

# 线性库存管理策略下供应链中需求传播过程<sup>①</sup>

刘开军, 张子刚, 周永红  
(华中科技大学管理学院, 武汉 430074)

**摘要:** 将库存管理策略划分为线性和非线性两大类, 研究了在线性库存管理策略(简称 LIMP 策略)下, 需求在供应链中的传播过程. 提出了 LIMP 策略的概念, 给出了其可行性条件, 列举了 3 种常用的 LIMP 策略. 假设市场需求服从自回归滑动平均 (ARMA) 时间序列, 供应链在 LIMP 策略下运作, 证明了各级企业的需求将也是 ARMA 序列, 但结构不同. 然后分析了 LIMP 策略与牛鞭效应的关系, 为设计供应链环境下的最优库存管理策略提供了指导. 最后用数值实验模拟了 3 种 LIMP 策略下 AR(2) 需求的传播过程, 并进行了比较.

**关键词:** 线性库存管理策略; 供应链管理; 需求传播; 牛鞭效应

**中图分类号:** F4      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1007-9807(2008)04-0094-10

## 0 引言

供应链是由若干相互连接的企业组成的动态联盟, 物流、信息流和资金流是供应链管理的核心, 其中又以物流和需求信息流的管理为重点. 供应链中的物流是指产品(或称订货)从原料供应商, 经中间生产商, 最后到达零售商的传递过程, 而需求信息流的流向则与之相反, 它从零售商逆向逐级传播到供应商<sup>[1]</sup>. 需求和订货密切相关, 可以把订货看作是需求经过库存管理策略的变换得到的输出. 在供应链中, 下游企业的订货就是上游企业的需求, 需求的逐级传播推动着供应链的运作.

在需求不确定的环境中, 需求的波动在经过库存管理策略的变换后, 通常会发生改变, 上游需求的方差可能大于下游需求的方差, 这种需求方差逐渐放大的现象被称为牛鞭效应 (Bullwhip Effect)<sup>[2]</sup>. 牛鞭效应说明需求的传播过程并不是直线、平稳的, 需求在传播过程可能会被扭曲. 自 Lee 等<sup>[2]</sup>开始用定量方法研究牛鞭效应以来, 先后出现了许多分析牛鞭效应和信息共享的论文,

研究者从不同的假设条件出发, 采用不同的方法, 得出了很多不同甚至截然相反的结论. Lee 等<sup>[3]</sup>和 Raghunathan<sup>[4]</sup>假设需求服从一阶自回归 AR(1) 时间序列, 采用订货到目标库存 (Order-up-to) 的策略; Cachon 和 Fisher<sup>[5]</sup>假设各期需求独立同分布, 库存管理策略为 (R, nQ) 策略; Gavirmeni 等<sup>[6]</sup>假设各期需求独立同分布, 库存管理策略为 (s, S) 策略. 这些论文都肯定了供应链中存在牛鞭效应, 认为共享需求信息有一定价值, 但也有学者认为在供应链中共享需求信息没有价值, 例如 Graves<sup>[7]</sup>假设需求服从自回归求和滑动平均 ARIMA(0, 1, 1) 时间序列, 零售商采用 Order-up-to 策略管理库存, 由此推出供应商可以根据订货量无偏估计出需求量, 没有必要让供应商知道下游的需求信息.

上面的模型在分析供应链中需求传播过程时, 都选择了特定的需求假设和库存管理策略, 得到的结论只适用于特定的情况, 缺乏一般性, 从而导致各模型的结论不一致. 解决各模型分歧的方法之一是采用更一般的需求假设和库存管理策略

① 收稿日期: 2006-04-10; 修订日期: 2007-08-20.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471042).

作者简介: 刘开军(1979—), 男, 湖北襄樊人, 博士生. Email: kaijun.liu@smail.hust.edu.cn

假设,构造适用性更好的模型,这也有利于模型结论的推广.

在库存管理研究领域有更一般的需求假设,为本文提供了参考. Alwan 等<sup>[8]</sup>研究了需求服从 AR(1)和 ARMA(1, 1)时的订货过程; Zhang<sup>[9]</sup>和 Gaur 等<sup>[10]</sup>在分析需求传播时,假设需求服从一般的自回归滑动平均 ARMA(p, q) 时间序列; Gilbert<sup>[11]</sup>研究了需求服从一般的 ARIMA(p, d, q) 时间序列时,供应链中需求的传播过程; Aviv<sup>[12-14]</sup>在研究库存系统时,建立了一个线性状态空间需求模型,可以涵盖目前所有类型的需求假设.

另一方面,对库存管理策略则缺乏更一般的假设,大部分文献(如[3]、[8]~[11]、[15]~[18])都使用 Order-up-to 策略,也有部份文献使用(s, S)策略<sup>[6, 19]</sup>、(R, nQ)策略<sup>[5]</sup>、(R, S)策略<sup>[20]</sup>等. Chandra 和 Grabis<sup>[21]</sup>在分析牛鞭效应时提出了基于 MRP 的库存管理策略,可以认为它是 Order-up-to 策略的改进. 在使用最广泛的 Order-up-to 策略中,需要预测提前期内的总需求量,不同的预测方法和 Order-up-to 策略结合,可以生成不同的 Order-up-to 策略变体. 多数文献(如[3]、[9]、[11]、[22]等)使用最小均方差(MMSE)方法预测, Aviv<sup>[14]</sup>使用 Kalman 过滤法进行预测, Chen 等<sup>[23]</sup>使用两种简化过的预测方法:简单滑动平均(SMA)法和指数权重滑动平均(EWMA)法. Chandra 和 Grabis<sup>[21]</sup>则提出了 5 种不同的预测方法,由此得到 5 种不同的订货函数. 考虑到预测方法的多样性, Order-up-to 策略在使用时也会有多种形式. 所以总的来看,库存管理策略的类型也很多,需要有更一般的方法来统一.

本文将把库存管理策略分成两大类,即线性库存管理策略(linear inventory management policy, 简称 LIMP)和非线性库存管理策略(nonlinear inventory management policy, 简称 NIMP). 本文将给出 LIMP 策略的定义和可行性条件,并表明包括 Order-up-to 策略在内的多种库存管理策略都是 LIMP 策略.

本文将扩展 Alwan 等<sup>[8]</sup>、Zhang<sup>[9]</sup>、Gaur 等<sup>[10]</sup>和 Gilbert<sup>[11]</sup>的研究,他们的模型都假设供应链在 Order-up-to 策略下运作,而本文将把库存管理策略推广到一般的 LIMP 策略. 将表明,如果供应链

中各级企业都使用 LIMP 策略管理库存,且市场需求为平稳的 ARMA 序列,则所有的上游需求都将是平稳的 ARMA 序列,并且它们具有相同的自回归结构. 本文给出了 LIMP 策略下, ARMA 需求变换的算法.

本文还分析了 LIMP 策略与牛鞭效应的关系,给出了能够造成和避免牛鞭效应的 LIMP 策略的特征. 为度量供应链中的牛鞭效应,我们提出了需求扭曲度的概念. 对一般的 LIMP 策略,需求扭曲度没有上限,但有一个下限. 我们给出了需求服从 AR(1)序列时,一类 LIMP 策略造成的需求扭曲度的下限. 这些结果为构造供应链环境下的最优库存管理策略提供了指导.

## 1 需求假设

考虑两阶段供应链,由 1 个供应商和 1 个零售商组成. 在每个库存周期  $t$ , 零售商先用现有的库存满足顾客的需求  $d_t$ , 然后在周末从供应商处订货  $q_t$ . 假设时间水平是无限的,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 各期的需求服从自回归滑动平均 ARMA(p, q) 时间序列, 即

$$d_t = \mu + \phi_1 d_{t-1} + \phi_2 d_{t-2} + \dots + \phi_p d_{t-p} + a_t - \psi_1 a_{t-1} - \dots - \psi_q a_{t-q} \quad (1)$$

其中,  $\mu$  为常数,  $\{a_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  是纯白噪声序列, 其  $E(a_t) = 0, Var(a_t) = \sigma^2$ . 零售商知道式(1)中的所有参数.

记  $B$  为后退算子, 即对时间序列, 有  $Bd_t = d_{t-1}, Ba_t = a_{t-1}, Bq_t = q_{t-1}$ ; 对任意常数  $\lambda$ , 有  $B\lambda = \lambda$ . 使用算子函数, 可以将式(1) 写为

$$\phi(B)d_t = \mu + \psi(B)a_t \quad (2)$$

其中:  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ ;

$$\psi(B) = 1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots - \psi_q B^q.$$

只考虑平稳的需求序列, 即要求方程  $\phi(x) = 0$  的根都在单位圆内. 记需求序列的期望为

$$\bar{d} = E[d_t] = \frac{\mu}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$$

现有文献的大部分需求假设可以看成是 ARMA 需求模型或其特例, 例如独立同分布的需求序列(如 Cachon 和 Fisher<sup>[5]</sup>、Gavirneni 等<sup>[6]</sup>)是 ARMA(0, 0) 序列, AR(1) 需求序列(如 Lee 等<sup>[3]</sup>、Raghuathan<sup>[4]</sup>)是 ARMA(1, 0) 序列. 对

于非平稳的需求序列,例如有季节性波动的需求,通常是在多阶差分后转化成平稳的 ARIMA 模型来描述.处理 ARIMA 模型的方法与 ARMA 模型并没有本质区别,可以方便地从 ARMA 模型推广到 ARIMA 模型<sup>[24]</sup>,本文的结论可以在修改后应用于 ARIMA 的情形.

## 2 线性库存管理策略

在需求周期  $t$  发出订货  $q_t$  之前,零售商已经观察到的信息包括:已经发生的需求序列  $D_t = [d_t, d_{t-1}, \dots]$ , 以及已经发生的噪声序列  $A_t = [a_t, a_{t-1}, \dots]$ . 如果零售商的订货量  $q_t$  是  $D_t$  和  $A_t$  的有限线性函数,即

$$q_t = \eta + k_1 d_t + k_2 d_{t-1} + \dots + k_m d_{t-m+1} + c_1 a_t + c_2 a_{t-1} + \dots + c_n a_{t-n+1} \quad (3)$$

其中,  $k_m \neq 0, c_n \neq 0, m \geq 0, n \geq 0$ , 则称零售商使用的库存管理策略为线性库存管理策略 (linear inventory management policy, 简称 LIMP 策略). 如果在式(3)中,  $D_t$  序列中只使用了前  $m$  项,  $A_t$  序列中只使用了前  $n$  项, 则将该线性库存管理策略记为  $LIMP(m, n)$ .

使用后退算子函数, 可以将式(3)写成

$$q_t = \eta + k(B)d_t + c(B)a_t \quad (4)$$

其中:  $k(B) = k_1 + k_2 B + \dots + k_m B^{m-1}$ ;  
 $c(B) = c_1 + c_2 B + \dots + c_n B^{n-1}$ .

### 2.1 LIMP 策略的可行性条件

本文认为在实际系统被使用的库存策略形式多种多样, 不仅有理论上的最优策略, 也有很多非最优的策略. 非最优的策略被采用, 主要原因是最优化模型简化了实际系统, 或者说最优化模型是对实际系统的近似, 因此实际的库存策略就可能偏离理论上的最优解. 本文不限于讨论理论上的最优策略, 而是讨论所有可行的策略, 将尽可能多的库存策略都包括进来. 在可行策略集合中分析需求传播过程, 所得的结果有更广泛的适用范围.

一个库存管理策略要可能被使用, 必须满足基本的要求: 至少从长期来看, 总订货量应该与总需求量相持平, 或者说平均每期的总订货量和总需求量之差趋于零, 即对  $\forall t$ , 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{\sum_{i=t}^T q_i - \sum_{i=t}^T d_i}{T-t} \right] = 0 \quad (5)$$

把式(5)称为库存管理策略的可行性条件, 满足可行性条件的库存管理策略称为可行库存管理策略. 可行性条件式(5)不仅适用于 LIMP 策略, 也适用于 NIMP 策略. 本文只考虑可行的 LIMP 策略.

**定理 1**  $LIMP(m, n)$  策略的可行性条件为

$$\sum_{i=1}^m k_i = 1 - \frac{\eta}{d}$$

证明 对  $\forall t$ , 由式(3)可知

$$\begin{aligned} q_t &= \eta + k(B)d_t + c(B)a_t \\ q_{t+1} &= \eta + k(B)d_{t+1} + c(B)a_{t+1} \\ &\dots\dots \\ q_T &= \eta + k(B)d_T + c(B)a_T \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{i=t}^T q_i &= (T-t)\eta + k(B) \sum_{i=t}^T d_i + c(B) \sum_{i=t}^T a_i \\ \frac{\sum_{i=t}^T q_i - \sum_{i=t}^T d_i}{T-t} &= \eta + [k(B) - 1] \frac{\sum_{i=t}^T d_i}{T-t} + c(B) \frac{\sum_{i=t}^T a_i}{T-t} \end{aligned}$$

故库存管理策略的可行性条件转化为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{\sum_{i=t}^T q_i - \sum_{i=t}^T d_i}{T-t} \right] = \eta + [k(B) - 1]d = 0$$

上式等价于  $k(1) = 1 - \frac{\eta}{d}$ . 证毕.

**推论 1** 若  $LIMP(m, n)$  策略中  $\eta = 0$ , 则其

可行性条件为  $\sum_{i=1}^m k_i = 1$ .

上面的定理表明 LIMP 策略的可行性只与常数项  $\eta$  和系数  $k_i (i = 1, 2, \dots, m)$  有关, 这两项决定了订货量的期望水平. 系数  $c_i (i = 1, 2, \dots, m)$  虽然对 LIMP 策略的可行性没有影响, 但是它是订货量方差的决定因素之一, 影响着订货量的波动水平.

### 2.2 常用的 LIMP 策略

为了说明 LIMP 策略的普遍性, 这里列举 3 种常用的 LIMP 策略.

#### 1) 滑动平均策略

滑动平均策略是将最近  $s$  期需求的平均值作为当期的订货量, 即

$$q_t = (d_t + d_{t-1} + \dots + d_{t-s+1})/s \quad (6)$$

这种策略结构简单,易于使用,但这种库存系统的总成本偏高.由式(6)可知,滑动平均订货策略是 LIMP( $s, 0$ ) 策略.

## 2) Order-up-to 策略

Order-up-to 策略的目的是通过订货将库存维持在一个目标水平,这个目标水平等于订货提前期内总需求的期望加上一个固定的安全库存.每期的订货量由两部分组成,一部分等于当期需求,用来补充当期消耗,另一部分等于最近两期对提前期内总需求的预测之差.记订货提前期为  $L$ ,在  $t$  期订货前对提前期总需求的预测为  $\hat{d}_t^L$ ,则订货函数为

$$q_t = d_t + (\hat{d}_t^L - \hat{d}_{t-1}^L) \quad (7)$$

Lee 等<sup>[3]</sup> 假设需求服从 ARMA(1, 0),将式(7)化为

$$q_t = d_t + \frac{\phi_1(1 - \phi_1^{L+1})}{1 - \phi_1}(d_t - d_{t-1}) \quad (8)$$

显然,这是一个 LIMP(2, 0) 策略. Gaur 等<sup>[10]</sup> 假设需求服从 ARMA( $p, q$ ),将式(7)化为

$$q_t = (1 + \alpha_1)d_t - (\alpha_1 - \alpha_2)d_{t-1} - (\alpha_2 - \alpha_3)d_{t-2} - \dots - (\alpha_{p-1} - \alpha_p)d_{t-p+1} - \alpha_p d_{t-p} \quad (9)$$

其中,系数  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, p)$  由 ARMA( $p, q$ ) 序列中的系数决定,此时的 Order-up-to 策略是 LIMP( $p + 1, 0$ ) 策略.

Graves<sup>[7]</sup> 考虑 ARIMA(0, 1, 1) 需求序列,将式(7)化为

$$q_t = d_t + L\alpha a_t \quad (10)$$

其中,  $\alpha$  是 ARIMA(0, 1, 1) 中的参数,此时的 Order-up-to 策略是 LIMP(1, 1) 策略.

在推导式(8)、(9)和(10)时,都使用了最小均方误差(MMSE)方法来预测提前期内的总需求,如果使用其它预测方法,就可以得到不同的订货函数. Chandra 和 Grabis<sup>[21]</sup> 列举了包括 MMSE 方法在内的 5 种预测方法,这些预测方法与 Order-up-to 策略结合,得到的结果各不相同.例如使用 5 阶的 SMA 方法预测提前期内的需求,则式(7)将化为

$$q_t = d_t + \frac{L}{5}(d_t - d_{t-5}) \quad (11)$$

这是 LIMP(6, 0) 策略.

由此可见,Order-up-to 策略在不同的需求假设情况下,得到的订货函数各不相同,如果再考虑到提前期内总需求预测方法的差异,实际出现的订货函数形式将更多,但是可以看到,大部分 Order-up-to 策略的实现形式都可以用 LIMP 策略来表示.

## 3) 基于 MRP 的策略

这种策略是 Chandra 和 Grabis<sup>[21]</sup> 提出的库存管理方法,它与 Order-up-to 策略的不同之处在于 Order-up-to 策略以当期需求和两次对提前期内总需求的预测之差为订货依据,而基于 MRP 的策略以当前需求和两次单期需求的预测之差为订货依据.记订货提前期为  $L$ ,  $\hat{d}_t(L)$  表示在第  $t$  期对第  $t + L$  期需求的预测,则基于 MRP 的策略的订货函数为

$$q_t = d_t + [\hat{d}_t(L) - \hat{d}_{t-L}(L)] \quad (12)$$

假设需求服从 ARMA( $p, q$ ),采用 Gaur 等<sup>[10]</sup> 的变换方法,可以将式(12)化为

$$q_t = (1 + \beta_1)d_t - (\beta_1 - \beta_2)d_{t-1} - (\beta_2 - \beta_3)d_{t-2} - \dots - (\beta_{p-1} - \alpha_p)d_{t-p+1} - \beta_p d_{t-p} \quad (13)$$

其中,系数  $\beta_i (i = 1, 2, \dots, p)$  由 ARMA( $p, q$ ) 序列中的系数决定,这说明基于 MRP 的策略是 LIMP( $p + 1, 0$ ) 策略.

## 3 LIMP 策略下需求传播

### 3.1 需求传播过程

下面的定理说明了 ARMA 需求在 LIMP 策略下的传播规律.

**定理 2** 若  $d_t$  服从平稳的 ARMA( $p, q$ ),则在 LIMP( $m, n$ ) 策略管理下,  $q_t$  服从平稳的 ARMA( $p, q^*$ ),其中:

① 若  $m = 0, n = 0$ , 则  $q^* = 0$ ;

② 若  $m > 0, n = 0$ , 且系数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  中第 1 个非零的系数为  $k_r (1 \leq r \leq m)$ , 则  $q^* = m + q - r$ ;

③ 若  $m = 0, n > 0$ , 且系数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  中第 1 个非零的系数为  $c_s (1 \leq s \leq n)$ , 则  $q^* = n + p - s$ ;

④ 若  $m > 0, n > 0$ , 且系数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  中第 1 个非零的系数为  $k_r (1 \leq r \leq m)$ , 系数  $c_1, c_2, \dots, c_m$  中第 1 个非零的系数为  $c_s (1 \leq s \leq n)$ , 则有  $q^* = \max\{m + q - \theta, n + p - \theta\}$ , 其中  $\theta = \min\{s, r\}$ .

证明 由式 (2) 得  $d_t = \phi^{-1}(B)[\eta + \psi(B)a_t]$ , 代入式 (4) 得

$$q_t = \eta + k(B)\phi^{-1}(B)[\mu + \psi(B)a_t] + c(B)a_t$$

即

$$\phi(B)q_t = [k(1)\mu + \phi(1)\eta] + [k(B)\psi(B) + c(B)\phi(B)]a_t \quad (14)$$

故  $q_t$  是平稳的 ARMA( $p, q^*$ ) 序列, 并且  $q_t$  和  $d_t$  的自回归部分的结构相同, 滑动平均部分的结构不同.  $q^*$  的值由  $k(B)\psi(B) + c(B)\phi(B)$  的结构决定.

证毕.

需要说明的是, 式 (14) 并不是 ARMA 的标准形式, 滑动平均部分还要进一步处理. 以定理 2 中的第 4 种情况为例, 对式 (14) 的标准化过程如下:

若  $m > 0, n > 0$ , 且  $k_r \neq 0 (1 \leq r \leq m), c_s \neq 0 (1 \leq s \leq n)$ , 不妨设  $s > r$  且  $n + p > m + q > s$  (其它情况与此类似). 记  $\phi_0 = -1, \psi_0 = -1$ , 可得

$$\begin{aligned} k(B)\psi(B) + c(B)\phi(B) &= \left(\sum_{i=r}^m k_i B^{i-1}\right) \times \\ &\left(-\sum_{j=0}^q \psi_j B^j\right) + \left(\sum_{i=s}^n c_i B^{i-1}\right) \left(-\sum_{j=0}^p \phi_j B^j\right) \\ &= -\sum_{i=r}^m \sum_{j=0}^q k_i \psi_j B^{i+j-1} - \sum_{i=s}^n \sum_{j=0}^p c_i \phi_j B^{i+j-1} \quad (15) \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} -\sum_{i=r}^m \sum_{j=0}^q k_i \psi_j B^{i+j-1} &= \sum_{i=0}^{m+q-r} x_i B^{r+i-1}, \\ -\sum_{i=s}^n \sum_{j=0}^p c_i \phi_j B^{i+j-1} &= \sum_{i=0}^{n+p-s} y_i B^{s+i-1} \end{aligned}$$

则有

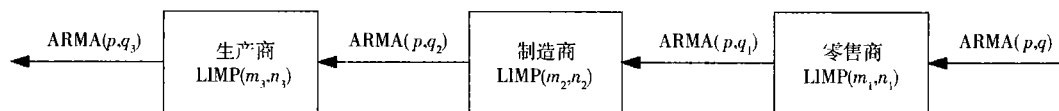


图 1 ARMA 需求在供应链中的传播过程

Fig. 1 Propagation process of an ARMA demand in a supply chain

### 3.2 牛鞭效应与 LIMP 策略

牛鞭效应是需求在供应链中传播时, 方差逐

$$\phi(B)q_t = \lambda + \omega(B)\beta_t \quad (16)$$

即  $q_t$  服从 ARMA( $p, n + p - r$ ), 其中

$$\begin{cases} \omega_i = -\frac{x_i}{x_0} & (1 \leq i \leq s - r - 1) \\ \omega_i = -\frac{x_i y_{i-(s-r)}}{x_0} & (s - r \leq i \leq m + q - r) \\ \omega_i = -\frac{y_{i-(s-r)}}{x_0} & (m + q - r + 1 \leq i \leq n + p - r) \end{cases}$$

且  $\lambda = k(1)\mu + \phi(1)\eta, \beta_t = x_0 B^{r-1} a_t$ . 由此得到的式 (16) 就是式 (14) 的标准 ARMA 形式.

将定理 2 应用于各种具体情况, 可以得到各种推论, 例如对 Lee 等<sup>[3]</sup> 的模型有:

**推论 2** 若  $d_t$  服从平稳的 AR(1), 库存管理策略为使用 MMSE 预测法的 Order-up-to 策略, 则  $q_t$  服从平稳的 ARMA(1, 1).

推论 2 与 Hosoda 和 Disney<sup>[22]</sup> 的结论一致. 对 Gaur 等<sup>[10]</sup> 的模型有:

**推论 3** 若  $d_t$  服从平稳的 ARMA( $p, q$ ), 库存管理策略为使用 MMSE 预测法的 Order-up-to 策略, 则  $q_t$  服从平稳的 ARMA( $p, p + q$ ).

推论 3 与 Zhang<sup>[9]</sup>、Gaur 等<sup>[10]</sup> 和 Gilbert<sup>[11]</sup> 中的结论相一致, 只是表述上有所差别. 对 Chandra 和 Grabis<sup>[21]</sup> 提出的基于 MRP 的策略, 有:

**推论 4** 若  $d_t$  服从平稳的 ARMA( $p, q$ ), 库存管理策略为基于 MRP 的策略, 则  $q_t$  服从平稳的 ARMA( $p, p + q$ ).

一般地, 若供应链中各级企业都使用 LIMP 策略管理库存, 市场需求是 ARMA 序列, 则供应链中的各级需求都将是 ARMA 序列, 并且它们具有相同的自回归结构. ARMA 需求在供应链中的传播过程可以用图 1 表示如下

级放大的现象, 即  $\frac{Var(q_t)}{Var(d_t)} > 1$ . 由 LIMP 策略的定

义式(3)和可行性定理1可知,使  $Var(q_i)$  最小的 LIMP 策略是  $LIMP(0, 0)$ , 即  $q_i = E(d_i) = \bar{d}$ , 此时  $Var(q_i) = 0$ . 除  $LIMP(0, 0)$  之外的 LIMP 策略都可以使  $Var(q_i)$  达到任意大, 这只需调整常数  $\eta$ 、系数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  和  $c_1, c_2, \dots, c_n$  即可. 因此在整个可行 LIMP 策略集合中, 存在许多 LIMP 策略会导致牛鞭效应, 但也有部分 LIMP 策略不会. 现在只讨论结构比较简单的  $LIMP(m, 0)$  策略, 使用 MMSE 预测法的 Order-up-to 策略(如文献[3]、[9]、[11]、[22]等)和基于 MRP 的策略<sup>[21]</sup>都是这种类型.

记需求序列的滞后  $r(r > 0)$  的自相关系数为  $\rho_r$ , 则  $|\rho_r| \leq 1$ . 把

$$\Omega = \frac{Var(q_i)}{Var(d_i)} = \sum_{i=1}^m k_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m k_i k_j \rho_{j-i} \quad (17)$$

称为库存管理策略造成的需求扭曲度. 若需求扭曲度超过 1, 则称发生了牛鞭效应.

下面的定理可以帮助判别  $LIMP(m, 0)$  策略是否会导致牛鞭效应.

**定理3** 对一个  $LIMP(m, 0)$  策略, 若对任意  $1 \leq i \leq m$ , 都有  $k_i \geq 0$  或  $k_i \leq 0$ , 且  $2\bar{d} \geq \eta \geq 0$ , 则该 LIMP 策略不会导致牛鞭效应.

**证明** 若对任意  $1 \leq i \leq m$ , 都有  $k_i \geq 0$  或  $k_i \leq 0$ , 则有

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{i=1}^m k_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m k_i k_j \rho_{j-i} \\ &\leq \sum_{i=1}^m k_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m k_i k_j |\rho_{j-i}| \\ &\leq \sum_{i=1}^m k_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m k_i k_j \\ &= \left( \sum_{i=1}^m k_i \right)^2 = \left( 1 - \frac{\eta}{\bar{d}} \right)^2 \end{aligned}$$

若  $2\bar{d} \geq \eta \geq 0$ , 则  $-1 \leq 1 - \eta/\bar{d} \leq 1$ , 故  $\Omega \leq 1$ . 证毕.

定理3说明, 如果  $LIMP(m, 0)$  策略的非零系数同号, 并且  $2\bar{d} \geq \eta \geq 0$ , 那么订货序列的方差不会大于需求序列的方差. 注意, 定理3并不要求需求是 ARMA 序列, 它对任意的随机需求序列都是成立的. 由定理3容易得到下面的推论.

**推论5** 如果一个  $LIMP(m, 0)$  策略中的常数  $\eta$  和所有系数  $k_1, k_2, \dots, k_m$  都为非负, 则该策略

不会导致牛鞭效应.

如果给定  $LIMP(m, 0)$  策略的阶数  $m(m > 0)$ , 由于  $Var(q_i)$  可以任意大, 因此需求扭曲度  $\Omega$  没有上限, 但是需求扭曲度  $\Omega$  有一个下限. 特别地, 如果需求服从  $AR(1)$  (即  $ARMA(1, 0)$ , Lee 等<sup>[3]</sup>使用这种假设), 有下面的定理:

**定理4** 若  $d_i$  服从平稳的  $AR(1)$ , 则对给定  $\eta$  和  $m(m > 0)$  值的  $LIMP(m, 0)$  策略, 有

$$\Omega \geq \Omega_{\min} = [m(1 - \phi_1^2) + 2\phi_1(1 + \phi_1)]\gamma^2$$

$$1 - \frac{\eta}{\bar{d}}$$

其中,  $\gamma = \frac{1 - \frac{\eta}{\bar{d}}}{m(1 - \phi_1) + 2\phi_1}$ .

**证明** 若  $d_i$  服从平稳的  $AR(1)$ , 则  $\rho_r = \phi_1^r (r > 0)$ . 若给定  $\eta$  和  $m(m > 1)$  值, 则找出使需求扭曲度  $\Omega$  最小的  $LIMP(m, 0)$  策略, 相当于求解下面的最优化问题

$$\begin{aligned} \min_{k_i, 1 \leq i \leq m} \Omega &= \sum_{i=1}^m k_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m k_i k_j \phi_1^{j-i} \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m k_i &= 1 - \frac{\eta}{\bar{d}} \end{aligned}$$

构造 Lagrange 函数

$$F = \Omega + \lambda \left[ \sum_{i=1}^m k_i - \left( 1 - \frac{\eta}{\bar{d}} \right) \right]$$

由

$$\begin{cases} \partial F / \partial k_1 = 0 \\ \partial F / \partial k_2 = 0 \\ \dots\dots \\ \partial F / \partial k_m = 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{pmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \dots & \phi_1^{m-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \dots & \phi_1^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{m-1} & \phi_1^{m-2} & \dots & \phi_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

解方程组可得

$$\begin{aligned} [k_1, k_2, k_3, \dots, k_{m-1}, k_m]' &= \\ -\frac{\lambda}{2(1 + \phi_1)} [1, 1 - \phi_1, 1 - \phi_1, \dots, 1 - \phi_1, 1]' & \end{aligned}$$

代入约束条件, 可得

$$\begin{cases} k_i = \gamma & (i = 1, m) \\ k_i = (1 - \phi_1)\gamma & (2 \leq i \leq m - 1) \end{cases}$$

其中,  $\gamma = \frac{1 - \frac{\eta}{\bar{d}}}{m(1 - \phi_1) + 2\phi_1}$ .

将上面的值代入目标函数可得

$$\Omega_{\min} = [m(1 - \phi_1^2) + 2\phi_1(1 + \phi_1)]\gamma^2$$

易知该值为目标函数的最小值. 故, 当  $m > 1$  时, 定理的结论成立. 当  $m = 1$  时, 易验证定理的结论也成立. 证毕.

定理4给出了各阶 LIMP( $m, 0$ ) 策略下, 需求扭曲度的下限. 如果我们固定阶数  $m(m > 0)$ , 则  $|\frac{\eta}{d} - 1|$  的值越小, 也就是把  $\eta$  拉向  $\bar{d}$ , 需求扭曲度  $\Omega$  的下限就越小, 这表明在 LIMP( $m, 0$ ) 策略中, 常数  $\eta$  对需求扭曲度  $\Omega$  具有“调节器”的作用.

另一方面, 如果固定常数  $\eta(\eta \neq \bar{d})$  的值, 由

$$\frac{\partial \Omega_{\min}}{\partial m} = \frac{(\phi_1^2 - 1)(1 - \eta/\bar{d})^2}{[m(1 - \phi_1) + 2\phi_1]^2} < 0 \quad (18)$$

可知, 阶数越高(在阶数大于0的范围内), 需求扭曲度  $\Omega$  的下限就越小, 这表明使用适当的高阶 LIMP( $m, 0$ ) 策略更有利于削弱牛鞭效应.

**推论 6** 若  $d_t$  服从平稳的 AR(1), 如果其阶数  $m$  满足

$$1 \leq m < 1 + \left[ \frac{\eta}{d} \left( 2 - \frac{\eta}{d} \right) \right] \frac{\phi_1 + 1}{\phi_1 - 1}$$

则一个 LIMP( $m, 0$ ) 策略必会引起牛鞭效应.

**证明** 由定理4及式(18)可知, 若  $d_t$  服从平稳的 AR(1), 需求扭曲度  $\Omega$  的下限会随着

LIMP( $m, 0$ ) 策略阶数的增大而减小(在  $m > 0$  的范围内), 因此如果阶数  $m$  足够小, 需求扭曲度  $\Omega$  的下限就会大于1, 所有的 LIMP( $m, 0$ ) 策略都必然会引起牛鞭效应.

解不等式  $\Omega_{\min} > 1$ , 并考虑到  $m$  的取值范围, 易得推论的结论. 证毕.

实际上, 定理3给出了能够避免牛鞭效应的 LIMP( $m, 0$ ) 策略的充分条件, 推论6给出了必然引起牛鞭效应的 LIMP( $m, 0$ ) 策略的充分条件, 两者相结合可以为选择合适的 LIMP( $m, 0$ ) 策略提供帮助.

### 4 数值实验

本节用数值实验比较3种 LIMP 策略下需求的传播过程: 使用 MMSE 预测法的 Order-up-to 策略、基于 MRP 的策略、最优(指需求扭曲度最小)的 LIMP( $m, 0$ ) 策略. 考虑一个平稳的 AR(2) 需求序列

$$d_t = 50 + d_{t-1} - 0.24d_{t-2} + a_t \quad (19)$$

其中,  $a_t$  服从正态分布  $N(0, 5)$ .

那么, Order-up-to 策略和基于 MRP 的策略都是 LIMP(3, 0) 策略. 为了保持形式上的一致性, 在第3种策略中, 取  $\eta = 0$  且  $m = 3$ . 表1列出了3种 LIMP 策略的各个参数.

表1 3种 LIMP(3, 0) 策略的参数  
Table 1 Parameters of three LIMP(3, 0) policies

策略类型	$k_1$	$k_2$	$k_3$
Order-up-to 策略	3.83	-3.70	0.87
基于 MRP 的策略	1.34	-0.46	0.12
最优 LIMP(3, 0) 策略	0.57	-0.14	0.57

在这3种 LIMP( $m, 0$ ) 策略下, 订货量  $q_t$  都服从 ARMA(2, 2), 如表2所示.

表2 3种 LIMP(3, 0) 策略的订货序列  
Table 2 Order quantity sequences of three LIMP(3, 0) policies

策略类型	订货序列 ARMA(2, 2)
Order-up-to 策略	$q_t = 50 + q_{t-1} - 0.24q_{t-2} + \beta_t - 0.97\beta_{t-1} + 0.23\beta_{t-3}, \beta_t = 3.83a_t$
基于 MRP 的策略	$q_t = 50 + q_{t-1} - 0.24q_{t-2} + \beta_t - 0.35\beta_{t-1} + 0.09\beta_{t-3}, \beta_t = 1.34a_t$
最优 LIMP(3, 0) 策略	$q_t = 50 + q_{t-1} - 0.24q_{t-2} + \beta_t - 0.24\beta_{t-1} + \beta_{t-3}, \beta_t = 0.57a_t$

用 MatLab 模拟零售商的库存运作, 取  $d_0 = d_1 = 50$ , 一共模拟 200 个周期. 需求序列和3种策略下的订货序列的最后50个周期的数据如图2所示.

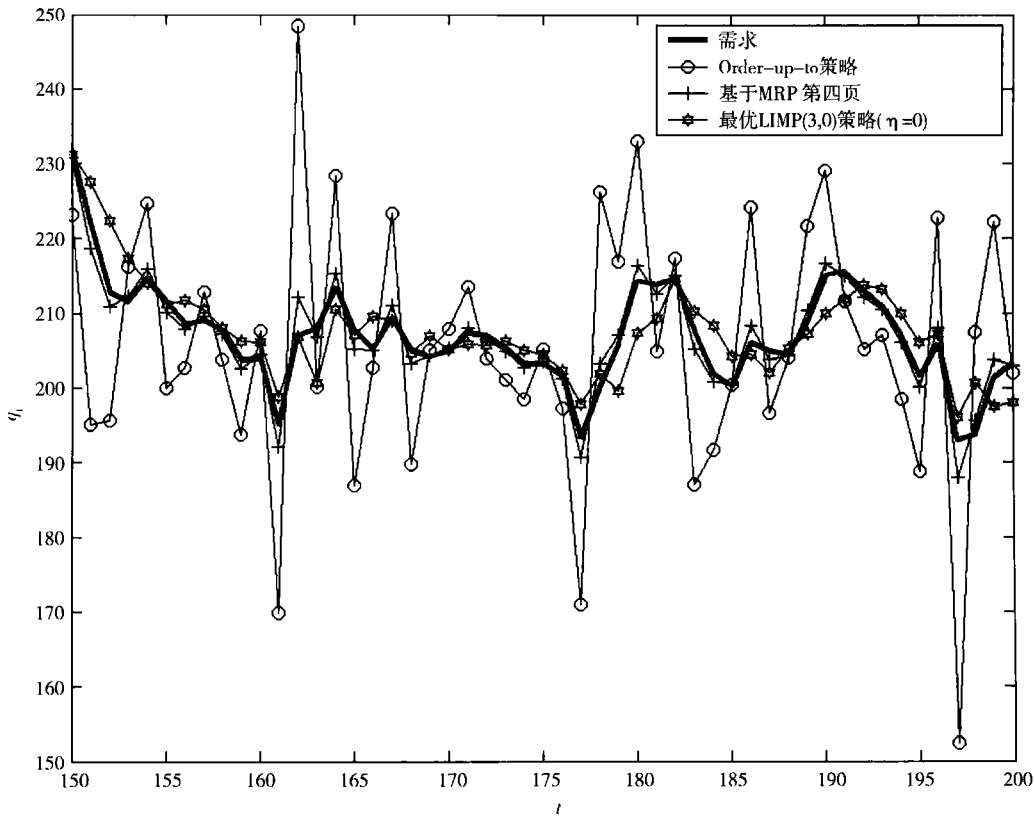


图2 需求序列和3种LIMP(3, 0)策略的订货序列

Fig. 2 Demand sequences and order quantity sequences of three LIMP(3, 0) policies

从图2可以直接看出, Order-up-to策略下订货序列的波动明显大于需求序列, 而基于MRP的策略和最优LIMP(3, 0)策略下的订货序列与需求序列比较接近. 实际上, 3种策略下的需求扭曲度依次为: 4.84、1.12、0.78, 这表明前两种策略都将导致牛鞭效应.

## 5 结束语

本文研究了在LIMP策略管理下, 服从自回归滑动平均ARMA( $p, q$ )时间序列的需求在供应链中的传播过程, 给出了需求和订货的关系, 并分析了LIMP策略与牛鞭效应的关系. 将库存管理策略划分为LIMP策略和NIMP策略使得能够在更一般的情况下分析供应链的运作过程, 得出的结论也不需要依赖于特定的库存管理策略.

本文表明很多常见的库存管理策略都是LIMP策略, 但也有一些常见的库存管理策略是

NIMP策略, 例如( $s, S$ )策略、( $R, nQ$ )策略. 在NIMP策略下, 需求的传播过程更为复杂, 这还需要进一步的研究. 另外, 本文假设需求服从平稳的ARMA序列, 得出的结论不能够直接应用于非平稳需求的情况. 一般的非平稳需求可以理解为平稳需求受到外界的冲击而偏离平稳状态, 如何处理这种情况也还需要进一步的研究.

此外, 还讨论到了在供应链环境下设计库存管理策略的多个目标, 好的库存管理策略应该能够兼顾这些目标, 而不是仅考虑成本问题. 如果在设计库存管理策略时, 将可选的策略限制在LIMP策略集中, 那么设计问题就可以转换成一个比较简单的最优化问题. LIMP策略结构简单, 使用方便, 并且易于计算需求扭曲度, 避免牛鞭效应, 因此这种设计思路有很大的优越性. 实际上, 本文中定理4的证明过程也可以看作是一个有约束的库存管理策略设计的例子.



## 参考文献:

- [1] 王迎军. 顾客需求驱动的供应链契约问题综述[J]. 管理科学学报, 2005, 8(2): 68—76.  
Wang Yingjun. Overview of supply chain contract problems driven by customer demand[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(2): 68—76. (in Chinese)
- [2] Lee H L, Padmanabhan V, Wang S. Information distortion in a supply chain: The bullwhip effect[J]. Management Science, 1997, 43(4): 546—558.
- [3] Lee H L, So K, Tang C. The value of information sharing in a two-level supply chain[J]. Management Science, 2000, 46(5): 626—643.
- [4] Raghunathan S. Information sharing in a supply chain: A note on its value when demand is nonstationary[J]. Management Science, 2001, 47(4): 605—510.
- [5] Cachon G, Fisher M. Supply chain inventory management and the value of sharing information[J]. Management Science, 2000, 46(8): 1032—1048.
- [6] Gavirneni S, Kapuscinski R, Tayur S. Value of information in capacitated supply chains[J]. Management Science, 1999, 45(1): 16—24.
- [7] Graves S C. A single-item inventory model for a nonstationary demand process[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 1999, 1(1): 50—61.
- [8] Alwan L C, Liu J J, Yao D. Stochastic characterization of upstream demand processes in a supply chain[J]. IIE Transaction, 2003, 35(3): 207—219.
- [9] Zhang X. Evolution of ARMA demand in supply chains[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2004, 6(2): 195—198.
- [10] Gaur V, Giloni A, Seshadri S. Information sharing in a supply chain under ARMA demand[J]. Management Science, 2005, 51(6): 961—969.
- [11] Gilbert K. An ARIMA supply chain model[J]. Management Science, 2005, 51(2): 305—310.
- [12] Aviv Y. The effect of collaborative forecasting on supply chain performance[J]. Management Science, 2001, 47(10): 1326—1343.
- [13] Aviv Y. Gaining benefits from joint forecasting and replenishment processes[J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2002, 4(1): 55—74.
- [14] Aviv Y. A time-series framework for supply chain inventory management[J]. Operations Research, 2003, 51(2): 210—227.
- [15] 李刚, 汪寿阳, 于刚, 等. 牛鞭效应与生产平滑模型有效性问题[J]. 管理科学学报, 2004, 7(1): 1—18.  
Li Gang, Wang Shouyang, Yu Gang, et al. Bullwhip effect and validity of production-smoothing model[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(1): 1—18. (in Chinese)
- [16] 路应金, 唐小我, 张勇. 供应链中牛鞭效应的分形特征研究[J]. 系统工程学报, 2006, 21(5): 463—469.  
Lu Yingjin, Tang Xiaowo, Zhang Yong. Study on the fractal characters of the bullwhip effect in supply chains[J]. Journal of Systems Engineering, 2006, 21(5): 463—469. (in Chinese)
- [17] 柳键. 基于时变需求的一对一供应链库存决策研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(1): 38—46.  
Liu Jian. The research on optimization of supply chain inventory decision-making based on random time-varying demand[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(1): 38—46. (in Chinese)
- [18] Lalwani C S, Disney S M, Towill D R. Controllable, observable and stable state space representations of a generalized order-up-to policy[J]. International Journal of Production Economics, 2006, 101(1): 172—184.
- [19] Pujawan I N. The effect of lot sizing rules on order variability[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 159(3): 617—635.
- [20] Strijbosch L W G, Moors J J A. Modified normal demand distributions in (R, S)-inventory control[J]. European Journal of Operational Research, 2006, 172(1): 201—212.

- [21] Chandra C, Grabis J. Application of multi-steps forecasting for restraining the bullwhip effect and improving inventory performance under autoregressive demand[J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 166: 337—350.
- [22] Hosoda T, Disney S M. On variance amplification in a three-echelon supply chain with minimum mean square error forecasting[J]. *Omega*, 2006, 34: 344—358.
- [23] Chen F, Drenznar Z, Ryan J K, *et al.* Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: The impact of forecasting, lead times, and information[J]. *Management Science*, 2000, 46(3): 436—443.
- [24] Box G E P, Jenkins G M, Reinsel G C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (3rd Edition)[M]. San Francisco: Holden-Day Inc. , 1990.

## Demand propagation in supply chains under linear inventory management policies

*LIU Kai-jun, ZHANG Zi-gang, ZHOU Yong-hong*

School of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

**Abstract:** This paper classifies inventory management policies into linear inventory management policies (LIMP) and nonlinear inventory management policies (NIMP), and studies the demand propagation processes in supply chains under LIMP policies. The concept and the feasible condition of LIMP policy are presented, and three kinds of familiar inventory policies are illustrated as examples of LIMP policies. Assuming that the market demand follows an autoregressive moving average (ARMA) time-series and the supply chain runs under LIMP policies, this paper proves that the demand of each firm follows an ARMA series of different structure. Then this paper analyzes the relationship between LIMP policy and Bullwhip Effect and presents helpful advices on designing optimal inventory management policies in the circumstance of supply chains. Finally, propagation processes of an AR(2) demand under three LIMP policies are simulated and compared numerically.

**Key words:** linear inventory management policy; supply chain management; demand propagation; bullwhip effect