases}$$

计算结果为 $\Delta x = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}s, \mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\theta)$

步骤 3　令 $x^1 = x^0 + \Delta x, u^1 = u^0 + \Delta u$, $R_p^1 = R_p^0 + \Delta R_d, R_d^1 = R_d^0 + \Delta R_d, r^1 = r^0 + \Delta r$ 进行迭代.

步骤 4　如果 $E_k > \varepsilon(E_k = \max\{\|R_p^k\|/\tau^k, \|R_d^k\|/\tau^k, (n+1)u_k/\tau_k^2\})$ 则令 $k = k+1$ 回到步骤 2. 否则算法中止. ε 为很小的一个正常数.

3　算例

给出一个数值的例子来验证算法的有效性：令

$$n = 3, t_g = 0, A = 0.6$$
$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.005$$
$$R_1 = 0.25, R_2 = 0.20, R_3 = 0.18, R_4 = 0.10$$
$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$$
$$\sigma_{11} = 0.25, \sigma_{22} = 0.21, \sigma_{33} = 0.14$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.10, \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0.17,$$
$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 0.05$$

由式(3) 得到

$$\begin{cases} \max\ (0.25x_1 + 0.20x_2 + 0.18x_3 + \\ \qquad 0.10x_4 - x_5) - 0.3(0.25x_1^2 + \\ \qquad 0.21x_2^2 + 0.14x_3^2 + 2\times 0.10x_1x_2 + \\ \qquad 2\times 0.17x_1x_3 + 2\times 0.05x_2x_3) \\ \text{s.t. } 0.005(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+ + \\ \qquad d_1^- + d_2^- + d_3^-) \leqslant x_5 \\ \qquad d_1^+ - d_1^- = x_1 \\ \qquad d_2^+ - d_2^- = x_2 \\ \qquad d_3^+ - d_3^- = x_3 \\ \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_1^-, d_2^-, d_3^-, \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

添加相应的人工变量可得

$$\begin{cases} \max\ (0.25x_1 + 0.20x_2 + 0.18x_3 + \\ \qquad 0.10x_4 - x_5) - 0.3(0.25x_1^2 + \\ \qquad 0.21x_2^2 + 0.14x_3^2 + 2\times 0.10x_1x_2 + \\ \qquad 2\times 0.17x_1x_3 + 2\times 0.05x_2x_3) \\ \text{s.t. } 0.005(d_1^+ + d_2^+ + d_3^+ + d_1^- + \\ \qquad d_2^- + d_3^-) - x_5 + s_1 = 0 \\ \qquad d_1^+ - d_1^- = x_1 \\ \qquad d_2^+ - d_2^- = x_2 \\ \qquad d_3^+ - d_3^- = x_3 \\ \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_1^-, d_2^-, d_3^-, \\ \qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, s_1 \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

由式(6) 可知：

系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0.005 & 0.005 & 0.005 & 0.005 & 0.005 & 0.005 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{c} = -[0.25 \quad 0.20 \quad 0.18 \quad 0.10 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Q} = 0.6 \times \begin{bmatrix} 0.25 & 0.10 & 0.17 & \\ 0.10 & 0.21 & 0.05 & 0 \\ 0.17 & 0.05 & 0.14 & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

计算结果为

$$\textbf{Result} = [0.744, 0.256, 0.000, 0.000, 0.005, 0.744, 0.256, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000, 0.000]^{T}$$

即

$$x_1 = 0.744, x_2 = 0.256, x_3 = 0.000, x_4 = 0.000, x_5 = 0.005$$

$$d_1^+ = 0.744, d_2^+ = 0.256, d_3^+ = 0.000, d_1^- = 0.000, d_2^- = 0.000, d_3^- = 0.000$$

$$s_1 = 0.000$$

也就是说投资者的最优投资组合为 $x^* = [0.744, 0.256, 0.000, 0.000]^{T}$.

4 结 论

由以上的讨论与计算结果可知,在投资者的效用函数可以表示为收益的期望和方差的线性函数情况下，根据投资者的效用的最大化作为目标函数,可以得到一个二次规划问题.而二次规划的求解尤其是规模比较大的时候比较困难.本文应用国际上比较先进的内点算法给出了问题的求解步骤和最优解.而且由算法的求解过程和具体算例可以看出,此算法比较适合规模较大的问题.

参 考 文 献:

[1]Arnott R D, Wagner W H. Asset pricing and the bid-ask spread[J]. Journal of Financial Economics, 1986, 17: 223—249.

[2]Mao J C T. Models of captital budgeting, E-V vs E-S[J]. Journal of Financial and Quantitive Analysis, 1970, 5: 657—675.

[3]Jacob N L. A limited-diversification portfolio selection model for the small investor[J]. The Journal of Finance, 1974, 29(3): 847—856.

[4]Brennen M. Taxes, market valuation and corporate financial policed[J]. National Tax Journal, 1970, 23(4): 417—427.

[5]Levy H. Equilibrium in an imperfect market: A constraint on the number of securities in the portfolio[J]. Amer. Econom. Rev., 1978, 68(4): 643—658.

[6]Patel N R, Subrahmanyam M G. A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs[J]. Management Science, 1982, 28(3): 303—314.

[7]Pogue G A. An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transaction costs, short sales, leverage policies and taxes[J]. The Journal of Finance, 1970, 25(5): 1005—1028.

[8]Chen A H Y, Jen F C, Zionts S. The optimal portfolio revision policy[J]. Journal of Business, 1971, 44(1): 51—61.

[9]Yoshimoto A. The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs[J]. J. Oper. Res. Soc. Japan, 1996, 39(1): 99—117.

[10]秦学志, 吴冲峰. 模糊随机风险偏好下的证券投资组合选择方法[J]. 管理科学学报, 2003, 6(4): 73—76.

Qin Xuezhi, Wu Chongfeng. Portfolio selection method under investor's fuzzy stochastic risk preference[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(4): 73—76. (in Chinese)

[11]王春峰, 屠新曙, 厉 斌. 效用函数意义下投资组合有效选择问题的研究[J]. 中国管理科学, 2002, 10(2): 15—19.

Wang Chunfeng, Tu Xinshu, Li bin. The study on the problem of optimal portfolio about utility[J]. Chinese Journal of Management Science, 2002, 10(2): 15—19. (in Chinese)

[12]李仲飞, 汪寿阳. 投资组合优化与无套利分析[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

Li Zhongfei, Wang Shouyang. Portfolio Optimization and No-arbitrage Analysis[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese)

[13]杨国梁, 黄思明. 应用内点算法求解效用函数意义下证券组合有效选择问题[J]. 中国管理科学, 2002, special issue: 300—305.

Yang Guoliang, Huang Siming. Solving the optimal portfolio selection about utility using interior point algorithm[J]. Chinese Journal of Management Science, 2002, special issue: 300—305. (in Chinese)

[14]Ye Yinyu. Interior point algorithms: Theory and analysis[A]. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization[M]. New York: John Wiley and Sons, 1997.

Numerical method for optimal portfolio selection in stock market with frictions

YANG Guo-liang, *HUANG Si-ming*

Institute of Policy and Management, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

Abstract: There are frictions in real stock market such as transaction costs and taxes, etc. The optimal portfolio selection should be affected by market frictions definitely. In this paper, we took the maximum utility of the investor as the objective function and we presented an infeasible interior point algorithm for quadratic programming to solve the proposed model. The optimal solution and the steps of applied algorithm were presented also.

Key words: portfolio selection; quadratic programming; utility; friction

(上接第 44 页)

[12] Matutes C, Regibeau P, Rockett K. Optimal patent design and the diffusion of innovations[J]. RAND Journal of Economics, 1996, 27: 68—83.

[13] David C, Haley. Estimation of the Dosage Mortality Relationship When the Dose is Subject to Error[R]. New York: Technical Report of Stanford University, August 29, 1952.

Real option valuation of R&D project with patent

XUE Ming-gao, *GONG Pu*

Department of Finance, College of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

Abstract: The investment model of R&D project with patent is developed in the paper. The R&D investment process divides into two stages by the characteristics of R&D investment process. The research stage is considered as an European option. The development stage is considered as an American perpetual option. Therefore the investment opportunity in R&D can be thought of as a compound option. The analytic valuation formula for the R&D option and optimal investment policy are derived. It is discussed that the effect of the patent breadth on the R&D option value and R&D investment policy, and presents the condition to apply for a patent.

Key words: patent breadth; R&D option; R&D investment; optimal investment threshold