

分红寿险退保率的最小二乘蒙特卡罗模拟研究^①

杨 舸, 田 澎

(上海交通大学安泰管理学院, 上海 200052)

摘要: 将人寿保险产品中的退保权视作美式期权, 提出了一个保单退保率分布的理论模型, 用最小二乘蒙特卡罗模拟计算了分红型人寿保险在合同期内各年的退保率. 研究表明: 市场无风险利率、保险公司担保利率、资产波动率和保险公司盈余分配比例对退保率有影响; 分红保险在到期日前会出现一个退保的高峰, 在峰值过后, 退保率下降并保持一段平缓的水平, 直至到期日前的 2~3 年左右, 退保率逐渐上升.

关键词: 分红寿险; 最小二乘蒙特卡罗模拟; 退保率; 美式期权

中图分类号: F840.62 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2008)01-0095-06

0 引言

退保(主要是寿险产品中的退保)会对保险公司的经营产生重大影响. 国外在上世纪八十年代就发生过多起保险公司因大量退保引发偿付危机, 最终导致保险公司破产的事件. 从那时起, 有关退保的问题一直为业界及学术界所关注^[1]. 从目前的情况看, 我国的利率处于一个低位上. 随着金融业的开放、利率市场化进程的加快, 如果未来利率上升, 就有可能引发大量的退保, 导致保险公司出现偿付危机甚至破产. 因此, 有必要未雨绸缪, 对退保问题展开研究.

由于退保率的大小直接反映了退保问题的严重程度, 所以针对退保率的研究就显得尤为重要. 然而, 从已有的文献来看, 对退保问题的相关研究主要集中在对退保的定价方面^[2~5], 对退保率的研究较少. 鉴于此, 本文拟对分红寿险在合同期内各年的退保率大小进行研究.

传统的涉及退保率的研究主要是根据以往的经验数据来编制失效(退保)率表, 并通过此表对保险公司的退保率进行预测, 其方法类似于编制生命表. 这种失效率表最早的有 Linton 失效率表及 Moorhead 失效率表^[6]. 1975 年, Bizezinski^[7]对

上述两个失效率表进行了修正, 成为国外保险公司失效率表的基础. 多年来, 寿险市场与研究协会(Life Insurance Marketing and Research Association LMRA)等一些行业机构也不定期对行业的退保情况进行调查, 并公布研究报告^[8~11]. 这些报告通常直观反映了行业内退保率的情况, 不断地对失效率表进行了修正, 但这些报告都缺乏定量分析. 对退保率问题研究的不足, 引起了学者们的兴趣. Dar 和 Dodds^[12]、Outreville^[13]、Kuq Tsai 和 Chen^[14]运用计量经济学理论, 对退保率大小的分布进行了定量分析, 建立了退保率与其影响因素间的经验模型. 但是, “迄今仍未建立有关退保率与其影响因素间关系的理论模型”^[14].

本文拟对此进行理论性尝试, 对退保率大小的分布进行研究. 在不考虑死亡及交易费用的情况下, 运用期权理论, 提出分红寿险退保率分布的理论模型, 并用最小二乘蒙特卡罗方法模拟分布结果.

1 基本模型

假定金融市场是完全且无摩擦的. 即不存在信息不对称、税收、交易成本和卖空的限制等情

① 收稿日期: 2003-12-19; 修订日期: 2007-07-03.

作者简介: 杨 舸(1972-), 男, 贵州人, 博士后, Email: gyang428@sina.com

形.此外,本文还进一步假定投保人是理性的,且投保人和保险公司都是风险中性的.

1.1 问题描述

考虑初始时刻,投保人通过趸缴保费向保险公司购买一份期限为 T 的分红寿险,获得价值为 P_0 的资产.通过持有这份资产,投保人将会在合同到期日 T 获得保险公司的支付 $P(t)$.此外,如果允许投保人在到期日前提前中止合同,则投保人可获得 $P(t)$ 的支付 ($t = 1, 2, \dots, T - 1$).其中, $P(t)$ 为保险公司对投保人的负债.从投保人的角度上看,它也可以被视为投保人的资产,其大小取决于保险公司的经营状况.一般而言,保险公司会设定一个担保利率 r_g ,使 $P(t)$ 的年增长率不低于该担保利率.通常,保险公司会将分红寿险账户所对应的资产投资于金融市场.在年度末,当保险公司的投资产生盈利时,保险公司会将盈利按一定的比例返还给投保人,从而保证了投保人可以享受保险公司因为投资而带来的收益(俗称“利差益”)^②.这样,保险公司的资产在支付投保人之后的剩余部分即构成保险公司的损益,记为 $B(t)$.保险公司的资产、损益和对投保人的负债三者之间的关系可以用表 1 来简单表示.

表 1 保险公司简易资产负债表
Table 1 Simple Balance sheet

资产	负债
$A(t)$	$P(t)$ $B(t)$
$\Sigma = A(t)$	$\Sigma = A(t)$

1.2 模型的建立

考虑保险公司将资产投资于完全分散化的投资组合的情形.设资产的变化服从几何布朗运动,即

$$dA(t) = rA(t)dt + \sigma A(t)dW^Q(t) \quad (1)$$

其中: r 为无风险利率、 σ 为资产的波动率, r 和 σ 均为常数, W^Q 为标准维纳过程.

在 t 时刻保险公司对投保人的负债取决于当年的盈利,但不能低于其担保值,记为 $P_g(t)$,其值为

$$P_g(t) = P_g(t-1)(1+r_g) \quad (2)$$

分红保险的一个特点是投保人可以分享保险公司的盈利.如何确定公司盈利,各个保险公司做法不尽相同,而且一般也不对外公开.本文遵循持续稳健经营的原则,将保险公司的盈利 $S(t)$ 简化为投资收益减当年的担保支付 $P_g(t)$,并抵补上一年度公司损益后的剩余^③,即

$$S(t) = A(t) - P_g(t) + B(t-1)(1+r) \quad (3)$$

式中: $B(t-1)(1+r)$ 为上一年度保险公司的损益.

从而,保险公司的最终负债(对投保人而言则是其资产)可以表示为

$$P(t) = P_g(t) + \max[0, \alpha S(t)] \quad (4)$$

式中: α 为保险公司的盈利分配比例(又称分红比例),满足 $\alpha \in [0, 1]$.该值越大,对投保人越有利.按照我国《个人分红保险精算规定》^④, α 的取值不得小于 0.7

如果允许投保人提前中止合同(即允许投保人退保),那么对投保人而言在区间 $[0, T]$ 上,将会选择最优的中止时间以使其资产价值最大化.记这一退保时间为 τ^* ,则待解的最优化问题可以归结为

$$\tau^* = \inf \{ t | P(t) \leq \epsilon \sup_{\mathcal{R}_t} E^Q [e^{-\alpha} P(t) | \mathcal{R}_t] \} \quad (5)$$

式中: $\{\mathcal{R}_t\}$ 为 t 时刻关于 $P(t)$ 的所有信息集, $E^Q[\cdot]$ 为风险中性下的期望.

事实上, τ^* 是一个最优停时,它是随机变量.在这一最优停时的问题中,隐含了在 $[0, T]$ 区间上退保率大小的分布情况.因此,通过对 τ^* 的计算,可以获得保单退保率大小的分布.具体的求解过程,将在下一部分进行详细论述.

2 模型的求解

2.1 求解方法的选择

寿险产品可以在合同到期日前执行,因而可以视作美式期权.与只能在到期日执行的欧式期

② 事实上,投保人不仅可以获得利差益,而且还可以获得因实际死亡率低于预定的死亡率带来的“死差益”,以及因实际的营业费用低于预定的营业费用带来的“费差益”.为使问题简化,本文中不考虑死亡率和费用的影响,因而,保单的分红仅由投资收益产生.

③ 根据《保险公司财务制度》的规定,保险公司发生的年度亏损,可以用下一年度的利润在所得税前弥补.

④ 见中国保险监督管理委员会文件(保监发[2003]67号).

权相比, 美式期权的定价比较困难. 大多数的美式期权没有解析解, 往往要借助数值分析的方法获得. 所以, 本文拟用数值方法进行模型的求解.

蒙特卡罗模拟是数值模拟计算中应用较为广泛的一种方法. 但是, 由于其具有前向模拟的特点, 不能很好地确定具有后向迭代搜索特征的美式期权定价, 因而长期以来一直被认为只适用于欧式期权, 而不适于美式期权^[15]. 然而, Tilley^[16]利用蒙特卡罗模拟对一个基于可支付红利的美式看跌期权进行估值, 突破了长期以来蒙特卡罗方法不能用于美式期权定价分析的传统观念. Tilley的方法为蒙特卡罗模拟应用于美式期权定价建立起一个基础, 但由于它的计算过程需要的存储空间和运算工作量都非常大, 从而使该方法实现起来十分困难, 有时甚至是不可能的. 为克服 Tilley方法的制约性, Broadie和Glasserman^[17]对 Tilley的方法进行了改进, 但仍然存在较大信息存储的不足, 尤其是在模拟过程中, 随着需要模拟的可提前执行日期数量的增加, 所需的存储量和运算工作量将呈现出指数型增长, 所以它仍然不是一个十分理想的办法. 为此, Grant Vora和Weeks^[18]将具有后向搜索特征的动态规划思想融入蒙特卡罗方法框架中, 使得无论是在信息存储空间和运算工作量的要求上, 还是在模拟的精确程度上都有很大的改进. 在此基础上, Longstaff和Schwartz^[19]提出最小二乘蒙特卡罗模拟 (least squares Monte Carlo simulation) 计算美式期权. 该方法在计算量和存储量上都有非常大突破, 因而得到较广泛的应用.

除了蒙特卡罗模拟, 常用的数值计算的方法还有格点法和有限差分法等. 但是, 与这两个方法相比, 蒙特卡罗模拟具有两个优势: 一是比较灵活, 易于实现和改进; 二是模拟估计的标准误差及收敛速度与问题的维数具有较强的独立性, 从而能够更好地用于多时间阶段、多标的变量的高维衍生证券的定价问题. 此外, 用蒙特卡罗模拟可以得到每条模拟路径上期权执行的时间, 为随机过程的最优停时问题提供了数值解. 所以, 本文将采用 Longstaff和Schwartz提出的最小二乘蒙特卡罗方法研究分红寿险的退保率.

2.2 求解过程

首先将时间 $[0, T]$ 进行离散化, 取时间间隔为 Δt , $T = N \cdot \Delta t$. 根据式 (1), 运用蒙特卡罗方法

可以模拟保险公司资产的波动. 再根据式 (2) - (4), 计算得到 K 条保单价值变动的路径 P_i^k ($i = 0, 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, K$), 其中 $P_i = P(i \cdot \Delta t)$.

对于欧式期权, 只能在到期日执行, 因而只需考虑到期日 T 时刻的情形. 然而, 美式期权必须考虑提前执行. 即在任一时刻, 持有人将比较立即执行期权的价值 (即内在价值) 与继续持有该期权的价值 (即期望价值). 当期权的内在价值大于期望价值时, 投保人将选择提前执行合同, 否则将继续持有. 因而, 在任一时刻, 保单的期望价值成为决策的关键.

由于蒙特卡罗模拟具有前向性, 因此, 在 i 时刻保单的期望价值很难获得. 为解决这一困难, Longstaff和Schwartz^[19]提出用多项式拟合该时刻的期望价值, 即

$$E(V_i) = E^Q [e^{-r\Delta t} V_{i+1} | \mathcal{F}_i] \approx a_{i1} + a_{i2}P_i + a_{i3}(P_i)^2 \quad (6)$$

式中: $E(V_i)$ 为在 i 时刻保单的期望价值, a_{i1} , a_{i2} , a_{i3} 为 i 时刻保单期望价值的回归系数, 其值可以通过下面的最小二乘回归获得.

对任意一条分红寿险负债路径 P_i^k , 在任意时刻 i 继续持有该合同的期望价值 $E^k(V_i)$ 可表示为

$$E^k(V_i) = a_{i1} + a_{i2}P_i^k + a_{i3}(P_i^k)^2 + \varepsilon_i^k \quad (7)$$

式中: ε_i^k 为残差. 通过使所有负债路径的残差平方和最小, 即通过使 $\sum_k (\varepsilon_i^k)^2$ 的值最小, 可得到式 (7) 中多项式参数的估计值 \hat{a}_{i1} , \hat{a}_{i2} 和 \hat{a}_{i3} . 此时, 路径 k 在 i 时刻保单的期望价值估计值 $\hat{E}^k(V_i)$ 表示为

$$\hat{E}^k(V_i) = \hat{a}_{i1} + \hat{a}_{i2}P_i^k + \hat{a}_{i3}(P_i^k)^2 \quad (8)$$

在获得保单期望价值的估计之后, 对保单退保率分布的估计则比较容易, 下面就来对此进行说明.

对于路径 k 在到期日前的任一时刻, 比较 $\hat{E}^k(V_i)$ 与 P_i^k 的大小. 当 $P_i^k \geq \hat{E}^k(V_i)$ 时, 则在该时刻中止合同 (退保); 反之, 则继续持有合同. 从终点开始, 逐步回推迭代至初始时刻, 选取最小的执行时间为该路径上期权的最优执行时间, 即退保时间 τ_k^* .

用同样的方法, 计算所有路径上的最优执行时间. 进一步, 对路径 k , 令
$$j_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = \tau_k^* \\ 0 & \text{当 } i \neq \tau_k^* \end{cases},$$
 可得到在第 i 时刻该期权被执行概率的估计值为

$$\text{prob}(\tau = i) = \sum_{k=1}^K j_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

这个概率即为该时刻下退保率的估计值。

3 计算结果及分析

为了进一步说明本文的模型,在此给出一个实际的算例.本文选择与 Grosen和 Jorgensen^[3]相同的参数,即 $P_0 = 100$, $B_0 = 0$, $T = 20$, $r = 0.08$, $r_g = 0.045$, $\sigma = 0.15$, $\alpha = 0.75$ 分别考虑无风险利率 r 、保险公司担保利率 r_g 、资产波动率 σ 及盈余分配比例 α 对退保率的影响.当考虑某一因素的影响时,改变该因素并固定其他参数不变.进行蒙特卡罗模拟时,模拟 100 000 次资产波动的路径,然后求每年的退保率.在此基础上重复进行 1 000 次,取平均值,得到最终结果.如图 1—图 4 所示.

从模拟计算的结果上看,分红寿险在到期日前的某一时刻会出现一个退保的高峰,在峰值过后,退保率下降并保持在一个较低的水平,直至到期日前的 2~3 年左右,退保率又逐渐上升.退保高峰出现的时间和峰值大小受无风险利率 r 、担保利率 r_g 、资产的波动率 σ 和盈余分配比例 α 等因素的影响.

市场无风险利率 r 对退保率的影响如图 1 所示.从图中可以看出,当无风险利率低于担保利率时,投保人将持有保单直至到期日(由于这条曲线只在到期日执行,因而与 x 轴重合,图中只见三条曲线).当市场无风险利率高于担保利率时,投保人可能在到期日前退保.随着无风险利率的升高,退保高峰出现的时间提前,但峰值的大小下降.可以看出,市场无风险利率对退保行为的影响是双重的.一方面,当无风险利率升高时,保单的价值下降,投保人愿意进行再融资,从而引起退保行为的增加.另一方面,当无风险利率升高时,保险公司的投资收益也会相应增加.由于分红寿险可以分享保险公司的投资收益,保单的价值会因此增加,从而使退保行为减少.总的来看,无风险利率升高,退保略有增加.这个结果表明,市场利率对分红寿险退保率的影响与普通的寿险产品不同.一般而言,当市场利率升高时,普通寿险产品由于保单价值下降,退保率将随利率升高而增加.因此,分红产品对缓解因市场利率上升而带来的

退保困境有积极的作用.

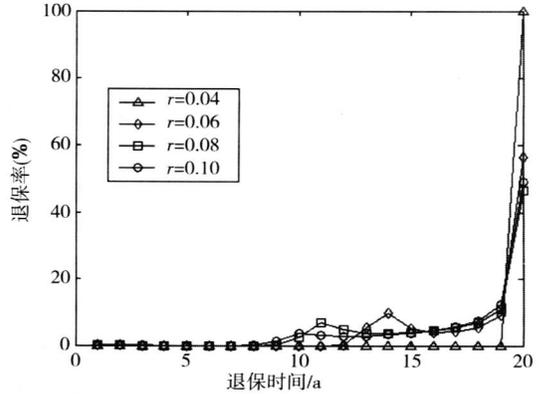


图 1 无风险利率对退保率的影响

Fig. 1 The effect of riskless interest rate on surrender rate
(图中参数为 $P_0 = 100$, $B_0 = 0$, $T = 20$, $r_g = 0.045$, $\sigma = 0.15$, $\alpha = 0.75$)

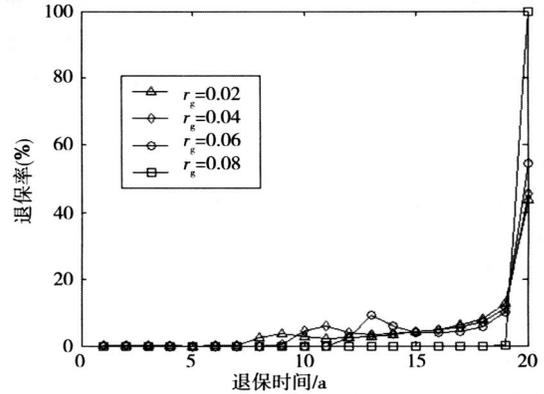


图 2 担保利率对退保率的影响

Fig. 2 The effect of guaranteed return rate on surrender rate
(图中参数为 $P_0 = 100$, $B_0 = 0$, $T = 20$, $r = 0.08$, $\sigma = 0.15$, $\alpha = 0.75$)

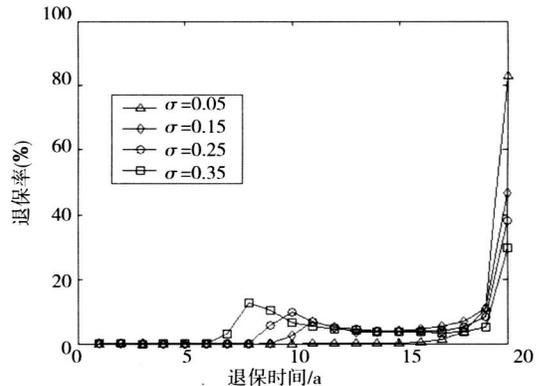


图 3 资产波动率对退保率的影响

Fig. 3 The effect of asset volatility on surrender rate
(图中参数为 $P_0 = 100$, $B_0 = 0$, $T = 20$, $r = 0.08$, $r_g = 0.045$, $\alpha = 0.75$)

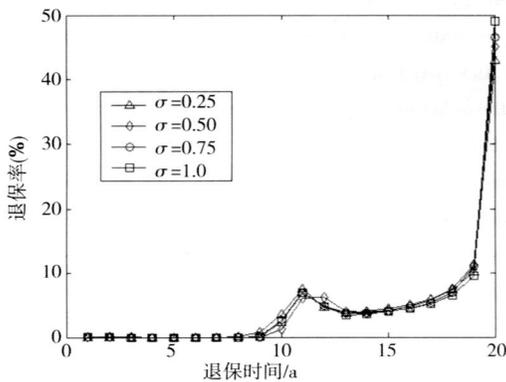


图 4 盈余分配比例对退保率的影响

Fig 4 The effect of participating ratio on surrender rate

(图中参数为 $P_0 = 100$ $B_0 = 0$ $T = 20$ $r = 0.08$ $r_g = 0.045$ $\sigma = 0.15$)

保险公司担保利率 r_g 对退保率的影响如图 2 所示. 随着担保利率的升高, 退保高峰出现的时间向后推移. 当担保利率 $r_g = 0.02$ 时, 退保高峰在第 9 年出现, 峰值大小为 3.7% 左右; 当担保利率 r_g 上升到 0.04 时, 退保高峰推迟至第 11 年, 峰值大小为 6% 左右; 担保利率继续上升到 0.06 时, 退保高峰在第 13 年出现, 峰值为 9% 左右; 当担保利率上升至无风险利率时, 无退保行为发生. 总的来说, 担保利率升高, 退保率下降.

资产波动率 σ 对退保率的影响如图 3 所示. 可以看出, 随着波动率增加, 退保高峰提前, 峰值大小增加, 退保行为加剧. 当波动率很小, 如 $\sigma = 0.05$ 时, 并未出现很明显的退保高峰; 当波动率继续上升时, 退保高峰出现的时间逐渐提前, 峰值大小也增加. 这一结果将对我国寿险市场有一定的指导意义. 与国外成熟的资本市场相比, 我国的资本市场波动率较大, 寿险产品的退保问题因而会更严重些. 随着保险公司投资渠道的拓宽, 未来保险金直接进入股票二级市场成为可能, 因此, 保险公司在资金“入市”前更应该关注退保问题.

参考文献:

[1] Briys E, De Varenne F. On the risk of insurance liabilities: Debunking some common pitfalls[J]. Journal of Risk and Insurance, 1997, 64: 673-694

[2] Briys E, De Varenne F. Life insurance in a contingent claim framework: Pricing and regulatory implications[J]. Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 1994, 19: 53-72

[3] Grosen A, Jørgensen P L. Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest guarantees, surrender options

保险公司盈余分配比例 α 对退保率的影响如图 4 所示. 随着盈余分配比例的下降, 退保率有所增加. 但从计算结果上看, 盈余分配比例, 对退保行为的影响差别并不十分显著. 目前, 我国的一些保险公司试图依靠提高分红比例来抑制退保行为. 本文的研究表明, 这一做法的效果在理论上并不显著.

4 结 论

本文在金融市场是完备且无摩擦的, 即不存在信息不对称、税收、交易成本和卖空的限制等情况的假定下, 研究分红寿险中理性投保人的退保行为. 考察了无风险利率、保险公司担保利率、资产收益波动率及盈余分配比例对退保率的影响. 研究结果表明:

1) 分红保险在到期日前会出现一个退保的高峰, 随后退保率有所下降并保持较低水平, 直至到期日前的 2~3 年左右, 退保率又逐渐上升;

2) 无风险利率对退保的影响是双重的, 既有加速退保的一面, 又有减少退保的一面; 与普通寿险产品相比, 分红型产品更有利于缓解退保矛盾;

3) 随着保险公司担保利率的升高, 总的退保率下降, 退保高峰推迟, 但峰值上升;

4) 随着资产波动率的提高, 退保高峰的出现时间提前, 峰值大小上升; 由于我国资本市场波动率较大, 因而我国保险公司应对退保问题予以关注;

5) 保险公司盈余分配比例下降, 退保行为增加, 但其影响并不十分显著. 因此, 保险公司试图通过提高分红比例来抑制退保行为, 其效果在理论上并不显著.

本文的研究结果是在未考虑死亡率和交易费用的情形下得到的, 讨论二者对退保率的影响, 将是一个值得进一步研究的实际问题.

- and bonus policies[J]. Insurance Mathematics and Economics 2000, 26: 37—57.
- [4] Grosen A, Jørgensen P L. Life insurance liabilities at market value: An analysis of insolvency risk, bonus policy, and regulatory intervention rules in a barrier option framework[J]. Journal of Risk and Insurance, 2002, 69: 63—91.
- [5] Jensen B, Jørgensen P L, Grosen A. A finite difference approach to the valuation of path dependent life insurance liabilities [J]. Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 2001, 26: 57—84.
- [6] Moorhead E J. The construction of persistency tables[J]. Transactions of Society of Actuaries, 1960, 12: 545—563.
- [7] Bzdzinski J R. LMRA 1971—1972 expected lapse table[J]. Transactions of Society of Actuaries, 1975, 12: 258—294.
- [8] Buck N F. First year lapse and default rates[J]. Transactions of Society of Actuaries, 1960, 12: 258—293.
- [9] LMEA. Annuity Persistency Study[R]. Transactions of Society of Actuaries, 1995—1996 Reports, 559—616.
- [10] Cox S H, Laporte P D, Linney S R, *et al*. Single premium Deferred Annuity Persistency Study[R]. Transactions of Society of Actuaries, 1991—1992 Reports, 281—331.
- [11] Richardson C F, Hartwell J M. Lapse rates[J]. Transactions of Society of Actuaries, 1951, 3: 338—374.
- [12] Dar A, Dodds C. Interest rates, the emergency fund hypothesis and saving through endowment policies: Some empirical evidence for the U. K. [J]. Journal of Risk and Insurance, 1989, 56: 415—433.
- [13] Outreville J F. Whole life insurance lapse rates and the emergency fund hypothesis[J]. Insurance Mathematics and Economics, 1990, 9: 249—255.
- [14] Kuo W, Tsai C, Chen W K. An empirical study on the lapse rate: The cointegration approach[J]. Journal of Risk and Insurance, 2003, 70: 489—508.
- [15] 刘海龙, 吴冲锋. 期权定价方法综述 [J]. 管理科学学报, 2002, 5(2): 67—73.
Liu Haibng, Wu Chongfeng. Survey of option pricing models[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(2): 67—73 (in Chinese).
- [16] Tilley J A. Valuing American options in a path simulation mode[J]. Transactions of Society of Actuaries, 1993, 45: 83—104.
- [17] Broadie M, Glasserman P. Pricing American style securities using simulation[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997, 21: 1323—1352.
- [18] Grant D, Vora G, Weeks D. Path-dependent options: Extending the Monte Carlo simulation approach[J]. Management Science, 1997, 43: 1589—1602.
- [19] Longstaff F A, Schwartz E S. Valuing American options by simulation: A simple least squares approach [J]. Review of Financial Studies, 2001, 14(1): 113—147.

Study on participating life insurance surrender rates based on least square Monte Carlo simulation

YANG Ge, TIAN Peng

School of Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract Dealing the surrender as an American option, this paper presents a theoretical model on the surrender rates distribution of participating life insurance, and calculates annual surrender rate using least square Monte Carlo simulation. The results show that market riskless interest rate, insurer guarantee return rate, asset volatility and the participating ratio will affect surrender rates, and there is a surrender peak before maturity, then, the surrender rates decrease and keep low, till 2~3 years before the maturity they increase gradually.

Key words participating life insurance; least square Monte Carlo simulation; surrender rate; American option