

# 基于第3方逆向物流的闭环供应链模型及应用<sup>①</sup>

晏妮娜<sup>1,2</sup>, 黄小原<sup>3</sup>

(1. 中国人民大学商学院, 北京 10027; 2. 首钢总公司发展研究院, 北京 100041;  
3. 东北大学工商管理学院, 沈阳 110004)

**摘要:** 在价格敏感的随机需求量与回收努力敏感的随机回收量条件下, 建立了基于第3方逆向物流服务提供商(3PRLP)从事物料回收的多级闭环供应链模型. 设计了制造商与第3方之间的目标奖惩合同, 讨论了分散闭环供应链系统中制造商为主方、销售商和第3方为从方的一主多从 Stackelberg 对策及集成闭环供应链的联合优化策略, 并从供应链合同协调的角度进行了对比分析. 最后结合上海宝钢公司废钢回收的实际运作情况进行了仿真计算与分析.

**关键词:** 闭环供应链; 第3方逆向物流; Stackelberg 对策; 废钢回收; 协调

**中图分类号:** F274      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007-9807(2008)04-0083-11

## 0 引言

闭环供应链, 特别是基于第3方的逆向物流系统对于物料回收、资源节约和环境保护具有特别重要的意义<sup>[1-5]</sup>. “十一五”规划指出应大力加快发展循环经济, 重点研究开发集产品制造、能源转换和社会废弃物再资源化3大功能于一体的新一代可循环生产制造流程<sup>[6]</sup>. 基于第3方逆向物流的物料回收模式有利于降低采购成本和风险, 提高资源利用效率, 以实现建设资源节约型和环境友好型社会<sup>[7]</sup>. 研究基于第3方逆向物流的闭环供应链模型优化问题具有重要的理论价值和实际意义.

近年来, 基于循环利用、再制造的闭环供应链管理成为国内外研究的热点. 诸多学者从不同角度考察了闭环供应链的结构设计、库存控制、物流、资金流和信息流管理等方面的问题. 关于闭环供应链协调的研究大多是应用微观经济学和对策论方法来构建并考察逆向物流中的决策问题, 主要是从竞争、信息共享、职能整合与激励4个方面进行研究的. 比较有代表性的研究如下所述. Nunen 和 Zuidwijk<sup>[8]</sup>分别从流程、产品和顾客3种

不同的观点对闭环供应链所涉及的逆向物流活动、关键决策因素、绩效评估方法、以及监控所需的信息技术进行了研究. Savaskan 和 Van Wassenhove<sup>[9]</sup>以及 Groenevelt 和 Majumder<sup>[10]</sup>分别考察了竞争与市场结构对闭环供应链中再制造的激励与协调问题. 前者构建的模型是零售商关于再制造定价的竞争, 而后者关注的是第3方再制造商与设备制造商之间的冲突. Savaskan 等<sup>[11]</sup>应用博弈论分析了基于再制造的闭环供应链的最优渠道结构问题, 结果表明在其线性、确定需求条件下零售商负责收集旧产品的渠道结构优于制造商或第3方负责收集的渠道结构. Savaskan 等<sup>[12]</sup>在此基础上考察了当零售商之间存在竞争时制造商收集已消费产品的逆向渠道选择与前向渠道中产品定价决策之间的相互影响, 他们认为在制造商从事回收的直接渠道中, 供应链的渠道利润取决于回收努力的影响, 而在零售商从事回收的间接渠道中则取决于零售商之间的竞争程度. Prahinski 等<sup>[13]</sup>通过对大量逆向供应链文献的综述, 提出了10个通过实证研究方法得出的命题. 他们认为

① 收稿日期: 2006-05-12; 修订日期: 2007-04-24.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70572088); 中国博士后科学基金资助项目(20070420453).

作者简介: 晏妮娜(1980—), 女, 湖北宜昌人, 博士. Email: yannina331@163.com

采用基于调查的研究方法将能够对目前逆向供应链的运作实例、关键问题及管理技术等问题进行很好的研究. Dobos<sup>[14]</sup>把需求量和回收量作为时间的连续函数,研究了包括生产、库存、再制造以及废弃处置总成本最小的最优生产和库存控制策略. Groenevelt 和 Majumder<sup>[10]</sup>假设存在分配回收产品的外在机制,解释了再制造产品数量的竞争将如何影响原始设备制造商的再制造与制造决策的盈利性. Toktay 等<sup>[15]</sup>运用包括前向物流渠道结构和逆向物流渠道结构的闭环排队网络研究了信息对闭环供应链协调的影响. Lann<sup>[16]</sup>分别用净现值法和平均成本法研究了闭环供应链中制造与再制造结合的资金流问题,并根据持有成本参数评价了资金成本效果. 丁利军等<sup>[17]</sup>研究了考虑供应链成员的退货处理成本和相对出清优势情形下,两次生产和订货模式的供应链契约式协调问题,分析了退货契约和滞销补贴契约的适用条件,设计了有效的退货契约和滞销补贴契约,以协调供应链成员的决策,使销售商的两次订货量达到集中决策的水平. 达庆利等<sup>[18]</sup>从逆向物流系统结构的研究内容和研究方法两个方面比较全面地总结了逆向物流系统结构的研究成果. 孙林岩等<sup>[19]</sup>将逆向物流与传统的前向物流、闭环供应链、绿色物流、废物管理及可持续发展概念进行了比较. 现有的研究成果大多都是从独立的逆向物流角度进行的研究,很少有文献将传统的前向供应链和逆向供应链作为闭环系统进行研究. 另外,同时考虑前向供应链的需求不确定性和逆向供应链的回收不确定性的文献也不多见,而这种双重不确定性的

存在正是闭环供应链系统复杂性的问题所在.

本文主要作了以下3点工作:一是在价格敏感的随机需求量和回收努力敏感的随机回收量条件下,建立了基于第3方逆向物流服务提供商(3PRLP)的多级闭环供应链模型,设计了制造商与第3方之间的目标奖惩合同;二是分别讨论了分散闭环供应链系统中制造商为主方、销售商和第3方为从方的一主多从 Stackelberg 对策和集成闭环供应链的联合优化策略,并从供应链合同协调的角度进行了对比分析;三是结合上海宝钢公司废钢回收的实际运作情况进行了仿真计算与分析.

## 1 模型描述

### 1.1 模型框架

本文考虑由制造商、销售商与第3方逆向物流服务提供商(3PRLP,简称第3方)构成的多级闭环供应链,模型框架如图1所示. 在传统前向供应链中,制造商根据销售商的订单组织生产,并将产品批发给销售商,再经销售商零售给顾客;在逆向供应链中,制造商从第3方逆向物流提供商手中进行物料回收以进行再制造. 另外,为了激励第3方努力从事回收活动,制造商与第3方事先签订目标奖惩合同,即如果第3方的回收量超过(不足)合同规定的目标回收量,制造商将对超额(短缺)回收量进行奖励(惩罚). 在闭环供应链系统中假设制造商、销售商和第3方是风险中性和完全理性的,即他们根据各自期望利润最大化的原则进行决策.

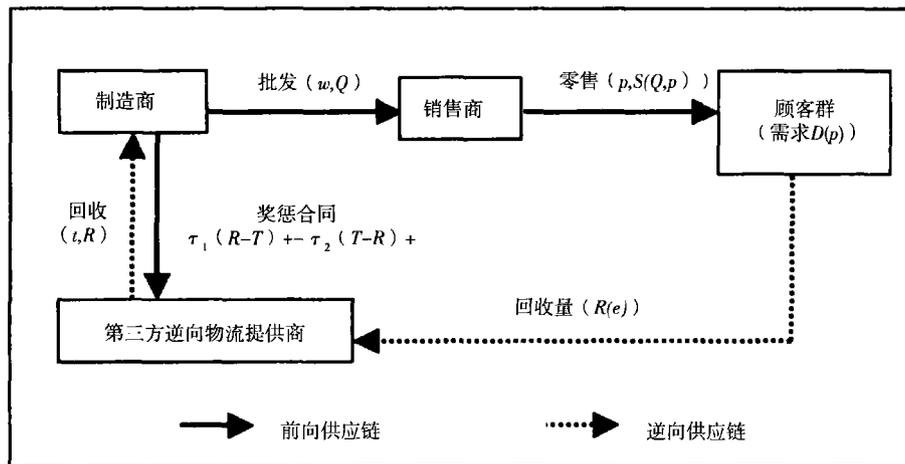


图1 基于第3方逆向物流的闭环供应链框架图

Fig. 1 Framework of closed-loop supply chain based on 3PRLP

### 1.2 变量定义及符号说明

为便于模型描述,首先给出各种变量和函数说明.

$p$ ——产品的单位零售价格,销售商的决策变量. $Q$ ——销售商向制造商的定货量,销售商的决策变量. $w$ ——产品的单位批发价格,制造商的决策变量. $t$ ——制造商从第3方购买物料回收的单位转移价格,制造商的决策变量. $e$ ——第3方从事回收活动的单位投资努力,第3方的决策变量. $T$ ——奖惩合同规定的目标回收量,第3方的决策变量. $c_n$ ——制造商用新原料制造的单位生产成本. $c_o$ ——制造商用回收废钢制造的单位生产成本. $v$ ——未售产品的单位残值. $r$ ——第3方的单位回收、处理成本. $\tau_1/\tau_2$ ——奖惩合同规定的单位奖励/惩罚因子,假设 $\tau_1 > \tau_2$ . $\alpha$ ——产品回收率( $0 \leq \alpha < 1$ ). $\beta$ ——回收产品的再制造率( $0 \leq \beta < 1$ ). $D(p)$ ——依赖零售价格的随机需求量. $R(e)$ ——依赖回收努力的随机回收量. $\pi(\cdot)$ 表示利润函数.下标 $r, m, t$ 和 $s$ 分别表示销售商、制造商、第3方和闭环供应链系统的有关变量与参数.上标 $S$ 表示分散系统的Stackelberg对策解, $I$ 表示集成系统的联合最优解.为保证供应链内部一致性,假设 $c_o \leq c_n; \beta R(e) \leq D(p)$ .

本文采用与Emmons<sup>[20]</sup>类似的价格依赖随机需求量,实际需求量可表示为 $X(p, \xi) = \xi D(p)$ ,其中 $D(p)$ 为确定性函数且与零售价格 $p$ 负相关, $\xi$ 是独立于 $p$ 的随机变量,密度函数和分布函数分别为 $f(\xi)$ 和 $F(\xi)$ <sup>[9]</sup>.需求函数有乘法和加法形式,函数的形式不影响结论.随机需求的密度函数可表示为 $f_x(x|p) = \frac{1}{D(p)} f\left(\frac{x}{D(p)}\right) (x \geq 0)$ ,

分布函数 $F_x(x|p) = F\left(\frac{x}{D(p)}\right)$ 且 $\frac{\partial F_x(x|p)}{\partial p} > 0$ .

类似地,假设回收量的期望为 $R(e)$ ,则实际回收量可表示为 $Y(e, \varepsilon) = \varepsilon R(e)$ ,均值 $\mu_y = \mu_\varepsilon R(e)$ .其中 $\varepsilon$ 是独立于 $e$ 的随机变量,密度函数和分布函数分别为 $g(\varepsilon)$ 和 $G(\varepsilon)$ .那么随机回收量的密度函数可表示为 $g_y(y|e) = \frac{1}{R(e)} g\left(\frac{y}{R(e)}\right) (y \geq 0)$ ,分

布函数 $G_y(y|e) = G\left(\frac{y}{R(e)}\right)$ 且 $\frac{\partial G_y(y|e)}{\partial e} < 0$ .

进一步,为描述方便,下面对本文建模中使用的子函数进行简要说明.

销售商的期望销售量函数 $S(Q, p)$ ,即

$$\begin{aligned} S(Q, p) &= E[\min(x, Q)] \\ &= \int_0^Q xf(x|p)dx + \int_Q^\infty Qf(x|p)dx \\ &= \int_0^Q xf(x|p)dx + \left[ Q - \int_0^Q Qf(x|p)dx \right] \\ &= \int_0^Q xf(x|p)dx + Q - \left[ \int_0^Q F(x|p)dx + \int_0^Q x dF(x|p) \right] \\ &= Q - \int_0^Q F(x|p)dx \end{aligned} \quad (1)$$

制造商的总制造成本函数 $C_m(Q, y)$ .假设制造商将产品再制造与原始生产过程结合在一起,并尽可能利用回收产品进行再制造以最大限度降低生产成本,即

$$C_m(Q, y) = c_n(Q - \beta y)^+ + c_o \min(Q, \beta y) \quad (2)$$

第3方的总回收成本函数 $C_r(y, e)$ .采取类似文献[8]的函数形式,即

$$C_r(y, e) = e\alpha^2 + ry(e, \varepsilon) \quad (3)$$

第3方与制造商约定的目标奖惩合同中的奖惩函数 $P(y, T)$ ,即

$$P(y, T) = \tau_1(y - T)^+ - \tau_2(T - y)^+ \quad (4)$$

第3方的回收努力为 $e$ 时的努力成本函数 $I(e)$ ,如专用性资金投入及人力资源投入等等.本文采取经典的努力成本函数形式,即

$$I(e) = \frac{ae^2}{2} \quad (5)$$

其中, $a$ 是大于零的常数,表示第3方的努力成本系数<sup>[11, 20-23]</sup>.

## 2 闭环供应链模型

### 2.1 闭环供应链集成系统的联合最优策略

在如图1所示的闭环供应链系统中,由式(1)~(5)可得制造商、销售商和第3方的期望利润函数,如式(6)~(8)所示.

$$E[\pi_m(w, t; Q, T, e)] = E[wQ - C_m(Q, y) - ty(e, \varepsilon) - P(y, T)] \quad (6)$$

$$E[\pi_r(Q, p; w)] = E[pS(Q, p) - wQ + v(Q - x)^+] \quad (7)$$

$$E[\pi_t(T, e; t)] = E[ty(e, \varepsilon) - C_r(y, e) + P(y, T) - I(e)] \quad (8)$$

如果将制造商、销售商和第 3 方视为集成闭环供应链系统,那么批发价格  $w$  和回收价格  $t$  则是系统内部参数,不影响集成系统整体决策. 联立式 (6)、(7) 得集成闭环供应链的预期利润为

$$\begin{aligned}
 E[\pi_s(Q, p, e)] &= pS(Q, p) + v(Q - x)^+ - \\
 &C_m(Q, y) - C_r(y, e) - I(e) \\
 &= (p - c_o)Q - (p - v)D(p) \int_0^{Q/D(p)} F(x) dx - \\
 &(c_n - c_o)\beta R(e) \int_0^{\frac{Q}{\beta R(e)}} G(y) dy - \\
 &e\alpha^2 - r\mu_y - I(e) \tag{9}
 \end{aligned}$$

对于集成系统的决策者而言,其决策目标是选择最优的定货量、零售价格及回收努力使闭环供应链预期利润(式(9))达到最大.

为便于分析,假设  $\xi$  服从  $[0, \bar{\xi}]$  区间内的均匀分布,则  $f(\xi) = 1/\bar{\xi}, F(\xi) = \xi/\bar{\xi}, F^{-1}(\xi) = \xi\bar{\xi}$ . 同时给出需求与价格的函数关系,即  $D(p) = k_p(p - \eta_p)$  (其中,  $k_p$  是需求价格弹性,  $k_p < 0, \eta_p > w \geq v$ ). 类似地,假设  $\varepsilon$  服从  $[0, \bar{\varepsilon}]$  区间内的均匀分布,则  $\mu_\varepsilon = \bar{\varepsilon}/2, g(\varepsilon) = 1/\bar{\varepsilon}, G(\varepsilon) = \varepsilon/\bar{\varepsilon}, G^{-1}(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}\varepsilon$ . 同时给出回收量与回收努力的函数关系,即  $R(e) = k_e(e - \eta_e)$  (其中  $k_e > 0, \eta_e > 0$ ).

**命题 1** 在集成闭环供应链系统中,使供应链整体预期利润达到最大的联合最优策略分别

$$\left\{ \begin{aligned}
 \text{(L): } \max_{w, t} E[\pi_m(w, t; Q, T, e)] &= E[wQ - C_m(Q, y) - ty(e, \varepsilon) - P(y, T)] \tag{10} \\
 \text{s. t. } Q &= \arg \max_{Q, p} E[\pi_r(Q, p; w)] \tag{11} \\
 T &= \arg \max_{T, e} E[\pi_t(T, e; t)] \tag{12} \\
 e &= \arg \max_{T, e} E[\pi_i(T, e; t)] \tag{13} \\
 \text{(F1): } \max_{Q, p} E[\pi_r(Q, p; w)] &= E[pS(Q, p) - wQ + v(Q - x)^+] \tag{14} \\
 \text{(F2): } \max_{T, e} E[\pi_t(T, e; t)] &= E[ty(e, \varepsilon) - C_r(y, e) + P(y, T) - I(e)] \tag{15}
 \end{aligned} \right.$$

在如式 (10) — (15) 所示的一主多从 Stackelberg 对策中,上层主方制造商首先给出初始批发价格  $w$  和回收价格  $t$ ,下层从方销售商和第 3 方同时据此做出最优响应策略(式 (11) — (13)),并反馈给制造商. 制造商通过销售商的最优定货量  $Q^{S^*}$  和第 3 方的最优回收目标  $T^{S^*}$  和最优回收努力  $e^{S^*}$  对其初始决策进行调整,从而制定出最优批发价格  $w^{S^*}$  和最优回收价格  $t^{S^*}$ .

下面将具体求解上述一主多从 Stackelberg 对策.

**命题 2** 对于制造商给定的批发价格  $w$ ,销售商的最优定货量满足

为:最优定货量

$$Q_s^{1*} = \frac{(p - c_o)\bar{\xi}D(p)\bar{\varepsilon}\beta R(e)}{(p - v)\bar{\varepsilon}\beta R(e) + (c_n - c_o)\bar{\xi}D(p)}$$

最优零售价格

$$p_s^{1*} = \eta_p - \sqrt{\frac{Q_s^{1*}(v - \eta_p)}{2\xi k_p}}$$

最优回收努力  $e_s^{1*}$  满足

$$\frac{k_e(c_n - c_o)(Q_s^{1*})^2}{2\bar{\varepsilon}\beta R^2(e_s^{1*})} - \frac{r\bar{\varepsilon}k_e}{2} - \alpha^2 - ae_s^{1*} = 0$$

证明详见附录 A1.

### 2.2 分散系统的一主多从 Stackelberg 对策

在由制造商、销售商和第 3 方组成的多级闭环供应链系统中,理性的决策者都会追求自身利益的最大化,而不考虑整个供应链系统的整体利益. 在如图 1 所示的闭环供应链系统框架中,由于制造商是资源的占有方,并同时与销售商和第 3 方分别签订了批发价格合同和目标奖惩合同,所以首先考虑分散系统中制造商为主方(L),销售商和第 3 方为从方的一主多从 Stackelberg 对策. 其中销售商(F1)和第 3 方(F2)之间采取非合作 Nash 对策,销售商和第 3 方分别根据制造商的最优决策做出最优响应策略,具体模型如下

$$Q^{S^*} = D(p) \cdot F^{-1} \frac{p - w}{p - v}$$

证明详见附录 A2.

如果令  $\rho_Q = \frac{p - w}{p - v}$ , 则

$$Q^{S^*} = D(p)F^{-1}(\rho_Q)$$

代入式(7),整理可得

$$\begin{aligned}
 E[\pi_r(Q^{S^*}, p; w)] &= D(p) \left[ (p - w)F^{-1}(\rho_Q) - \right. \\
 &(p - v) \int_0^{F^{-1}(\rho_Q)} F(x) dx \left. \right] \\
 &= D(p)(p - v) \int_0^{F^{-1}(\rho_Q)} xf(x) dx \tag{16}
 \end{aligned}$$

则由式(16)可得到命题3.

**命题3** 对于制造商给定的批发价格  $w$  和销售商的最优定货量  $Q^{S^*}$ , 销售商的最优零售价格  $p^{S^*}$  满足  $p^{S^*} = \frac{3v + \eta_p + \sqrt{(\eta_p + 8w - 9v)(\eta_p - v)}}{4}$ . 证明详见附录 A3.

联立命题2和命题3, 可得

$$Q^{S^*} = \frac{\bar{\xi}k_p(p^{S^*} - \eta_p)(p^{S^*} - w)}{p^{S^*} - v} \quad (17)$$

$$E[\pi_r(Q^{S^*}, p^{S^*}; w)] = \frac{\bar{\xi}k_p(p^{S^*} - \eta_p)(p^{S^*} - w)^2}{2(p^{S^*} - v)} \quad (18)$$

**命题4** 对于制造商给定的单位废品的回收价格  $t$ , 第3方的最优目标回收量满足

$$T^{S^*} = R(e)G^{-1} \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$$

证明详见附录 A4.

如果令  $\rho_T = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}$ , 则  $T^{S^*} = R(e)G^{-1}(\rho_T)$ . 代入式(8)可得

$$E[\pi_1(T^{S^*}, e; t)] = (t - r + \tau_1)\mu_e R(e) + \tau_1 T^{S^*} - e\alpha^2 - I(e) - R(e)(\tau_1 - \tau_2) \times \int_0^{G^{-1}(\rho_T)} yg(y) dy \quad (19)$$

由式(19)可得到命题5.

**命题5** 对于制造商给定的单位废品的回收价格  $t$ , 第3方的最优回收努力满足

$$e^{S^*} = \frac{(\tau_1 - \tau_2)(\bar{\epsilon}k_e(t - r + \tau_1) - 2\alpha^2) + \bar{\epsilon}k_e\tau_1^2}{2a(\tau_1 - \tau_2)}$$

证明详见附录 A5.

联立命题4和命题5, 有

$$T^{S^*} = \frac{k_e(e^{S^*} - \eta_e)\bar{\epsilon}\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \quad (20)$$

$$E[\pi_1(T^{S^*}, e^{S^*}; t)] = \frac{\bar{\epsilon}R(e^{S^*})(t - r + \tau_1) - 2e^{S^*}\alpha^2 - a(e^{S^*})^2 + \tau_1 T^{S^*}}{2} \quad (21)$$

命题2—命题5给出了销售商与第3方的最优响应策略, 下面求解主方制造商的最优决策, 如命题6所示.

**命题6** 制造商向第3方支付的单位废品最优回收价格  $t^{S^*}$  以及向销售商索取的单位产品批发价格  $w^{S^*}$  分别满足

$$w^{S^*} = p^{S^*} - \frac{\bar{\epsilon}\beta R(e^{S^*})(p^{S^*} - c_o)(p^{S^*} - v)}{2\bar{\epsilon}\beta R(e^{S^*})(p^{S^*} - v) + (c_n - c_o)\bar{\xi}D(p)}$$
$$t^{S^*} = \frac{\bar{\epsilon}k_e^2\tau_1^2 - 2a(\tau_1 - \tau_2)R(e^{S^*})}{\bar{\epsilon}k_e^2(\tau_1 - \tau_2)}$$

证明详见附录 A6.

### 3 联合最优决策与 Stackelberg 对策的比较分析

由于闭环供应链中物流、资金流和信息流的运作涉及到多个决策主体, 其成员间协调与合作是闭环供应链管理有效与否的前提<sup>[24]</sup>. 与传统的前向供应链一样, 闭环供应链管理的核心目标也是实现供应链成员之间的协调与统一. 下面从供应链合同协调的角度比较闭环供应链分散系统的主从对策与集成系统的联合最优决策.

在前向供应链中, 为了实现闭环供应链集成系统中的最优定货量  $Q_s^*$ , 制造商必须提供合适的激励手段来实现协调, 从而使销售商能够按照整个供应链系统的最优决策来订货. 也就是说, 如果制造商通过制定合适的批发价格能够满足  $Q_s^* = Q^{S^*}$ , 即可能实现前向供应链的渠道协调.

由命题1和命题2可知,  $Q^{S^*} = Q_s^*$  等价于  $\frac{(p-w)\bar{\xi}D(p)}{p-v} = \frac{(p-c_o)\bar{\xi}D(p)\bar{\epsilon}\beta R(e)}{(p-v)\bar{\epsilon}\beta R(e) + (c_n - c_o)\bar{\xi}D(p)}$  即批发价格合同中的  $w$  必须满足

$$w = w^0 = p - \frac{(p - c_o)(p - v)\bar{\epsilon}\beta R(e)}{(p - v)\bar{\epsilon}\beta R(e) + (c_n - c_o)\bar{\xi}D(p)}$$

而由命题5可知,  $w^{S^*} > w^0$ , 即

$$E[\pi_m(Q^{S^*}, w^{S^*})] > E[\pi_m(Q^*, w^0)]$$

也就是说, 只有当制造商以牺牲自己利润为代价, 制定较低的批发价格 ( $w = w^0$ ), 才有可能实现协调, 显然理性的制造商是不愿意放弃自身利益的. 另外, 由于第3方与销售商之间的非合作关系 (即第3方不会牺牲自身收益来增加销售商的收益), 当理性的第3方采取如命题5的最优回收努力  $e^{S^*}$  时, 可以发现  $Q_s^{S^*} > Q^{S^*}$ , 即单纯的批发价格合同无法实现制造商与销售商之间的协调.

在逆向供应链中, 制造商与第3方之间签订的是目标奖惩合同. 如果通过制定合适的回收价格和最低回收目标, 能够实现第3方独立决策的最优回收努力  $e^{S^*}$  与集成系统联合决策的最优回收努力

$e^{1*}$  一致,则有可能实现逆向供应链的渠道协调.

由命题 5 可知,对于任意的最低回收目标  $T$ ,

由一阶条件令  $\frac{\partial E[\pi_1(T, e^{S*})]}{\partial e} = 0$  得到,则  $e^{S*}$  满足

$$\frac{(\tau_1 - \tau_2)T^2 k_e}{2\bar{\epsilon}\beta^2 R^2(e^{S*})} - \frac{\bar{\epsilon}k_e}{2}(t - r + \tau_1) + \alpha^2 + ae^{S*} = 0$$

对比命题 1,可以发现  $e^{S*} = e_s^{1*}$ ,等价于

$$\frac{(\tau_1 - \tau_2)T^2 k_e}{2\bar{\epsilon}\beta R^2(e)} - \frac{\bar{\epsilon}k_e}{2}(t + \tau_1) + \frac{(c_n - c_o)Q^2 k_e}{2\bar{\epsilon}\beta^2 R^2(e)} = 0$$

即制造商制定的单位回收价格  $t$  必须满足

$$t = t^0 = \frac{(\tau_1 - \tau_2)T^2 + (c_n - c_o)Q^2}{\bar{\epsilon}^2\beta R^2(e)} - \tau_1$$

同样,由于第 3 方与销售商之间的非合作关系,考虑销售商的最优定货决策  $Q^{S*}$  和第 3 方的最优回收目标  $T^{S*}$ ,当

$$\tau_1 = \frac{(\bar{\epsilon} - 1)\tau_1^2}{\beta(\tau_1 - \tau_2)} + \frac{(c_n - c_o)(Q^{S*})^2}{\bar{\epsilon}\beta R^2(e)} + \frac{2aR(e)}{\bar{\epsilon}k_e^2}$$

时,满足  $t^{S*} = t^0$ ,即  $e^{S*} = e_s^{1*}$ . 此时第 3 方独立决策等于集成系统的最优决策,可以实现逆向渠道的协调.

通过上述分析,可以得出如下结论:

在传统的前向供应链中,制造商与销售商之间的批发价格合同不能有效实现渠道协调,集成系统的联合最优定货量  $Q^{1*}$  大于分散系统主从对策的最优定货量  $Q^{S*}$ ;在逆向供应链中,制造商与第 3 方之间的目标奖惩合同在一定条件下能够实现渠道协调.

### 4 数值算例与分析

近年来,在加快发展钢铁可持续发展的战略思想指导下,上海宝钢国际按照“资源充足、交通便利、经营环境好”的原则,先后在台州、嘉善、宁波建立了三个集收购、分选、加工、配送等功能于一体的废钢基地,以期从源头掌控资源,确保废钢供应安全、低成本,确保服务优质,为钢铁主业提供支撑.

本文结合上海宝钢废钢供应链的运作实例进行了仿真设计和分析. 首先将宝钢公司的核心零售商视为整体销售单元,并将其所有废钢基地视为统一的第 3 方逆向物流提供商,构建由宝钢(制造商)、销售商和第 3 方组成的闭环供应链系统. 根据废钢回收的相关资料,对废钢供应链系统参

数进行如下设置:废钢总回收率  $\alpha = 15\%$ ,用新原料制造的单位生产成本  $c_n = 3.0 \times 10^3$  元/t,用回收废钢制造的单位生产成本  $c_o = 1.2 \times 10^3$  元/t;废钢再制造率  $\beta = 90\%$ ;未售产品的单位残值  $v = 3.2 \times 10^3$  元/t;第 3 方的单位回收、处理成本  $r = 0.8 \times 10^3$  元/t;奖惩合同规定的单位奖励/惩罚因子分别为  $\tau_1 = 0.6 \times 10^3$  元/t,  $\tau_2 = 0.5 \times 10^3$  元/t;第 3 方的回收努力函数  $I(e) = e^2$ ;依赖零售价格的期望需求量  $D(p) = -1.185 \times (p - 7500)$  kt;依赖回收努力的期望回收量  $R(e) = 0.85(e - 100)$  kt. 另外假设需求量和回收量的随机扰动因子  $\xi$  和  $\epsilon$  均服从  $[0, 2]$  的均匀分布.

根据命题 2—命题 6,分别计算了上海宝钢为主方,其销售商和第 3 方废钢基地为从方的一主多从 Stackelberg 最优对策,如图 2—图 4 所示. 销售商的最优定货量  $Q^{S*}$  为  $10.19 \times 10^6$  t,最优零售价格  $p^{S*} = 5.85 \times 10^3$  元/t,其最优利润为  $23.75 \times 10^5$  万元;第 3 方的最优回收目标量  $T^{S*}$  为  $4.86 \times 10^6$  t,最优回收努力  $e^{S*}$  为  $0.75 \times 10^3$  元/t,其最优利润为  $21.24 \times 10^5$  万元;制造商的最优批发价格  $w^{S*}$  为  $4.29 \times 10^3$  元/t,最优废钢回收价格  $t^{S*} = 2.35 \times 10^3$  元/t,其最优利润为  $58.15 \times 10^5$  万元. 由图 2 可以看出,在仿真计算中,由于零售价格与需求的负相关性,零售商的预期利润并不是随着定货量的增加或零售价格的增加而单调递增,而是存在一个最优临界点使其预期利润达到最大. 但是,图 3 并不存在这种现象,这是因为回收努力与回收量存在正相关性,所以理性的第 3 方愿意付出更多的回收努力并期望目标回收量足够低,以获得更多的预期利润.

接着,计算了在废钢供应链集成系统中,当批发价格取  $w = w^{S*} = 4.29 \times 10^3$  元/t、回收目标量取  $T = T^{S*} = 4.86 \times 10^6$  t,以及废钢回收价格取  $t = t^{S*} = 2.35 \times 10^3$  元/t 时的联合决策结果. 由计算可知,集成系统的最优零售价格  $p^{1*} = 5.85 \times 10^3$  元/t,最优定货量  $Q^{1*}$  为  $13.50 \times 10^6$  t,最优回收努力  $e^{1*}$  为  $0.87 \times 10^3$  元/t,最优利润为  $117.83 \times 10^5$  万元. 可以看出,在集成闭环供应链系统中,如果根据分散系统的最优决策制订批发价格、回收价格和目标回收量,整个供应链系统的最优利润仍高于分散决策时制造商、销售商和第 3 方的最优利润之和,这是因为制造商和销售商之间的批

发价格合同无法有效实现前向供应链渠道的协调,从而导致整个闭环供应链系统利润的降低.这也验证了第 4 章理论分析的结论.

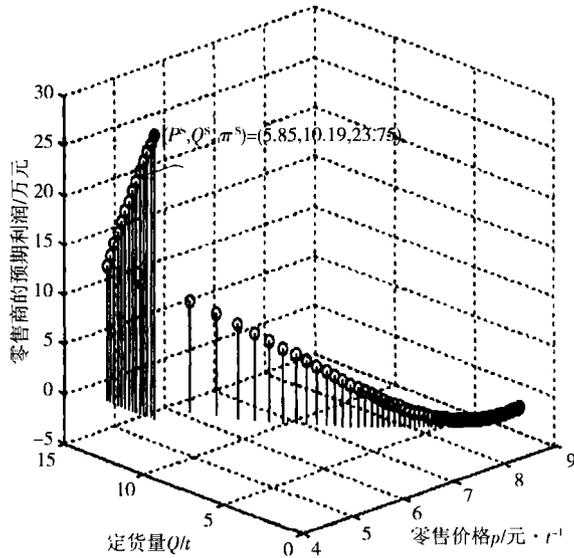


图 2 一主多从对策中零售商的最优响应策略

Fig. 2 Optimal response of the retailer in Stackelberg game

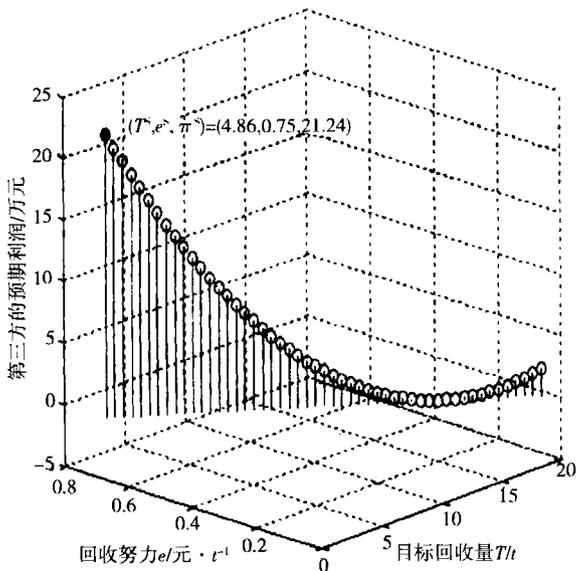


图 3 一主多从对策中第 3 方的最优响应策略

Fig. 3 Optimal response of the 3PRLP in Stackelberg game

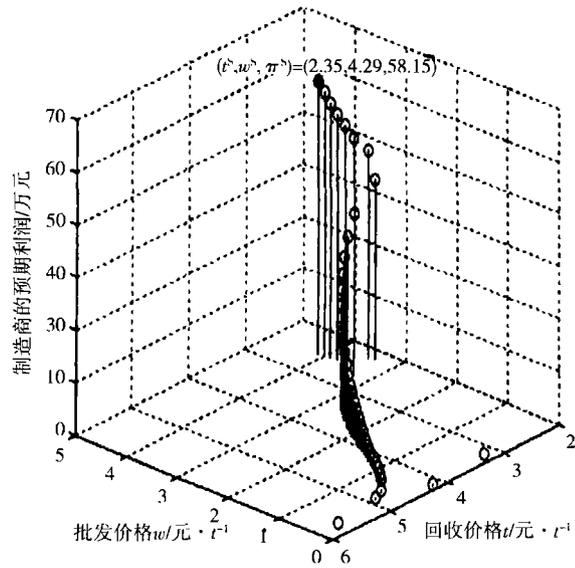


图 4 一主多从对策中制造商的最优策略

Fig. 4 Optimal strategies of the manufacturer in Stackelberg game

### 5 结 论

本文结合钢铁企业废钢回收的实际运作情况,在价格敏感的随机需求量与回收努力敏感的随机回收量条件下,建立了基于第 3 方逆向物流服务提供商(3PRLP)的多级闭环供应链模型,设计了制造商与第 3 方之间的目标奖惩合同,并讨论了分散闭环供应链系统中制造商为主方、销售商和第 3 方为从方的一主多从 Stackelberg 对策和集成闭环供应链的联合优化策略.最后结合上海宝钢公司废钢供应链的实际运作情况进行了仿真计算与分析.基于废钢回收的闭环供应链系统具有高度的复杂性和不确定性,本文只是从供应链系统的角度进行了初步探索,如何综合考虑闭环供应链系统中供应、制造、分销、再制造及再分销的不确定性是未来的研究方向.

### 参 考 文 献:

[1] Guide V D R, Harrison T P, Wassenhove L N V. The challenge of closed-loop supply chain[J]. Interface, 2003, 33(6): 3—6.

[2] Guide V D R, Wassenhove L N V. Closed-loop chains: Practice and potential[J]. Interface, 2003, 33(6): 1—2.

[3] Flapper S D P, Nunen J A E E, Wassenhove L N V. Managing Closed-Loop Supply Chains[M]. Berlin: Springer Verlag,

- 2004.
- [4] Fleischmann R D M, Inderfurth K, Wassenhove L N V. Reverse Logistics: Quantitative Models for Closed-Loop Supply Chains[M]. Berlin: Springer Verlag, 2004.
- [5] Nunen J A E E V, Zuidwijk R O. E-enabled closed-loop supply chains[J]. California Management Review, 2004, 46(2): 40—54.
- [6] 中华人民共和国国民经济和社会发展第十一个五年规划纲要[M]. 北京: 人民出版社, 2006.  
The 11th Five-Year Plan for National Economic and Social Development of China[M]. Beijing: People Press, 2006. (in Chinese)
- [7] 尹敬玉. 2004 年废钢铁市场分析及 2005 年废钢铁市场形势[J]. 中国废钢铁, 2005, (3): 17—20.  
Yin Jing-yu. Iron and scrap steel marketing analysis in 2004 and future state in 2005[J]. Iron & Scrap Steel of China, 2005, (3): 17—20. (in Chinese)
- [8] Nunen J A E E, Zuidwijk R O. E-enabled closed-loop supply chains[J]. California Management Review, 2004, 46(2): 40—54.
- [9] Savaskan R C, Van Wassenhove. Strategic Decentralization of Reverse Channels and Price Discrimination Through Buyback Payments[R]. Math Center Working Paper Series. Kellogg School of Management, Northwestern University, Evanston, IL, 2000.
- [10] Groenevelt H, Majumder P. Competition in remanufacturing[J]. Production and Operations Management, 2001, 10(2): 125—141.
- [11] Savaskan R C, Bhattacharya S, Wassenhove L N V. Closed-loop supply chain models with product remanufacturing[J]. Management Science, 2004, 50(2): 239—252.
- [12] Savaskan R C, Wassenhove V L N. Reverse channel design: The case of competing retailers[J]. Management Science, 2006, 52(1): 1—14.
- [13] Prahinska C, Kocabasoglu C. Empirical research opportunities in reverse supply chains[J]. Omega, 2006, 34(6): 519—532.
- [14] Dobos I. Optimal production-inventory strategies for a HMMS-type reverse logistics systems[J]. International Journal of Production Economics, 2003, 81—82(1): 351—360.
- [15] Toktay L B, Wein L M, Zenios S A. Inventory management of remanufacturable products[J]. Management Science, 2000, 46(11): 1412—1426.
- [16] Lann E V D. An NPV and AC analysis of a stochastic inventory system with joint manufacturing and remanufacturing[J]. International Journal of Production Economics, 2003, 81—82(1): 317—331.
- [17] 丁利军, 夏国平, 葛 健. 两次生产和订货模式下的供应链契约式协调[J]. 管理科学学报, 2004, 7(4): 24—32.  
Ding Li-jun, Xia Guo-ping, Ge Jian. Supply chain coordination with contracts under twice producing and ordering mode [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(4): 24—32. (in Chinese)
- [18] 达庆利, 黄祖庆, 张 钦. 逆向物流系统结构研究的现状及展望[J]. 中国管理科学, 2004, 12(1): 131—138.  
Da Qing-li, Huang Zu-qing, Zhang Qin. Current and future studies on structure of the reverse logistics system: A review [J]. Chinese Journal of Management Science, 2004, 12(1): 131—138. (in Chinese)
- [19] 孙林岩, 王 蓓. 逆向物流的研究现状和发展趋势[J]. 中国机械工程, 2005, 16(10): 928—934.  
Sun Lin-yan, Wang Bei. State-of-the-art in reverse logistics researches[J]. China Mechanism Engineering, 2005, 16(10): 928—934. (in Chinese)
- [20] Emmons H, Gilbert S M. Note the role of returns policies in pricing and inventory decisions for catalogue goods[J]. Management Science, 1998, 44(2): 276—283.
- [21] Taylor T A. Supply chain coordination under channel rebates with sales effort effects[J]. Management Science, 2002, 48(8): 992—1007.

- [22] Krishnan H, Kapuscinski R, Butz D. Coordinating contracts for decentralized supply chains with retailer promotional effort [J]. *Management Science*, 2004, 50(1): 48—63.
- [23] 黄小原. 供应链模型与优化[M]. 北京: 科学出版社, 2004.  
Huang Xiao-yuan. *Supply Chain Models and Optimization*[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [24] 王迎军. 顾客需求驱动的供应链契约问题综述[J]. *管理科学学报*, 2001, 5(3): 68—76.  
Wang Ying-jun. Overview of supply chain contract problems driven by customer demand[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2005, 8(2): 68—76. (in Chinese)

## Models of closed-loop supply chain with third-party reverse logistics and their applications

YAN Ni-na<sup>1,2</sup>, HUANG Xiao-yuan<sup>3</sup>

1. Business School, Renmin University, Beijing 100027, China;
2. Development & Research Institute, Shougang Iron & Steel Co., Beijing 100041, China;
3. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China

**Abstract:** Assuming price-sensitive stochastic demands and effort-sensitive stochastic returns, a multi-echelon closed-loop supply chain with 3PRLP is established. A target rebate-punish contract between the manufacturer and the 3PRLP is designed. The closed-form analytic expressions for both united optimization strategies in centralized closed-loop system and the one-leader-multiple-follower Stackelberg strategies in decentralized system are deduced, and comparisons are made from the viewpoint of contract coordination. Finally, according to the practice of Baosteel Companies, some simulation experiments are carried out to gain an insight into the impacts of reverse logistics activities on the practitioners operations and decisions.

**Key words:** closed-loop supply chain; third-party reverse logistics; Stackelberg games; scraps recycling; coordination

### 附录:

#### A1 命题1的证明

- ① 由式(9)可得,  $\frac{\partial E[\pi_s(Q_s, p, e)]}{\partial Q_s} = (p - c_o) - (p - v)F\left[\frac{Q_s}{D(p)}\right] - (c_n - c_o)G\left[\frac{Q_s}{\beta R(e)}\right]$ . 由一阶条件, 令  $\frac{\partial E[\pi_s(Q_s^*, p, e)]}{\partial Q_s} = 0$ , 得最优订货量  $Q_s^* = \frac{(p - c_o)\xi D(p)\bar{\varepsilon}\beta R(e)}{(p - v)\bar{\varepsilon}\beta R(e) + (c_n - c_o)\xi D(p)}$ .
- ② 由式(9)可得,  $\frac{\partial E[\pi_s(Q, p_s, e)]}{\partial p_s} = Q - \frac{Q^2(v - \eta_p)}{2\xi k_p(p_s - \eta_p)^2}$ . 由一阶条件, 令  $\frac{\partial E[\pi_s(Q, p_s^*, e)]}{\partial p_s} = 0$ , 得最优零售价格  $p_s^* = \eta_p - \sqrt{\frac{Q(v - \eta_p)}{2\xi k_p}}$ .
- ③ 由式(9)可得,  $\frac{\partial E[\pi_s(Q, p, e_s)]}{\partial e_s} = \frac{(c_n - c_o)Q^2 k_e}{2\bar{\varepsilon}\beta R^2(e_s)} - \frac{r\bar{\varepsilon}k_e}{2} - \alpha^2 - ae_s$ . 由一阶条件, 令  $\frac{\partial E[\pi_s(Q, p, e_s^*)]}{\partial e_s} = 0$ , 则最优回收努力  $e_s^{1*}$  满足  $\frac{(c_n - c_o)Q^2 k_e}{2\bar{\varepsilon}\beta R^2(e_s^{1*})} - \frac{r\bar{\varepsilon}k_e}{2} - \alpha^2 - ae_s^{1*} = 0$ . 证毕.

**A2 命题 2 的证明**

由式(7)可知,销售商的期望利润为

$$E[\pi_r(Q, p, w)] = (p - w)D(p) - (p - w) \int_{Q, D(p)}^{\infty} [xD(p) - Q]f(x) dx - (w - v) \int_0^{Q/D(p)} [Q - xD(p)]f(x) dx \quad (A1)$$

由  $\frac{\partial S(Q, p)}{\partial Q} = 1 - F_x(Q | p)$  可得

$$\frac{\partial E[\pi_r(Q^{S^*}, p; w)]}{\partial Q} = (p - v)[1 - F_x(Q | p)] - (w - v), \frac{\partial E^2[\pi_r(Q^{S^*}, p; w)]}{\partial Q^2} = -(p - v) \frac{\partial F_x(Q | p)}{\partial Q} < 0$$

所以,期望利润函数  $E[\pi_r(Q, p, w)]$  是关于  $Q^S$  的凹函数.

令  $\frac{\partial E[\pi_r(Q^{S^*}, p, w)]}{\partial Q} = 0$ , 可得  $F_x(Q^{S^*} | p) = \frac{p - w}{p - v}$ , 即存在唯一最优解  $Q^{S^*} = D(p) \cdot F^{-1}\left(\frac{p - w}{p - v}\right)$ .

**A3 命题 3 的证明**

由式(A2)可得

$$E[\pi_r(Q^{S^*}, p; w)] = \frac{\bar{\xi}D(p)(p - w)^2}{2(p - v)} = \frac{\bar{\xi}k_p(p - \eta_p)(p - w)^2}{2(p - v)}$$

$$\frac{\partial E[\pi_r(Q^{S^*}, p^{S^*}; w)]}{\partial p} = \frac{\bar{\xi}k_p}{2} \left[ \frac{(p - v)(p - w)(3p - w - 2\eta_p) - (p - w)^2(p - \eta_p)}{(p - v)^2} \right]$$

$$\frac{\partial E^2[\pi_r(Q^{S^*}, p^{S^*}; w)]}{\partial p^2} = \bar{\xi}k_p \left\{ \frac{(p - v)(p - w)[(\eta_p - p) + (w - v) + (\eta_p - v)] + (p - \eta_p)[(p - w)^2 - (p - v)^2]}{(p - v)^3} \right\}$$

由  $k_p < 0$  且  $\eta_p > p > w \geq v$  可得,  $\frac{\partial E^2[\pi_r(Q^{S^*}, p^{S^*}; w)]}{\partial p^2} < 0$ . 所以,期望利润函数  $E[\pi_r(Q^{S^*}, p^{S^*}; w)]$  是关于  $p^S$  的凹函数.

令  $\frac{\partial E[\pi_r(Q^{S^*}, p^{S^*}; w)]}{\partial p} = 0$  易得销售商的惟一最优零售价格  $p^{S^*}$  如命题 3 所示. 证毕.

**A4 命题 4 的证明**

由式(8)可知,第 3 方的期望利润为

$$E[\pi_t(T, e; t)] = (t - r + \tau_1)\mu_y + \tau_1 T - e\alpha^2 - I(e) - (\tau_1 - \tau_2)R(e) \int_0^{T/R(e)} G(y) dy \quad (A3)$$

由式(A3)可得,  $\frac{\partial E[\pi_t(T^{S^*}, e; t)]}{\partial T} = \tau_1 - (\tau_1 - \tau_2)G\left(\frac{T}{R(e)}\right)$ , 因为  $\tau_1 > \tau_2$ , 所以  $\frac{\partial E^2[\pi_t(T^{S^*}, e; t)]}{\partial T^2} = -\frac{(\tau_1 - \tau_2)}{\varepsilon R(e)} < 0$ ,

即期望利润函数  $E[\pi_t(T^{S^*}, e; t)]$  是关于  $T^S$  的凹函数.

令  $\frac{\partial E[\pi_t(T^{S^*}, e; t)]}{\partial T} = 0$ , 可得第 3 方的惟一最优  $T^{S^*} = R(e)G^{-1}\left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\right)$ . 证毕.

**A5 命题 5 的证明**

由式(19)可得

$$E[\pi_t(T^{S^*}, e; t)] = (t - r + \tau_1)\mu_e R(e) + \frac{\bar{\varepsilon}R(e)\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} - e\alpha^2 - I(e) - R(e)(\tau_1 - \tau_2) \int_0^{G^{-1}(\rho_T)} yg(y) dy$$

$$= \frac{\bar{\varepsilon}K_e(e - \eta_e)(t - r + \tau_1)}{2} - e\alpha^2 - \frac{ae^2}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}k_e(e - \eta_e)\tau_1^2}{2(\tau_1 - \tau_2)}$$

$$\frac{\partial E[\pi_t(T^{S^*}, e^{S^*}; t)]}{\partial e} = \frac{\bar{\varepsilon}K_e(t - r + \tau_1)}{2} - \alpha^2 - ae + \frac{\bar{\varepsilon}k_e\tau_1^2}{2(\tau_1 - \tau_2)}$$

$$\frac{\partial E^2[\pi_t(T^{S^*}, e^{S^*}; t)]}{\partial e^2} = -a < 0$$

所以,期望利润函数  $E[\pi_1(T^{s^*}, e^{s^*}; t)]$  是关于  $e^s$  的凹函数.

$$\frac{\partial E[\pi_1(T^{s^*}, e^{s^*}; t)]}{\partial e} = 0, \text{ 易得第3方的惟一最优回收努力 } e^{s^*} = \frac{(\tau_1 - \tau_2)(\bar{\varepsilon}k_e(t - r + \tau_1) - 2\alpha^2) + \bar{\varepsilon}k_e\tau_1^2}{2a(\tau_1 - \tau_2)}.$$

证毕.

**A6 命题6的证明**

由式(6)可得制造商的期望利润为

$$E[\pi_m(w, t; Q, T, e)] = wQ - [c_n(Q - \beta y)^+ + c_o \min(Q, \beta y)] - (t + \tau_1)\mu_y - \tau_1 T + (\tau_1 - \tau_2)(T - Y)^+ \quad (A4)$$

将销售商和第3方的最优响应策略  $Q^{s^*}, T^{s^*}, e^{s^*}$  (命题2—5)代入式(A4),则制造商的期望利润为

$$\begin{aligned} E[\pi_m(w, t; Q^{s^*}, T^{s^*}, e^{s^*})] &= (w - c_o)Q^{s^*} - (c_n - c_o)\beta R(e^{s^*}) \int_0^{Q^{s^*}/\beta R(e^{s^*})} G(y) dy - (t + \tau_1)R(e^{s^*})\mu_e - \\ &\quad \tau_1 T^{s^*} + (\tau_1 - \tau_2)R(e^{s^*}) \int_0^{T^{s^*}/\beta R(e^{s^*})} G(y) dy \\ &= \frac{(w - c_o)D(p)\bar{\xi}(p^{s^*} - w)}{(p - v)} - \frac{(c_n - c_o)R(e^{s^*})\bar{\xi}^2(p - w)^2}{2\bar{\varepsilon}^2\beta(p - v)^2} - \frac{(t + \tau_1)\bar{\varepsilon}R(e^{s^*})}{2} - \\ &\quad \tau_1 T^{s^*} + \frac{\bar{\varepsilon}(\tau_1^2 R(e^{s^*}))}{2(\tau_1 - \tau_2)} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \frac{\partial E[\pi_m(w, t; Q^{s^*}, T^{s^*}, e^{s^*})]}{\partial w} = \left[ w - c_o - \frac{(c_n - c_o)Q^{s^*}}{\bar{\varepsilon}\beta R(e^{s^*})} \right] \cdot \frac{dQ^{s^*}}{dw} + Q^{s^*}$$

而  $\frac{dQ^{s^*}}{dw} = -\frac{\bar{\xi}D(p)}{p - v}$ , 将其代入上式,由一阶条件令  $\frac{\partial E[\pi_m(w^{s^*}, t; Q^{s^*}, T^{s^*}, e^{s^*})]}{\partial w} = 0$  即得.

$$\textcircled{2} \frac{\partial E[\pi_m(w, t; Q^{s^*}, T^{s^*}, e^{s^*})]}{\partial t} = -\frac{\bar{\varepsilon}R(e^{s^*})}{2} - \frac{t\bar{\varepsilon}}{2} \frac{\partial R(e^{s^*})}{\partial t} - \tau_1 \frac{\partial T^{s^*}}{\partial t} + \frac{\bar{\varepsilon}\tau_1^2}{2(\tau_1 - \tau_2)} \frac{\partial R(e^{s^*})}{\partial t}$$

因为  $\frac{\partial T^{s^*}}{\partial t} = \frac{k_e \bar{\varepsilon} \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{de^{s^*}}{dt}$ ,  $\frac{\partial R(e^{s^*})}{\partial t} = k_e \cdot \frac{de^{s^*}}{dt}$ , 又  $\frac{de^{s^*}}{dt} = \frac{\bar{\varepsilon}k_e}{2a}$ , 所以令  $\frac{\partial E[\pi_m(w, t; Q^{s^*}, T^{s^*}, e^{s^*})]}{\partial t} = 0$  可得,

$$t^{s^*} = \frac{\bar{\varepsilon}k_e^2\tau_1^2 - 2a(\tau_1 - \tau_2)R(e^{s^*})}{\bar{\varepsilon}k_e^2(\tau_1 - \tau_2)}.$$

证毕.