占线 Bahncard 问题的风险补偿模型[①]

丁黎黎，康旺霖
（山东科技大学经济管理学院，青岛 266510）

摘要：Bahncard 是德国 Decutsche Bundesbahn 铁路公司发行的一种优惠卡. 这种因预先支付一定资金而在未来获得相应价格折扣的活动已经成为商家的主要价格折扣方式. 但消费者选择最优的购买时机却具有较大的困难. 因此，基于消费者对未来需求的有限预知，提出了风险补偿模型，应用竞争算法求解模型，得到最优的 TSUM 和 PSUM 策略及其相应的竞争性能比. 实例证明所得的结论是对传统竞争算法的推广，最优的 TSUM 和 PSUM 策略具有现实的可行性.

关键词：Bahncard 问题；竞争算法；风险补偿
中图分类号：C931；F830　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007－9807(2008)04－0038－06

0 引 言

自从 Sleator 和 Tarjan[1] 发表了关于列表更新（list update）和换页（paging）问题的占线算法以来，人们开始关注各个领域的占线问题（online problem）. 占线算法和竞争分析（online algorithms and competitve analysis）为解决具有很强动态特征的占线问题提供了一种研究思路，强调在变化因素的每个特例中都能给出解决方案，使之与相应离线（offline）问题的最优方案差异总在一定比例范围内. 由于许多金融问题的决策成败往往依赖于决策者对未来信息的掌握，有越来越多的学者把竞争分析应用到金融占线问题中. El-Yaniv[2] 设计了威胁算法（threat-based algorithm），帮助单方向（one-way）外汇兑换者在一定的竞争比内进行决策；Borodin 等[3] 在股票投资组合中，利用竞争投资组合算法（competitive portfolio algorithms）得到股票价格的统计特征并提出投资策略；Fiat 等[4] 则把竞争分析引入到拍卖中，建立了激励相容（incentive compatible）的占线拍卖机制，使得占线决策者在不完全信息的条件下，能够获得较优的决策结果.

对于 Bahncard 问题的占线算法和竞争分析研究，Fleischer[5] 采用传统的占线算法（假定占线决策者是风险规避的）给出 SUM 和 OSUM 两种竞争策略及相应竞争性能比为 $2-\beta$（β 为折扣率）. Karlin 等[6] 给出了该问题的随机性占线算法. Ding[7,8] 提出风险策略帮助决策人选择最优的购买时机，但是忽略了决策者本身的区别. 本文的研究则考虑风险管理在金融决策中的广泛运用，把风险－补偿两个因素引入到传统的竞争分析中，建立风险补偿模型. 设计了 TSUM 策略帮助那些不经常外出的旅行者选择最佳购买时机，同时又设计 PSUM 策略帮助经常外出的旅行者来做决策. 从占线问题与竞争策略的角度，对两种策略及其竞争性能比进行了分析，从理论上阐述了决策人制定这些决策的依据.

1 问题描述和基本定义

Bahncard 是德国 Decutsche Bundesbahn 铁路公司发行的一种优惠卡[5]. 如果旅客愿意支付资金 $C>0$ 购买 Bahncard 优惠卡，便可以在有效期 $T>0$ 内享受 $\beta\in[0,1]$ 的折扣. 假定旅客未来 n

① 收稿日期：2005－09－02；修订日期：2007－08－01.
作者简介：丁黎黎（1978—），女，河北秦皇岛人，博士，副教授. Email：dinglili0220@sohu.com

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

期的旅行需求为 $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$，这里 $\delta_i(t_i, p_i)$ 表示在旅行时间为 t_i 时，旅客要支付的正常票面价格 p_i. 需要判断购卡的额外成本是否合算. 在时间区间 I 内，如果购票总花费 $p^I(\delta) = \sum p_i$ 小于临界成本 $C^*(= C(1-\beta))$，那么旅客不会购买优惠卡，称这样的区间 I 为需求便宜区间；反之，则称为需求昂贵区间. 显然，对于旅客来说未来的旅行需求处于便宜还是昂贵区间具有高度的不确定性. 同样在游乐园、公交公司、购物中心等，这种优惠卡的现象无处不在，小到各种优惠电话卡，大到营销网络中的会员制度. 它们具有占线问题的本质特征，即占线决策者需要在不完全信息的条件下对全局进行优化. 因此，把这种因预先支付一定资金而在未来获得一定价格折扣的决策问题归纳为占线 Bahncard 问题.

在占线算法和竞争分析中，占线决策者的目的就是设计出好的策略以应对博弈对手可能发出的不可控因素的最坏情形，即占线决策人相对离线对手而言是局内人，而离线对手相对占线人而言无所不知，二者进行的是动态的两人零和博弈[9]. 令 $G = (h_{ij})$ 为两人零和博弈，$h_{ij} = h(i,j)$ 表示在离线对手选择纯策略 j 的情况下，占线决策者选择纯策略 i 的收益. 考虑混合策略的情况，令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 为占线决策者的混合策略，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为离线对手的混合策略，那么占线决策者的期望收益为 $H(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h(i,j)x_i y_j$. 如果占线决策者的"maxmin 策略"能够保证其收益为 $H(x^*, y^*)$，同时离线对手的"minmax 策略"也能保证其收益的绝对值不超过 $H(x^*, y^*)$，那么策略 (x^*, y^*) 为策略集合的均衡点，即满足 $\max_x \min_j H(x,j) = H(x^*, y^*) = \min_y \max_i H(i,y)$ 成立（Yao 定律[10]）. 对于成本最小化的占线问题，根据 Yao 定律可以得到 Yao 不等式 $\min_i H(i,y) \leqslant \min_x \max_j H(x,j)$.

把占线算法和竞争分析引入到 Yao 不等式中，对于追求成本最小化占线问题 P，令占线决策者的有限确定性算法集为 $A = \{ALG_1, ALG_2, \cdots, ALG_m\}$，相应离线对手的有限输入序列为 $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$，可以得到纯策略集合为 (A, δ). 从竞争分析角度考虑，将竞争比定义为占线决策者的收益，即 $h(i,j) = \frac{ALG_i(\delta)}{OPT(\delta)}$，然后把 $h(i,j)$ 带入 Yao 不等式得到 $r^* = \min_{x(i)} \max_j E_{x(i)}\left[\frac{ALG_i(\delta)}{OPT(\delta)}\right]$，此不等式意味着对于离线对手的任何输入序列，占线决策者都可以根据其确定性算法所得最优收益而获得最优随机收益的上界，即获得该问题 P 的最优竞争比 r^*.

2　风险补偿模型

MacCrommon 等[11] 提出了被广泛接受的风险衡量尺度，即采用损失变化的呈现方式（exposure to a chance of loss）来代表风险. 在其设计的模型中存在两种行为，产生确定性结果的无风险行为和产生收益或损失两种不确定性结果的风险行为. 本文把这种风险衡量尺度引入传统竞争分析中，把"行为"看作策略的选择；把"结果"看作策略下的竞争比[12]. 在传统的竞争分析中，占线决策者选择无风险策略并获得相应的确定性竞争比. 本文的风险 - 补偿分析框架是在传统竞争分析的基础上，允许占线决策者选择风险策略获得不确定性结果：1）预期成功时获得更优的竞争比；2）预期失败时得到较差的竞争比.

对于风险补偿模型中风险的衡量，用风险算法 A 对传统最优竞争算法的机会成本来定义风险，即占线决策者设计风险算法 A 的风险为 r_A / r^*.

令 λ 为占线决策者的风险忍耐度（当 $\lambda = 1$ 时，占线决策者是风险中立的；当 $\lambda > 1$ 时，占线决策者是风险偏好的），那么风险算法 A 集合可以表示为 $H_\lambda = \{A \mid r_A \leqslant \lambda r^*\}$. 这里占线决策者可以根据自己的风险忍耐度来设计算法并容忍竞争比至多扩大到 λr^*.

对于风险补偿模型中补偿的衡量，本文则把预期（forecast）引入到该模型中. 这里引入预期思想来源于 Bachrach 等[13] 在所研究的换页问题中并没有对未来输入作概率假设，而是运用存取图（access graphs）来预期未来需求页位置，即预期是未来需求序列的子序列.

令 F 为预期，如果占线决策者能够成功的预

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

期未来的需求序列,便可以得到有约束竞争比:$\hat{r}_A = \sup_{\delta \in F} \frac{ALG_i(\delta)}{OPT_i(\delta)}$,该问题的最优竞争比为 $\hat{r}^* = \inf_A(\hat{r}_A)$. 采用竞争比的提高来衡量采用风险算法 A 所获得的补偿,即风险算法 A 的补偿函数为 $R_A = \frac{r^*}{\hat{r}_A}$.

对于问题 P,如果占线决策者能够成功预期未来的需求序列,那么总能够在风险算法 A 集合中选择一个最优风险算法为 $A^* \in H_A$,则最优补偿函数为 $R_{A^*} = \sup_{A \in H_A} \frac{r^*}{\hat{r}_A}$.

引理1 对于Bahncard问题,若预期正确,则最优风险算法 A^* 的补偿函数满足 $R_{A^*} \in [1, r^*]$.

证明 在风险补偿模型中,风险忍耐度 $\lambda \geqslant 1$. 若 $\lambda = 1$,则 $\hat{r}_A = r^*$,可以得到补偿函数的下界为1;对于任何算法下的竞争比均有 $\hat{r}_A \geqslant 1$,可以得到补偿函数的上界为 r^*.

3 最优购买策略及其竞争性能分析

这里的风险补偿模型是带有风险忍耐度 λ 的竞争分析模型. 不可能简单搬用传统竞争策略来解这个模型,因为传统的竞争策略假定占线决策者对未来信息一无所知,而相比较的离线对手却知道所有信息,因此竞争比结果并不是最理想的. 本文提出用基于占线算法的TSUM和PSUM策略求解此模型.

3.1 TSUM策略及其竞争比

TSUM策略 在风险-补偿的分析框架中,当占线决策者可以识别自己的风险忍耐度 λ 时,1)正确预期未来的需求序列为便宜区间时,不购买优惠卡是最优选择;2)正确预期未来的需求序列为昂贵区间时,选择在最优时期 t_j 购买优惠卡,即到时期 t_j 为止以正常价格购票的总花费接近 $\frac{C}{(2-\beta)\lambda - 1}$.

基本思想是运用两阶段风险竞争算法(threat-based algorithms)求解模型. 第一阶段,占线决策者为了避免因预期错误而带来的损失,会选择适当的购买时机从而保证竞争比不超过 λr^*. 一旦预期成功,进入第二阶段,占线决策者从不超过可接受的风险忍耐度的算法中找出补偿最大的算法.

定理1 对于Bahncard问题,当正确预期未来的需求序列为便宜区间时,TSUM策略的竞争比为1.

证明 预期1:未来的需求序列为便宜区间.

在这种预期正确的情况下,占线决策者的最优选择就是不购买优惠卡,即TSUM策略下占线决策者的总花费为 $C_{\text{TSUM}}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} p_i$,而离线对手的总成本为 $C_{\text{OPT}}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} p_i$. 对于任意风险忍耐度 $\lambda \geqslant 1$ 来说,当预测1成功时,有约束的最优竞争比为1.

推论1 当正确预期未来的需求序列为便宜区间时,占线决策者的收益补偿为 $R_{A^*} \to 2 - \beta$.

证明 已知 $\hat{r}_A = 1, r^* = 2 - \beta$,则 $R_{A^*} \to 2 - \beta$.

定理2 对于Bahncard问题,当正确预期未来的需求序列为昂贵区间时,TSUM策略的竞争比为 $1 + \frac{1-\beta}{(2-\beta)\lambda - (1-\beta)}$.

证明 预期2:未来的需求序列为昂贵区间.

在这种预期正确的情况下,占线决策者的最优选择是购买优惠卡,但是当占线决策者一旦选择购买优惠卡时,离线对手为了使其处于最坏情形会停止旅行需求. 令 s 为购买优惠卡前以正常价格购票的总花费,ε 为购买优惠卡当期的票面正常价格,则占线决策者的总花费为 $C_{\text{TSUM}}(\delta) = C + s + \beta\varepsilon$;离线对手的总花费分别为1)如果 $s \geqslant C^* - \varepsilon$,则 $C_{\text{OPT}}(\delta) = C + s + \beta\varepsilon$;2)如果 $s < C^* - \varepsilon$,则 $C_{\text{OPT}}(\delta) = s + \varepsilon$. 当引入风险忍耐度 $\lambda \geqslant 1$ 时,根据风险的定义和文献[5]中无风险行为下的最优竞争比,TSUM策略的竞争比受到这样约束

$$r_{\text{TSUM}} \mid r_{\text{TSUM}} \leqslant \lambda(2-\beta).$$

以下分两个阶段讨论TSUM策略的竞争性.

第一个阶段:$s \leqslant C^* - \varepsilon$ 且 ε 为较小的常数时

$$r_{\text{TSUM}} = \frac{C + s + \beta\varepsilon}{s + \varepsilon} \leqslant (2-\beta)\lambda \Rightarrow$$

$$s \geqslant \frac{C - (2-\beta)\lambda\varepsilon + \beta\varepsilon}{(2-\beta)\lambda - 1}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

第二个阶段：$s > C^* - \varepsilon$ 且 ε 为较小的常数时

$$r_{\mathrm{TSUM}} = \frac{C + s + \beta\varepsilon}{C + \beta(s + \varepsilon)} \leqslant (2 - \beta)\lambda$$

可以得到

$$s \leqslant \frac{(2-\beta)C\lambda - C + (2-\beta)\lambda\beta\varepsilon - \beta\varepsilon}{1 - (2-\beta)\lambda\beta}$$

且 $1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 - \lambda}}{\lambda} \leqslant \beta \leqslant 1$.

因此，当预期2成功的时候，即未来的需求序列为昂贵区间的情况下，如果占线决策者希望得到较小竞争比，就是尽可能减小函数 $r_{\mathrm{TSUM}} = \frac{C + s + \beta\varepsilon}{C + \beta(s + \varepsilon)}$ 的值. 由于此函数是关于 s 的单调递增函数，所以当 $s = \frac{C - (2-\beta)\lambda\varepsilon + \beta\varepsilon}{(2-\beta)\lambda - 1}$，且 $\varepsilon \to 0$ 时，可以得到有约束竞争比的最小上界，即

$$r_{\mathrm{TSUM}} \leqslant 1 + \frac{1-\beta}{(2-\beta)\lambda - (1-\beta)}.$$

推论2　当正确预期未来的需求序列为昂贵区间时，占线决策者的收益补偿为 $R_{A^*} \to 2 - \beta$.

证明　当正确预期未来的需求序列为昂贵区间时，占线决策者选择 TSUM 策略可以得到的收益补偿为 $R_A = \frac{r^*}{\hat{r}_A} = (2-\beta) - \frac{1-\beta}{\lambda}$. 当 $\lambda \to \infty$ 时，$R_{A^*} \to 2 - \beta$，即随着占线决策者风险偏好的增大，所获得的收益补偿将接近于最大值.

3.2　PSUM 策略及其竞争比

虽然 TSUM 策略获得了较小的竞争比，能够帮助占线决策者选择最佳的购买时机. 但是这种策略只适合那些不经常外出的旅行者，即尽可能推迟购买优惠卡的时机（接近临界点）从而保证有足够多的旅行需求使 TSUM 策略下的竞争比尽可能小. 显然，这个策略并不适合那些由于工作需要经常外出的决策人. 因此，针对这样的占线决策者，本文又设计了 PSUM 策略.

PSUM 策略：在风险-补偿的分析框架中，当占线决策者可以识别自己的风险忍耐度 λ，预期未来是需求昂贵区间时，他会选择在当正常票价满足 $p \geqslant \frac{(2-\beta)C\lambda - (1-\beta)(C+s)}{(1-\beta)[(2-\beta)\lambda + \beta]}$ 时购买优惠卡.

定理3　对于 Bahncard 问题，PSUM 策略的竞争比为 $1 + \frac{1-\beta}{(2-\beta)\lambda - (1-\beta)}$.

证明　考虑这样的子区间 $I = (t_i, t_{i+1})$，这里 t_{i+1} 为购买优惠卡的时间点，t_i 为前一期购买优惠卡后的失效点且 $t_i \leqslant t_{i+1} - T$. 在此时间区间内离线对手的总花费为 $C_{\mathrm{OPT}}(I) = s + p$，这里 p 为 t_{i+1} 时刻的票面价格，这里 s 为 (t_i, t_{i+1}) 内以正常价格购票的总花费. 但是占线决策者根据自己的经验，预期未来的旅行在一个需求昂贵区间内，他会选择购买优惠卡，因而占线决策者 PSUM 策略下的总花费为 $C_{\mathrm{PSUM}}(I) = C + s + \beta p$. 令 $p \geqslant a$，可以得到以下有约束竞争比

$$\frac{C_{\mathrm{PSUM}}}{C_{\mathrm{OPT}}} = \frac{C + s + \beta p}{s + p} \leqslant \frac{C + s + \beta a}{s + a}$$

根据引理1和推论2，TSUM 策略下的竞争比是风险补偿分析框架下最优竞争比. 因此，令 $\frac{C + s + \beta a}{s + a} = 1 + \frac{1-\beta}{(2-\beta)\lambda - (1-\beta)}$，可以得到最优购卡时期的票面价格上界 $p \geqslant \frac{(2-\beta)C\lambda - (1-\beta)(C+s)}{(1-\beta)[(2-\beta)\lambda + \beta]}$.

由于 PSUM 策略下的有约束竞争比是关于 p 的减函数，因此占线决策者会选择尽可能小的 p 值以获得有约束竞争比的上界.

推论3　当 $\lambda = 1$ 时，$1 + \frac{1-\beta}{(2-\beta)\lambda - (1-\beta)} = 2 - \beta$.

证明　TSUM 和 PSUM 策略的竞争比可以表示为 β 和 λ 的函数，即 $\hat{r}_A = f(\beta, \lambda)$. 由于占线决策者的风险忍耐度 λ 的不同，可以分两种情况来讨论：当 $\lambda = 1$ 时说明占线决策者是风险规避的，可以得到这样的结论，即 $\hat{r}_A = 1 + \frac{r^* - 1}{r^*(\lambda - 1) + 1} = r^*$；当 $\lambda > 1$ 时说明占线决策者是风险偏好的，可以得到这样的结论，即 $\lambda \to \infty$ 时，$\hat{r}_A \to 1$.

4　算　例

以法国的"CARTE 12-25 法国铁路年轻优惠卡"为例. 通过数据结果来找寻最优策略、风险忍耐度 λ、传统竞争比 r^*、有约束竞争比 $\hat{r}_A$ 之间的关系. 在表1中，首先确定 C、β 和 T 值，并在各种风险忍耐度 λ 下求出有约束竞争比 $\hat{r}_A$.

对于占线决策者来说，未来的需求虽然是不

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

确定的,但是可以在自己容忍的风险度下,通过TSUM策略对未来进行成功的预测(失败的预测即高风险低收益对本文的讨论没有意义),求得在此策略下的最小竞争比$\hat{r}_A$. 在表1中,当占线决策者是风险规避者时,他可以选择竞争比为1.750 0的传统竞争策略,即当$s = 57.33$ EU时购买优惠卡. 如果占线决策者是风险偏好者时,他可以根据自己的风险忍耐度来选择有风险的TSUM策略. 例如,当$\lambda = 1.05$时,占线决策者可以选择在$s = 51.34$EU时购买优惠卡. 显然在TSUM策略下,占线决策者会提前了购买优惠卡的时机,并承担可能损失5.99 EU的风险,一旦预期成功可获得一定的补偿收益,即该策略下的竞争比减少了10%. 当$\lambda = 1.20$时,该策略下的竞争比减少了16%. 说明随着风险忍耐度的增大,TSUM策略的竞争比接近最优值1.

表1 策略与竞争比的比较分析

Table 1 Comparison among Strategies and Competitive Ratios

λ	s/EU	$\hat{r}_A$	r^{*}①
1.05	51.34	1.560 7	1.750 0
1.10	46.48	1.526 3	1.750 0
1.20	30.09	1.468 7	1.750 0

注: $C = 43.00$EU $\beta = 50\%$ $T = 1$year.

① 引自文献[5].

通过表1的分析,在风险补偿分析框架中,TSUM策略(PSUM策略)比传统竞争策略获得更小的竞争比,使占线决策者通过承担一定风险而获得相应的收益. 本文通过表2中的两种旅行需求,比较分析TSUM和PSUM策略. 设定$\lambda = 1.05$,那么$s = 51.34$ EU. 对于旅行需求1,最优的选择是TSUM策略,且在t_4时期购买卡使得占线决策者的损失限制在1.560 7倍内. 对于旅行需求2,虽然总的购票成本52EU超过了51.34EU,但是如果仍然选择TSUM策略,只能得到1EU的优惠. 根据PSUM策略,当$s = 31$EU且$p > 16.45$EU时,即在t_3时期购买优惠卡,不仅使占线决策者的损失限制在1.560 7倍内,而且可以得到5.25EU的优惠. 因此,占线决策人可以根据自己对未来旅行需求的预期,选择不同的购买策略,从而使自己的花费近可能地少.

表2 TSUM与PSUM策略比较

Table 2 Comparison between TSUM Strategy and PSUM Strategy

时期	t_1	t_2	t_3	t_4
旅行需求1	16 EU	15 EU	14EU	7 EU
旅行需求2	16 EU	15 EU	17 EU	4EU

注: $\lambda = 1.05$; $\beta = 25\%$.

5 结束语

占线问题中竞争算法的广泛应用,为占线决策者提供了一个有利的决策工具. 本文在传统竞争分析的基础上,把风险、补偿两个因素引入到占线Bahncard问题中,提出两种竞争策略帮助占线决策者选择最优的购买时机.

在本文研究的问题中,考虑的是单个个体占线决策者和离线对手之间的零和博弈,若是考虑多个占线决策者和离线对手的情况,显然本文提出的策略不具有竞争性. 对于这种多人混合博弈,可以设计占线决策者的占线学习算法[14],即每次博弈后要根据对手策略和收益所得来修正自己下一次博弈策略,这里学习机制的设计为本文的研究提供了广阔的空间.

参 考 文 献:

[1] Sleator D D, Tarjan R E. Amortized efficiency of list update and paging rules[J]. Communications of ACM, 1985, 28(2): 202—208.

[2] El-yaniv R. Competitive solutions for online financial problems[J]. ACM Computing Surveys, 1998, 30(1): 28—69.

[3] Borodin A, El-Yaniv R, Gogan V. On The Competitive Theory and Practice of Portfolio Selection[C]. In Proc. 4th Latin American Symposium on Theoretical Informatics, Germany: Springer-Verlag, 2000. 173—196.

[4] Fiat A, Goldberg A V, Hartline J D, *et al.* Competitive Generalized Auctions[C]. In Proceedings 34th ACM Symposium on the Theory of Computing, New York: 2002. 19—21.

[5] Fleischer R. On the Bahncard problem[J]. Theoretial Computer Science, 2001, 268(1): 161—174.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[6] Karlin D R, Kenyon C, Randall D. Dynamic TCP acknowledgement and other stories about e/(e - 1) [J]. Algorithmica, 2003, 36(3): 209—224.

[7] Ding L L, Xin C L, Chen J. A Risk-Reward Competitive Analysis of The Bahncard Problem[C]. AAIM'05, Xi'an, 2005. 37—45.

[8] Ding L L, Xu Y F, Hu S H. The Bahncard Problem With Interest Rate and Risk[C]. WINE'05, Hong Kong, 2005. 554—563.

[9] Borodin A, EI-Yaniv R. Online Computation and Competitive Analysis[M]. London: Cambridge University Press, 1998.

[10] Yao A C, Probabilistic Computations: Towards a Unified Measure of Complexity[C]. In Proc. 18th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, Rhode Island, 1977. 222—227.

[11] MacCrimmon K R, Wehrung D A. Stanbury W T. Taking risks: The management of uncertainty[J]. The Journal of Risk and Insurance, 1987, 54(2): 391—394.

[12] Al-Binali S. A risk-reward framework for the competitive analysis of financial games[J]. Algorithmica, 1999, 25: 99—115.

[13] Bachrach R, El-yaniv R. Online List Accessing Algorithms and Their Applications: Recent Empirical Evidence[C]. In Proc. 8th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, New York, 1997. 53—62.

[14] Blum A, Kumar B, Rudra A, *et al.* Online learning in online auctions[J]. Theoretical Computer Science, 2004, 324: 137—146.

Risk-reward model for online Bahncard problem

DING Li-li, KANG Wang-lin

School of Economics & Management, Shandong Universit y of Science and Technology, Qingdao 266510, China

Abstract: The Bahncard is a railway pass of the German Decutsche Bundesbah. Such cards have become a popular marketing mode, however the consumer can not make the optimal opportunity to buy a card. Therefore, this paper, based on the limited foreknowledge, establishes a risk-reward model, solved by the competitive algorithms, and finds the optimal TSUM strategy and PSUM strategy, together with their competitive ratios. A numerical example is illustrated to explain such model and strategies.

Key words: Bahncard problem; competitive algorithm; risk-reward

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net