

短期利率模型在上交所债券市场上的实证分析^①

范龙振

(复旦大学管理学院, 上海 200433)

摘要:以中国上海证券交易所从债券价格导出的 0.5 年期利率的周度数据为分析对象, 使用 SNP 法, 估计出短期利率的条件密度函数, 发现其条件分布具有明显的异方差性和非正态性. 然后利用 EMM 法实证分析了常用的连续时间的单因子和两因子短期利率模型. 单因子短期利率模型包括 Vasicek 模型, CIR 模型, CKLS 模型等, 两因子利率模型包括 Gallant, Tauchen 给出的随机波动率模型和 Balduzzi 等人的随机均值回复模型. 实证结果表明所有的单因子短期利率模型都不能很好地描述中国上海证券交易所债券市场上的短期利率变化, CKLS 模型是它们中表现最好的单因子利率模型. 随机均值回复模型也不能描述短期利率的变化, 只有随机波动率模型可以描述上海证券交易所的短期利率的变化.

关键词:利率模型; SNP 法; EMM 法; 上海证券交易所

中图分类号: F830.91

文献标识码: A

文章编号: 1007-9807(2007)02-0080-10

0 引言

短期利率是金融中最重要最基础的经济变量之一, 它决定了利率期限结构和利率资产的价格. 不管是在学术界还是在商业界, 短期利率模型都被用来定价固定收益资产的价格和风险. 到目前为止已经出现了许多利率模型来描述短期利率的变化, 这些模型一般是以连续时间连续状态形式给出的. 早期的利率模型大多是单因子模型, Merton^[1], Brennan, Schwartz^[2-4], Vasicek^[5], Dothan^[6], Cox, Ingersol, Ross^[7,8], Sundaresan^[9], Feildman^[10], Longstaff^[11], Hull, White^[12], Black, Karasinski^[13], Longstaff, Schwartz^[14], Chan, Kalolyi, Longstaff, Sanders^[15]分别在理论探讨中或应用分析中给出了不同形式的单因子利率模型. 最近人们实证发现单因子短期利率模型不能很好地描述利率的变化, 特别是美国债券市场的利率变化, 从而提出了多因子短期利率模型. 从单因子模型到多因子模型的扩展思路主要是让短期利率的均值

回复参数随机变化或让短期利率的波动率随机变化. Gallant, Tauchen^[16]讨论了一类随机波动率形式的两因子利率模型, 认为它们中的一些模型可以较好地描述美国联邦政府债券 3 个月期利率的变化. Balduzzi 等^[17], Bomfim^[18]在 Vasicek 模型的基础上, 假定短期利率的均值回复参数随机变化. 这种假定具有很好的经济学解释, 短期利率在每个时间有一个均衡点, 这个均衡点就是均值回复参数, 实际中表现出的利率围绕它波动, 但均衡点也随着时间发生不确定性的变化.

尽管有这么丰富的利率模型, 这些利率模型能否描述中国金融市场上利率的表现还是一个未知数. 现有的短期利率模型是否可以描述中国金融市场中短期利率的变化? 哪些模型在实证中表现得较好? 这都是人们关心的问题, 到目前为止, 在中国股票市场学术研究方面取得了丰富的研究成果^[19-21], 但还很少见到对中国债券市场利率的研究. 在中国金融市场上, 上海证券交易所从 1991 年就开始了国债交易, 稍后又开展了国债

① 收稿日期: 2003-11-03; 修订日期: 2004-04-08.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471010); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助.

作者简介: 范龙振(1965—), 男, 河南虞城人, 博士, 副教授. Email: lzf@fudan.edu.cn

回购交易. 国债交易价格和回购价格隐含的利率是一个市场化的利率, 利率及其变化反映了当前短期利率、短期利率变化的预期以及长期债券的利率风险. 虽然它们对整个经济中的利率变化影响还有限, 但至少在债券市场, 这些市场利率可以用来定价债券的价格和风险. 随着中国利率市场化的改革, 交易所债券交易隐含的利率在整个经济中的影响将越来越大.

本文研究各种短期利率模型是否可以描述中国上交所债券市场短期利率的变化. 由于利率模型采用连续时间形式表述, 大部分利率模型下利率的条件密度无法用显式的形式表达出来, 因此也无法采用传统的估计方法, 如极大似然估计法等对模型的参数, 模型的拟合效果进行估计. 针对利率模型实证的困难, 本文采用 SNP 法和 EMM 法. SNP 法是 Gallant, Tauchen^[22] 提出的一种半参数估计方法. 它假定任何随机变量的分布密度函数都可以近似地看成正态分布的密度函数乘以一个多项式, 通过对参数和多项式次数的选择, 可以任意精度地逼近随机变量的密度函数. 因此在估计短期利率的条件密度时, 利用 SNP 法不需要知道短期利率的条件密度函数形式. 估计出利率变化的条件密度后, 再用 EMM 法估计每个利率模型的参数, 检验哪个利率模型能够反映利率的变化. EMM 字面意思为有效矩估计法, 由 Gallant, Tauchen^[23,24] 提出, 是在广义矩估计法(GMM)的基础上发展起来的. 由于 SNP 法估计出的条件密度满足其对数关于参数的一阶偏导数的样本均值为 0, 因此 EMM 法结合 SNP 法, 把这个条件作为广义矩估计的矩条件, 对利率模型的参数进行估计.

1 利率模型

首先讨论单因子利率模型. 目前已出现了很多单因子利率模型, 但它们大部分都可以看成如下形式随机微分方程的特殊情况

表 1 不同的单因子利率模型及对一般表达式(1)中参数的约束

Table 1 One-factor interest rate models, and as special cases of model(1), some parameters in model(1) are restricted to constants

序号	模型	表达式	a_0	a_1	b_0	b_1	γ
1	Merton	$dr = a_0 dt + b_0 dz$		0		0	
2	Vasicek	$dr = (a_0 + a_1 r) dt + b_0 dz$				0	

$$dr = (a_0 + a_1 r) dt + (b_0 + b_1 r^\gamma) dz \quad (1)$$

不同的模型体现在对参数 $a_0, a_1, b_0, b_1, \gamma$ 有不同的约束, 常见的单因子利率模型如表 1. 表 1 中的模型 1 是 Merton 为了描述不付息债券的价格时给出的, 模型假定利率变化的瞬时条件均值和瞬时条件标准差都是常数^[1]. 模型 2 是 Vasicek 为求解不付息债券的均衡价格时给出的^[5]. 这是一个高斯模型, 广泛地用于固定收益资产的定价, 包括利率期权, 利率期货等, 如 Jamshidian^[25], Gibson, Schwartz^[26]. 模型 3 是 Cox, Ingersoll, Ross^[7,8] 给出的一个均衡定价利率模型, 也被广泛地用于利率产品的定价. 如 CIR 的债券期权定价模型^[8], Ramaswamy, Sundaresan^[27] 的期货和期货期权定价模型, Sundaresan^[28] 的互换定价模型. CIR 模型的特点是利率变化的瞬时条件波动率与利率的当前水平有关. 模型 4 由 Dothan^[6] 给出, 用来评价贴现债券 (discount bond) 的价值, 后来被 Brennan, Schwartz^[2,3] 用来评价可转换债券的价值. 模型 5 就是几何布朗运动, Marsh, Rosenfeld^[29] 把它作为一个利率模型, Dothan 模型其实就是它的特殊情况. 模型 6 是 Brennan, Schwartz^[4] 在定价可转换债券价格时采用的一个利率模型. 模型 7 由 CIR^[30] 给出, 并用来定价可变利率债券的价值. Constantinides, Ingersoll^[31] 使用类似的模型用来对税收存在下的债券价值进行评估. 模型 8 是常弹性方差过程, 由 Cox^[32] 和 Cox, Ross^[33] 给出. 模型 9 是单因子利率模型中的比较一般形式, 由 Chan, Kalolayi, Longstaff, Sanders^[15] 给出, CKLS 在实证中发现, 美国国债交易价格隐含的短期利率的 γ 在 1.5 左右. 模型 11 即 CIR0 模型是在 CIR 模型的基础上, 在波动率部分增加了一个常数. Ait-Sahalia^[34] 的实证表明, 在波动率部分增加一个常数可以显著改善模型对实际数据的拟合. CKLS0 模型是 CKLS 模型的扩展, 它与 CKLS 模型的区别是在波动率部分增加一个常数, 也是单因子模型(1)的最一般形式.

续表 1

序号	模型	表达式	a_0	a_1	b_0	b_1	γ
3	CIR	$dr = (a_0 + a_1 r)dt + b_1 r^{1/2}dz$			0		1/2
4	Dothan	$dr = b_1 r dz$	0	0	0		1
5	GBM	$dr = a_1 r dt + b_1 r dz$	0		0		1
6	Brennan-Schwartz	$dr = (a_0 + a_1 r)dt + b_1 r dz$			0		1
7	CIR VR	$dr = b_1 r^{3/2} dz$	0	0	0		3/2
8	CEV	$dr = a_1 r dt + b_1 r^\gamma dz$	0		0		
9	CKLS	$dr = (a_0 + a_1 r)dt + b_1 r^\gamma dz$			0		
10	CIRO	$dr = (a_0 + a_1 r)dt + (b_0 + b_1 r^{1/2})dz$					1/2
11	CKLSO	$dr = (a_0 + a_1 r)dt + (b_0 + b_1 r^\gamma)dt$					

在西方金融市场有关实证中,这些利率模型并不能很好地描述现实中短期利率的变化,为了反映利率的变化,在这些单因子利率模型的基础上,对利率模型作了一定的扩展,一种扩展是让瞬时波动率随时间随机变化,Gallant, Tauchen^[16]讨论了一类随机波动率利率模型.本文采用他们的一个随机波动率利率模型,即

$$\begin{pmatrix} dr_t \\ dv_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r + a_{rr}r_t \\ a_v + a_{vv}v_t + a_{vr}v_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} (b_{1r} + b_{1r}r_t)e^v & 0 \\ 0 & b_{2v} + b_{2v}r_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中, r_t 代表短期利率,它的瞬时期望变化项与Vasicek模型一样,它的瞬时波动率部分是当前短期利率的线性函数和另一个变量 e^v 的乘积, v 的变化服从第二个随机微分方程.模型说明,波动率不仅与利率水平有关,还与其他不确定因素有关.后面的实证表明,它基本上可以描述上交所债券市场短期利率的变化.模型中参数 a_v, a_{vv} 之间满足 $a_v = -a_{vv}$,这时模型才是唯一确定的.

单因子利率模型扩展的另外一种思路是让利率的期望值部分随机变化.Balduzzi等^[17], Bomfim^[18]在Vasicek模型的基础上,假定短期利率的均值回复参数随机变化,本文采用Bomfim的表述形式.模型为

$$\begin{pmatrix} dr_t = a_r(\theta_t - r_t)dt + b_{1r}dw_{1t} \\ d\theta_t = (a_\theta - a_{\theta\theta}\theta_t)dt + b_{2\theta}dw_{2t} \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中, r_t 刻画了短期利率的变化,从形式上看,它是一个Vasicek模型,但它的均值回复参数 θ_t 随机变化.短期利率在某个时间 t 的取值围绕 θ_t 变动,可以解释 θ_t 为时间 t 的均衡利率,但均衡利率也随时间随机变化,用一个均值回复过程来描述它,它围绕某个值波动,这个值可以认为是短期利率的长期平均值.

2 SNP-EMM 估计方法

与传统的极大似然估计法和贝叶斯估计法不同,SNP-EMM法对随机变量的条件分布密度函数不作假定.这对利率模型的实证研究是非常理想的,因为很多连续时间的利率模型的条件密度无法通过显式的形式表达出来.一般来讲,不管一个随机变量的密度函数是何种形式,都可以以一个正态分布的密度函数乘以一个多项式来逼近.

在时间序列的统计推断中,统计推断的依据是时间序列的条件密度函数.假定时间序列 $\{y_t: t = -L, -L+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, n\}$ 是一个平稳序列,具有马尔科夫性, y_t 是 M 维矢量,其密度函数与它的滞后 L 阶项有关.滞后项记为 $x_{t-1} = (y'_{t-L}, \dots, y'_{t-2}, y'_{t-1})'$,它的维数为 $M \cdot L$. y_t 的条件密度可以写成形式

$$h(y) \approx c [P(z, x)]^2 \phi(y | \mu_x, \Sigma_x) \quad (4)$$

其中, $z = R_x^{-1}(y - \mu_x)$, R_x 是一个上三角矩阵,满足 $\Sigma_x = R_x R_x'$. $P(z, x)$ 作为 z 的函数,是次数为 K_z 的多项式,作为 x 的函数,是次数为 K_x 的多项式, $\phi(\cdot)$ 是均值为 μ_x ,协方差矩阵为 Σ_x 的 M 维正态分布的密度函数,常数 c 为 $1/\int [P(s)]^2 \phi(s) ds$,它的取值保证了等号右边的表达式的积分为1,满足密度函数的条件.为保证表达式的唯一性,规定多项式部分 $P(z, x)$ 的常数项为1.如果一个随机变量服从正态分布,则密度函数形式式(4)的多项式部分为1,多项式部分反映了密度函数的非正态性,因此也反映了随机变量的偏度、峰度等.

类似于传统的时间序列分析, μ_x 称为条件密度函数形式式(4)的矢量自回归部分,其表达式为

$$\mu_x = b_0 + Bx_{t-1} = b_0 + \sum_{i=1}^{L_r} b_i y_{t-1-L_r+i} \quad (5)$$

Σ_x 称为 ARCH 或 GARCH 部分, 若称为 ARCH 部分, 决定 Σ_x 的 R_x 具有表达式

$$\text{vech}(R_{x_{t-1}}) = \rho_0 + \sum_{i=1}^{L_r} P_{(i)} \left| y_{t-1-L_r+i} - \mu_{x_{t-2-L_r+i}} \right| \quad (6)$$

其中, $|y_{t-1-L_r+i} - \mu_{x_{t-2-L_r+i}}|$ 是一个 M 维矢量, 其元素是 $y_{t-1-L_r+i} - \mu_{x_{t-2-L_r+i}}$ 每一个元素的绝对值. $\text{vech}(R)$ 为 R 的上三角元素组成的维数为 $M(M+1)/2$ 的矢量, ρ_0 为 $M(M+1)/2$ 维的矢量; $P_{(1)}, \dots, P_{(L_r)}$ 分别为 $M(M+1)/2 \times M$ 的矩阵. 这种对条件方差的假定与传统的 ARCH 模型类似, 但与 ARCH 模型不同的是, 这里使用的是滞后项的绝对值, 而非平方.

同样, 还可以把 R_x 表达为 GARCH 模型的形式, 定义 R 为

$$\text{vech}(R_{x_{t-1}}) = \rho_0 + \sum_{i=1}^{L_r} P_{(i)} \left| y_{t-1-L_r+i} - \mu_{x_{t-2-L_r+i}} \right| + \sum_{i=1}^{L_g} \text{diag}(G_{(i)}) \text{vech}(R_{x_{t-2-L_g+i}}) \quad (7)$$

其中, $G_{(1)}, \dots, G_{(L_g)}$ 为 $M(M+1)/2$ 维矢量.

在密度函数的表达式式(4)中, 所有要估计的参数 θ 为多项式 $P(z, x)$ 的系数 A , μ_x 中的参数 $\Psi = [b_0 | B]$, Σ_x 中的参数 $T = [\rho_0 | P_{(1)}, \dots, P_{(L_r)} | G_{(1)}, \dots, G_{(L_g)}]$. 如果式(4)中密度函数的多项式部分次数 0, 而 $L_r > 0, L_g = 0$, 说明条件分布服从正态 ARCH 模型, 如果 $L_r > 0, L_g > 0$, 条件分布服从正态 GARCH 模型. 如果多项式中 x 的次数为 0, 但 z 的次数不为 0, 则它是非正态分布的 GARCH 模型. 如果多项式关于 x 的次数不为 0, 那么条件分布密度的形态随时间发生变化, 是最一般的时间序列模型. 模型中参数的估计可以通过最大化条件极大似然函数得到, 或等价地极小化函数

$$s_n(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left[f \left(\frac{y_i}{x_{i-1}}, \theta \right) \right] \quad (8)$$

得到.

如果多项式 $P(z, x)$ 的次数和随机变量的维数较大, 多项式的系数项将会很多, 为了保证估计结果的稳定性, 引入两个参数 I_z, I_x . $I_z = 1$ 时, 令 z 的最高阶的交叉项的系数为 0. $I_z = 2$ 时, 则令最高阶和次最高阶的交叉项的系数为 0, 如此等等. I_x 的取值相应地反映

了多项式作为 x 的多项式, 对 x 的交叉项的过滤行为.

模型选择标准一般有 Schwartz 准则、Hannan-Quinn 准则和 Akaike 信息准则. 这里采用 Schwartz 准则选取最合适的 SNP 密度函数, Schwartz 准则的计算表达式为

$$BIC = s_n(\hat{\theta}) + (1/2)(l_\theta/n) \log(n) \quad (9)$$

其中, l_θ 是模型中参数的个数, 具有最小 BIC 值的模型被认为是最合适的描述样本数据的模型. 在模型的选择中, 一般遵从从简单到复杂的原则, 直至找到最合适的模型为止.

EMM 法的主要理论依据是广义矩估计法 (GMM). 常见的估计方法, 如极大似然估计法, 矩估计法, 卡尔曼滤波法, 都可以看成一种广义矩估计法. 把极大似然估计法看成广义矩估计法, 相当于把极大似然函数的对数的一阶导数看成是矩条件. 在 SNP-EMM 方法下, 采用 SNP 法估计出的密度函数作为样本的条件密度函数, 从而给出样本的似然函数, 其对数关于参数的一阶导数作为样本矩条件, 即矩条件为

$$m_n(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(y_i | x_{i-1}, \hat{\theta}) \quad (10)$$

利用 EMM 法估计各个利率模型的参数, 并判断模型能否反映观测值的主要步骤如下: 对某个利率模型, 给定一组利率模型的参数 ρ , 根据利率模型模拟出样本个数为 N (N 一般为 5 万以上) 的一组样本值 $\{\hat{y}_t : t = 1, 2, \dots, N\}$, 计算模拟样本下的矩条件值

$$\hat{m}_N(\rho, \hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\hat{y}_t | \hat{x}_{t-1}, \hat{\theta}) \quad (11)$$

如果利率模型正确描述了实际观测值, 那么在利率模型下的条件密度函数应该与 SNP 下估计出的条件密度函数足够接近, 式(11)应该接近于 0, 也就是利率模型下最优的参数 $\hat{\rho}$ 应该满足

$$\hat{\rho} = \min \{ \hat{m}_N(\rho, \hat{\theta})' \hat{I}_n^{-1} \hat{m}_N(\rho, \hat{\theta}) \} \quad (12)$$

其中, \hat{I}_n 是 $\hat{m}_N(\rho, \hat{\theta})$ 的样本协方差阵, 由 SNP 分析时得到, 即为

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(y_i | x_{i-1}, \theta) \right] \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(y_i | x_{i-1}, \theta) \right]^T \quad (13)$$

估计出利率模型的参数以后, 如果利率模型能够反映实际观测值, 则有

$$N \hat{m}_N(\hat{\rho}, \hat{\theta})' \hat{I}_n^{-1} \hat{m}_N(\hat{\rho}, \hat{\theta}) \sim \chi^2(l_\theta - l_\rho) \quad (14)$$

其中, l_θ, l_ρ 分别是参数 θ 的个数和参数 ρ 的个数. 因此式(14)可以用来判断某个利率模型是否是

合适的反映样本数据的利率模型。

3 实证结果及分析

3.1 短期利率的密度函数

在我国,国债交易主要有两个市场:一个是交易所市场,主要在上海证券交易所进行国债交易;另一个是银行间交易市场.上海证券交易所市场从1991年就开始了国债交易,但1994年左右,由于当时的高通货膨胀率,发行了一些通货膨胀保值债券,其交易价格不能反映市场名义利率.如果把这些债券剔除,1994年左右市场上国债数量极少,无法从交易价格中求解市场利率期限结构.1996年以后,由于通货膨胀已降至较低水平,保值贴补条件不再影响市场价格,因此本文选取数据区间从1996年3月22日开始到2003年1月29日,数据为周度数据.交易所不仅有国债现货交易,还有国债回购交易,并且回购交易量很大,回购交易价格隐含的利率似乎是市场合适的短期利率,但回购交易利率波动幅度过大,很难认为

它们反映了市场短期利率的变动.本文以国债现货交易价格求得的利率期限结构作为分析对象.从1996年至2003年,上海证券交易所交易的国债基本情况如表2.债券的交易价格及债券信息来源于上海证券交易所网站以及国泰君安固定收益证券部.利用交易价格数据,使用 Nelson, Siegel^[35] 方法估计出上交所利率期限结构的时间序列,采用 Matlab 编程实现估计方法.利率期限结构的变化如图1.图1给出了0.5年期,1年期,3年期,5年期利率的变化.从图1可以看出,利率从1996年的10%左右,经过3年时间,下降到4%以下.在1996年左右,短期利率较高,长期利率稍低,利率期限结构下斜,说明市场预期到短期利率将要下降.2000年后,短期利率较小,长期利率较大,表现出一个上升的利率期限结构.在西方,人们习惯于以3个月期短期国债的收益率作为短期利率,本文为了保证估计的精确性,以债券价格隐含的0.5年期利率作为短期利率.从理论上讲,短期利率应该是瞬间到期利率,但由于短期债券较少,估计很短的利率会导致很大误差.

表2 1996年至2003年上海证券交易所国债交易的基本情况

Table 2 Basic statistics of the Government bonds trading from 1996 to 2003

年份	交易的国债数(年初)/只	新发行的国债数/只	到期国债数/只	债券的剩余期限/年
1996	6	8	5	0.75 ~ 2.17
1997	9	3	3	0.25 ~ 9.5
1998	9	0	2	1/6 ~ 9.75
1999	7	2	3	1/6 ~ 8.75
2000	6	2	1	0.25 ~ 9.83
2001	7	5	0	2.83 ~ 9.5
2002	12	5	0	1.83 ~ 19.6
2003	17	2	0	10/12 ~ 18.6

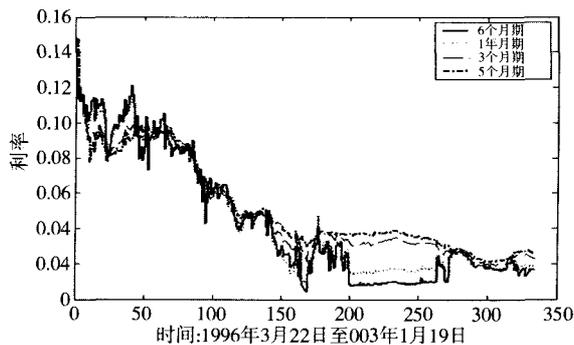


图1 利率期限结构的变化

Fig.1 Time-series changes of the yield curve of interest rates

本文研究短期利率的变化,以6个月期连续复利利率代表短期利率 r ,利用 SNP 法寻找短期利率的条件密度函数.为表述方便,下面讨论 $100 \times r$ 的条件密度函数,利率模型的参数也是 $100 \times r$ 服从的利率模型的参数.遵循从简单到复杂的思想,首先找到最能描述利率变化的正态同方差条件密度函数,在这个密度函数的基础上,增加密度函数的条件异方差部分的 ARCH 部分,然后再增加 GARCH 部分,最后再增加反映非正态性的多项式部分,以 BIC 值作为模型的选取标准,直至找到最合适的利率的条件密度函数.采用 Gallant, Tauchen 利用 Fortran 语言编写的 SNP 算法软件(见网址: <ftp://econ.duke.edu/pub/arg/snp>).

SNP 条件密度函数的选择情况如表 3. 具有最小 BIC 值的密度函数形式为

$$(L_{\mu}, L_r, L_g, L_p, K_z, I_z, K_x, I_x) = (3, 1, 1, 1, 4, 0, 0, 0)$$

它的各个参数的估计值如表 4. 从 SNP 条件密度的估计结果来看, 短期利率具有明显的条件异方差性和非正态性, 为了更形象地表达短期利率的条件密度函数, 以利率在样本期的平均值作为条件密度函数中的滞后项, 画出条件密度函数的图

像(图 2), 实线表示的是短期利率的条件密度函数, 虚线表示的是具有相同均值和方差的条件正态分布的密度函数. 可以看出利率的条件分布与正态分布具有非常大的差异, 表现出非常明显的尖峰. 同时利用估计出的 SNP 密度函数计算出样本期内短期利率的条件标准差(图 3). 从图 3 可以看出, 短期利率表现出了明显的异方差性.

表 3 6 个月期短期利率 SNP 条件密度的选取过程

Table 3 Choice process of the SNP conditional density of the six-month short rate

L_{μ}	L_r	L_g	L_p	K_z	I_z	K_x	I_x	l_{θ}	$s_n(\hat{\theta})$	BIC
1	0	0	1	0	0	0	0	3	-0.440 84	-0.413 66
2	0	0	1	0	0	0	0	4	-0.461 47	-0.425 23
3	0	0	1	0	0	0	0	5	-0.495 83	-0.450 53
4	0	0	1	0	0	0	0	6	-0.498 18	-0.443 83
3	1	0	1	0	0	0	0	6	-0.669 94	-0.615 58
3	3	0	1	0	0	0	0	8	-0.707 63	-0.644 21
3	4	0	1	0	0	0	0	9	-0.768 41	-0.686 87
3	5	0	1	0	0	0	0	10	-0.769 52	-0.674 82
3	1	1	1	0	0	0	0	7	-0.757 87	-0.694 45
3	1	1	1	4	0	0	0	11	-0.876 16	-0.776 50*
3	1	1	1	4	0	1	0	15	-0.886 16	-0.743 51

注: 箭头所指的密度函数, 是同类中最优的密度函数, 打 * 号的 BIC 值是最小 BIC 值.

表 4 6 个月期短期利率的 SNP 条件密度函数的各个参数的估计值

Table 4 The estimated values of parameters of the SNP conditional density

项目	参数	估计值	标准差
多项式项部分	a_0	1	(0.000 00)
	a_1	-0.152 31	(0.048 70)
	a_2	-0.326 92	(0.041 54)
	a_3	0.018 47	(0.012 71)
	a_4	0.041 42	(0.007 05)
条件均值项部分	b_0	0.017 69	(0.003 67)
	b_1	0.244 12	(0.045 79)
	b_2	-0.074 27	(0.057 52)
	b_3	0.838 08	(0.049 49)
条件方差项的 ARCH 部分	ρ_0	0.011 68	(0.002 31)
	ρ_1	1.000 71	(0.129 40)
条件方差项的 GARCH 部分	G_1	0.452 80	(0.051 75)

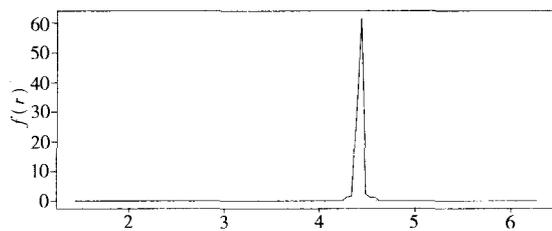


图 2 短期利率的 SNP 条件密度函数(以样本期的样本均值作为条件密度所依赖的滞后项, 实线代表短期利率的条件密度函数, 虚线代表具有同样均值和方差的正态分布的密度函数)

Fig.2 Graph of the conditional density of short rate (conditional density is computed with sample mean as the lagged term, solid line indicates the conditional density of the short rate, dotted line indicates Normal density with the same mean and variance.)

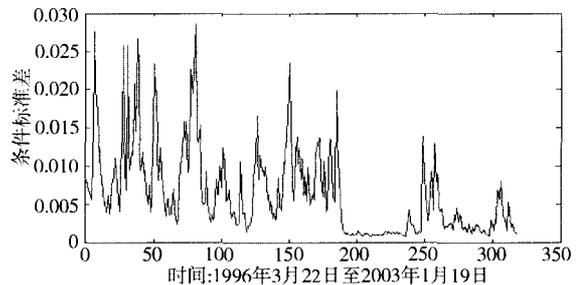


图 3 在短期利率的 SNP 密度函数下, 短期利率的条件标准差

Fig.3 Conditional standard deviation of the short rate computed with the SNP density

3.2 单因子利率模型的实证分析结果

以估计出的 SNP 密度函数作为短期利率的条件分布密度函数, 利用 EMM 法对各个利率模型的参数进行估计, 同时对利率模型的适用性进行检验. 采用 Gallant, Tauchen 利用 Fortran 语言编写的 EMM 算法软件(见网址: ftp. econ. duke. edu/pub/arg/emm). 在单因子实证分析中, 本文只分析 Vasicek 模型, CIR 模型, GBM 模型, Brennan-Schwartz 模型, CKLS 模型, CIR0 模型以及 CKLS0 模型, 表 1 中的其他单因子模型都是它们的特殊情况, 并且现在较少使用. 表 5 给出了单因子短期利率模型的实证分析结果. 从单因子利率模型的

拟合程度来看,拟合程度最好的两个模型分别是 CKLS 模型和 CKLSO 模型,它们的 χ^2 统计量值分别为 17.16 和 13.42,而置信度为 90%,自由度为 6 的 χ^2 分布的临界值为 10.6,因此模型检验结果认为所有这些单因子模型都不能完全反映短期利率的变化.但从对利率变化的反映程度上来看,可以将它们划分成三个层次:程度最差的是 GBM 模型和 Brennan-Schwartz 模型,它们的部分参数估计值的标准差较大,拟合程度非常差;拟合程度较好的一类有 Vasicek 模型, CIR 模型, CIR0 模型,它们的反映拟合程度的 χ^2 统计量值差不多,参数估计的 t 统计值显著. Vasicek 模型不能反映短期利率条件方差的变化,而由图 3 看出,短期利率具有明显的异方差性,因此它不能完全描述利率的变化是很正常的,而 CIR 模型是在 Vasicek 模型的基础上,增加了对利率变化的异方差描述,但它并没有改进对利率模型描述.说明 CIR 模型的瞬时条件标准差项不适合对中国债券市场上短期利率条件方差的描述.表现最好的单因子模型是 CKLS 模型和 CKLSO 模型,它们与 CIR 模型的最大区别是瞬时波动率部分的参数 γ 可以自由取值,而正是它的自由取值导致了模型拟合效果的显著改进.与 CKLS 研究结果类似,中国债券市场的 γ 值是 1.3 左右,而在美国债券市场上, γ 在 1.5 左右.表 6 更清晰地反映了各个模型对利率变化的拟合效果.如果利率模型能够拟合短期利率,那么模型下的条件密度与 SNP 条件密度函数差异很小,把利率模型的条件密度函数转化为 SNP 密度函数

的表达形式,两者参数的差异应该很小,表 6 给出了两者参数差异的 t 统计值.表 6 只给出了几个典型的单因子模型的拟合效果,也就是 Vasicek 模型 CIR 模型, CKLS 模型,和拟合效果最好的 CKLSO 模型的拟合效果.可以看到, Vasicek 模型, CIR 模型不能反映 SNP 条件密度函数的多项式部分,多项式部分的参数 t 统计值显著. CKLS 模型有显著改进,拟合效果最好的是 CKLSO 模型.从 CKLSO 模型对每个参数的拟合来看, t 统计值都很小,但综合衡量起来,如表 5 中的 χ^2 统计量值所示,它仍没有完全刻画短期利率的条件密度.这儿需要指出的是,多项式部分不仅反映了条件分布的非正态性,对短期利率的条件方差也有影响.

3.3 两因子利率模型的实证分析结果

单因子模型不能刻画短期利率的变化,因而把注意力转移到两因子模型上.典型的两因子利率模型为式(2)的随机波动率模型,和式(3)的随机均值回复模型.同样利用 EMM 法,对两个模型的参数进行估计和拟合性检验,参数估计值和拟合检验 χ^2 统计值分别见表 7 和表 8.从 χ^2 统计值来看,随机波动率两因子模型式(2)可以拟合短期利率的变化,而随机均值回复两因子模型式(3)不能够描述短期利率的变化.表 9 给出了两因子模型的拟合效果的 t 统计值,可以看到模型式(2)可以描述利率变化的各个参数,其对 ARCH, GARCH 部分的拟合效果是所有检验的利率模型中最好的.模型式(3)的弱点主要还在于它不能拟合利率变化的 SNP 密度函数的多项式部分.

表 5 单因子利率模型的 EMM 法估计结果

Table 5 Estimated values of the one-factor models of short rate with the EMM

参数	Vasicek 模型	CIR 模型	CKLS 模型	GBM 模型	Brennan-Schwartz 模型	CIR0 模型	CKLSO 模型
a_0	15.665 (6.523)	16.749 (6.857)	2.314 (0.2084)		10.084 (0.001)	17.103 (7.826)	1.751 (0.002)
a_1	-1.437 (0.053)	-1.426 (0.056)	-0.551 (0.055)	-0.0016 (0.812)	-0.8064 (0.034)	-1.422 (0.081)	-0.435 (0.000)
b_0	0.304 (0.072)					-0.1187 (0.1580)	-0.053 (0.000)
b_1		0.922 (0.102)	0.9862 (0.2165)	0.387 (9.119)	0.0327 (0.058)	0.1264 (0.4506)	0.9836 (0.0021)
γ		0.5 (0)	1.301 (0.182)			0.5 (0)	1.311 (0.121)
	28.801	28.631	17.166	427.956	128.937	28.617	13.424

注:括号中为各个估计量的标准差.

表 6 单因子利率模型拟合程度的 t 检验

Table 6 T-test of the goodness of fit of the one-factor models

项目	参数	Vasicek 模型	CIR 模型	CKLS 模型	CKLSO 模型
多项式项部分	a_0	0	0	0	0
	a_1	-0.879	-0.973	-1.063	0.061
	a_2	-1.981	-2.076	-1.443	-0.694
	a_3	0.504	0.360	0.272	0.843
	a_4	-0.292	-0.344	0.051	0.650
条件均值项部分	b_0	-0.002	-0.001	-0.138	-0.036
	b_1	0.018	0.020	0.064	0.066
	b_2	0.019	0.021	0.066	0.066
	b_3	0.029	0.031	0.079	0.078
条件方差项的 ARCH 部分	ρ_0	-0.492	-0.473	-0.581	-0.556
	ρ_1	-0.514	-0.543	-1.110	-0.863
条件方差项的 GRCH 部分	G_1	-1.525	-1.532	-1.600	-1.232

表 7 随机波动率模型(2)的 EMM 参数估计值及拟合值

Table 7 Estimated values of parameters and the goodness of fit of the stochastic volatility model(2) with the EMM approach

参数	$a_r/10^{-2}$	$a_{rr}/10^{-4}$	a_w	a_{rr}	$b_{1r}/10^{-2}$	$b_{1rr}/10^{-2}$	b_{2v}	b_{2vr}	χ^2
估计值	0.160 4 (0.052 0)	3.729 0 (0.226 3)	-0.314 7 (0.154 1)	-0.007 0 (0.021 4)	-1.569 4 (8.078 7)	-0.996 3 (0.790 8)	0.352 1 (0.572 7)	-0.097 8 (0.067 95)	7.452

注: 括号中为各个估计量的标准差

表 8 随机均值回复模型(3)的 EMM 参数估计值及拟合值

Table 8 Estimated values of parameters and the goodness of fit of the stochastic mean-reverting model(3) with the EMM approach

参数	a_r	a_θ	$a_{\theta\theta}$	b_{1r}	$b_{2\theta}/10^{-2}$	χ^2
估计值	-0.283 2 (0.221 17)	0.527 4 (0.493 7)	-0.750 9 (0.968 1)	0.092 38 (0.012 70)	0.148 8 (0.313 2)	20.398

注: 括号中为各个估计量的标准差

表 9 两因子利率模型拟合程度的 t 检验

Table 9 T-test of the goodness of fit of the two-factor models

项目	参数	模型(2)	模型(3)
多项式项部分	a_0	0	0
	a_1	-0.179	1.350
	a_2	1.480	1.648
	a_3	-0.747	0.171
	a_4	1.517	1.929
条件均值项部分	b_0	1.017	0.806
	b_1	-1.067	-0.828
	b_2	-1.080	-0.833
	b_3	-1.085	-0.831
条件方差项的 ARCH 部分	ρ_0	1.003	0.831
	ρ_1	0.855	1.182
条件方差项的 GRCH 部分	G_1	0.648	1.255

4 结束语

本文利用 SNP-EMM 法对中国上海证券交易所国债交易表现出的短期利率进行了实证分析, 分析了多种不同的利率模型能否描述短期利率的变化, 检验结果总结如下:

(1) 被检验的单因子模型无法拟合短期利率的变化, CKLS, 和 CKLSO 是其中表现最好的单因子模型, CKLSO 模型的检验统计量几乎接近到被接受的临界值. 与 CIR 模型相比, 允许 γ 自由取值是 CKLS, CKLSO 模型能够改进拟合的关键. 同时也表明利率模型能否拟合利率变化的异方差性和高阶矩是模型成功的关键.

(2) 两因子利率模型中, 典型的有两类, 一类强调刻画波动率的随机变化, 另一类强调刻画利率均值回复特征中的均值的随机变化. 检验结果表明, 随机波动率变化模型是合适的描述交易所国债市场的短期利率的模型.

(3) 由于在固定收益资产的定价中, 哪怕是简单的普通国债, 其价格与短期利率的波动率都具

有密切的联系,并且不同的利率模型对债券的定价有一定的差别^[33].因此单因子利率模型用来对固定收益产品的定价会产生一定的偏差.合适的利率模型应该是一个两因子随机波动率利率模型.

参考文献:

- [1] Merton R. Theory of rational option pricing[J]. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, 4: 141—183.
- [2] Brennan M, Schwartz E. Saving bonds, retractable bonds, and callable bonds[J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 3: 133—155.
- [3] Brennan M, Schwartz E. A continuous time approach to the pricing of bonds[J]. *Journal of Banking and Finance*, 1979, 3: 133—155.
- [4] Brennan M, Schwartz E. Analyzing convertible bonds[J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1980, 15: 907—929.
- [5] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 5: 177—188.
- [6] Dothan U. On the term-structure of interest rates[J]. *Journal of Financial Economics*, 1978, 6: 59—69.
- [7] Cox J, Ingersoll J, Ross S. An analysis of variable rate loan contracts[J]. *Journal of Finance*, 1980, 35: 389—403.
- [8] Cox J, Ingersoll J, Ross S. A theory of the term structure of interest rates[J]. *Econometrica*, 1985, 53: 385—407.
- [9] Sundareson S. Consumption and equilibrium interest rate in stochastic production economies[J]. *Journal of Finance*, 1984, 39: 77—92.
- [10] Feildman D. The term structure of interest rates in a partially observable economy[J]. *Journal of Finance*, 1989, 44: 789—812.
- [11] Longstaff F. A non-linear general equilibrium model of the term structure of interest rates[J]. *Journal of Financial Economics*, 1989, 23: 195—224.
- [12] Hull J, White A. Pricing interest-rate derivative securities[J]. *Review of Financial Studies*, 1990, 3: 573—592.
- [13] Black F, Karasinski P. Bond and option pricing when short rates are lognormal[J]. *Financial Analysts Journal*, 1991, 53: 52—59.
- [14] Longstaff F, Schwartz E. Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model[J]. *Journal of Finance*, XLVII(4): 1340—1349.
- [15] Chan K, Karolyi F, Longstaff F, Sanders A. An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate[J]. *Journal of Finance*, 1992, XLVII(3): 1209—1227.
- [16] Gallant R, Tauchen G. Reprojecting partially observed systems with application to interest rate diffusions[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1998, 93(441): 10—24.
- [17] Balduzzi P, Das S, Foresi S. The central tendency: A second factor in bond yields[J]. *The Review of Economics and Statistics*, 1998, 80: 62—72.
- [18] Bomfim A. Monetary Policy and the Yield Curve[R]. Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington, DC, 2003.
- [19] 王春峰, 蔡祥林, 李刚. 基于随机波动性模型的中国股市波动性估计[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(4): 63—72.
Wang Chu-feng, Cai Xiang-lin, Li Gang. Volatility estimation based on stochastic volatility model in Chinese stock market[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(4): 63—72. (in Chinese)
- [20] 樊智, 张世英. 多元 GARCH 建模及其在中国股市分析中的应用[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(2): 68—73.
Fan Zhi, Zhang Shi-ying. Multi GARCH model and its application in Chinese stock market[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(2): 68—73. (in Chinese)
- [21] 范龙振, 王海涛. 上海股票市场股票收益率因素研究[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(1): 60—67.
Fan Long-zhen, Wang Hai-tao. Study on factors that effect stock returns in Shanghai stock maket[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(1): 60—67. (in Chiense)
- [22] Gallant R, Tauchen G. SNP: A Program for Nonparametric Time Series Analysis[R]. Working Paper, Depart of Economics, University of North Carolina, 2001.
- [23] Gallant R, Tauchen G. Which moments to match[J]. *Econometric Theory*, 1996, 12: 657—681.
- [24] Gallant R, Tauchen G. EMM: A Program for Efficient Method of Moment Estimation[R]. Working Paper, Depart of Economics,

University of North Carolina, 2003.

- [25] Jamshidian F. An exact bond option formula[J]. *Journal of Finance*, 1989, 44: 205—209.
- [26] Gibson R, Schwartz E. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims[J]. *Journal of Finance*, 1990, 45: 959—976.
- [27] Ramaswamy K, Sundaresan S. The valuation of floating-rate instruments[J]. *Journal of Financial Economics*, 1986, 17: 251—272.
- [28] Sundaresan S. Valuation of Swaps[R]. Working Paper, Columbia University, 1989.
- [29] Marsh T, Rosenfeld E. Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices[J]. *Journal of Finance*, 1983, 38: 635—646.
- [30] Cox J, Ingersoll E, Ross S. An analysis of variable rate loan contracts[J]. *Journal of Finance*, 1980, 35: 389—403.
- [31] Constantinides G, Ingersoll J. Optimal bond trading with personal taxes[J]. *Journal of Financial Economics*, 1984, 13: 299—335.
- [32] Cox J. Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions[R]. Working Paper, Stanford University, 1975.
- [33] Cox J, Ross S. The valuation of options for alternative stochastic process[J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3: 145—166.
- [34] Ait Sahlia. Testing continuous-time models of the spot interest rate[J]. *Review of Financial studies*, 1996, 3: 197—215.
- [35] Nelson C, Siegel A. Parsimonious modeling of yield curves[J]. *Journal of Business*, 1987, 60: 473—489.
- [36] Nowman B, Sorwar G. Pricing UK and US securities within the CKLS model—Further results[J]. *International Review of Financial Analysis*, 1999, 8(3): 235—245.

Empirical analysis of short interest rate models with half-year interest rate in the Shanghai Stock Exchange

FAN Long-zhen

School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract: According to weekly data of half-year interest rate derived from the trading prices of Government bonds in the Shanghai Stock Exchange, and by the SNP approach, conditional density of the half-year interest rate is estimated, to find that the density shows obvious heteroskedasticity and non-normality. By the EMM approach, continuous-time interest rate models are estimated and tested. The single-factor models include the Vasicek model, the CIR model, and the CKLS model, etc. The two-factor models include the stochastic volatility model proposed by Gallant and Tanchen, and the stochastic mean model proposed by Balduzzi et al. The results show that all the single-factor models cannot match dynamic change of the short interest rate, and the CKLS model does the best among them. The stochastic mean model cannot catch dynamic change of the short interest rate either. Only the stochastic volatility model can fit the dynamic statistical behavior of the change in short interest rate.

Key words: interest rate model; SNP; EMM; Shanghai Stock Exchange