个人房地产最优租-售转换的ROs投资决策①

蔡晓钰[1,2]，陈　忠[2]，吴圣佳[3]
（1. 兴业银行上海分行同业部，上海 200041；2. 上海交通大学管理学院，上海 200052；
3. 上海交通大学网络教育学院，上海 200052）

摘要：已有实物期权框架下房地产投资方面的研究长期以开发商为建模对象，却忽视了对个人房地产投资者的建模研究.文章在租金价格与房地产价格均随机的一般条件下，对投资者租-售转换的投资决策问题进行了建模，并运用停时方法求解了该模型，明确了投资决策中应当考虑的期权价值，给出了最优停止决策的阈值、相关结论和数值结果.最后，还对结果做了可达性分析与比较静态分析，给出了结论的经济解释与政策含义.

关键词：个人房地产；投资决策；最优时机；租-售转换；实物期权
中图分类号：F830.59　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-9807(2008)04-0125-09

0 引　言

近年来，房地产市场的交易特别是二手房的交易空前活跃.这种市场的推动者正是房地产个人投资者.个人房地产投资者在市场经济条件下必然具有逐利本能，所以，对于通过租赁收入来获取资本利得的当前投资者而言，通过权衡租金收入与一次性售房得益，很可能做出转租为售的投资决策.对于这种投资行为，自然的问题是：在具有高度不确定性（随机性）的房市中，投资者究竟通过何种指标，如何科学地权衡两种投资之间的收益并做出理性决策？这一现实性的需求呼唤科学的理论指导.鉴于此，本文拟在租金价格与房产价格均随机波动的一般情形下，考查投资者转租为售的投资决策问题并试图找出科学的决策规则.无疑，研究这一问题是具有现实意义的，因为它涉及到了广大普通百姓的切身利益.但房市的高风险与高不确定性往往使他们的投资决策缺乏理性与指导.因此，为这种投资行为提供科学的理论指导是本文所关注的.

考虑房市随机性的有关研究隶属于实物期权（ROs：real options）的范畴.这一范畴的基本建模原理是设法寻找出收益流与成本流，并假定它们服从某种二项分布（离散）或随机过程（连续），并利用动态规划或伊藤引理求出包含期权价值的偏微分方程并对此初值问题进行解析求解或数值仿真.这种方法应用于房地产研究的开创性理论与实证工作最初是由 Titman[1] 和 Quigg[2] 贡献的（最近的实证研究见于文献[12]）.Titman 利用二叉树期权定价模型，在离散的背景下对土地价格进行了评估.其后，Capozza 等将其工作拓展到了连续随机过程的情形[3]；Clark 等[4] 首次引入了对房地产开发密度选择期权的分析.此后Williams 以及 Capozza 等也做了类似的分析[5,6]；Geltner 等[7] 分析了有两种不同用途的房地产的开发期权.对此进一步的工作是 Childs 等[8] 在租金不确定以及房地产所有者可最优地改变两种不同用途组合的条件下对未开发与已开发土地价值进行了评估.Leishman 等[9] 的论文弥补了此前研究中长期对开发商行为忽视的空白.当然，将传统房地产投资领域内的研究拓展到行为、竞争与博弈视角的文献不限于此.这方面最早的文献当属

① 收稿日期：2004-08-31；修订日期：2005-03-02.
基金项目：博士点科研基金资助项目(20020248020).
作者简介：蔡晓钰(1977—)，男，宁夏海原人，博士.Email：caixy4397@163.com.

Williams[10],之后是 Grenadier[11]. Williams 推导出了子博弈完美纳什均衡、最优执行策略以及该策略下的已开发和未开发资产的价值;Grenadier 则对房地产投资的时间安排进行了期权博弈分析. 类似的研究最近有 Grenadier[12]. 此外, Kawaguchi[13]的研究也涉及到了博弈问题. 不过文献[13]的博弈是房地产交易方面的. 另外,在存量房层次的 ROs 框架下的研究主要集中在房地产再开发期权方面. 对再开发期权进行研究的有 Capozza 等[14]、Child 等[8]、Grenadier[11] 和 Williams[15]. 如文献[14]建模考虑了房地产的再开发决策. 文献[11]利用期权博弈的方法研究了再开发期权的战略实施问题. 文献[8]利用转换成本对再开发问题进行了研究. 文献[15]推导了最优再开发策略.

可以看到,经过近 20 年的发展,实物期权的研究已经成为房地产研究领域中最富成果的领域之一,它被广泛地应用于房地产有关问题的研究之中……. 然而,遗憾的是这些理论与实证文献都是以房地产开发商为建模对象,忽视了对个人房地产投资问题的研究. 对此问题的开创性研究见于文献[16,17],他们研究了房价随机波动条件下的购置策略[16]和个人房产投资的选择时机[17],但并没有考虑租售 - 转换(仅指单向转换:转租为售)的时机问题.

对租 - 售转换的投资时机问题进行探索性的建模研究正是本文的目标. 为解决如上问题,本文在租金价格与房价均服从几何布朗运动的一般条件下,建构了问题的原形并利用最优停时方法对模型进行求解. 与太多关注房地产开发商投资问题的已有文献不同的是,本文是以个人投资者为建模对象,关注的是二手房层次的投资问题,而这一问题却是自文献[1]以来至今被长期忽视了的问题之一.

1 模型的建立

1.1 问题抽象

考虑当前投资者所持房产的状态是出租,这意味着当前房价较投资者心理价位为低. 投资者根据随机变化的房价来确定是继续持有还是转租为售.

设投资者持有房产的租金收入服从几何布朗运动(GBM: geometric Brownian motion)

$$\mathrm{d}R = \mu_{\mathrm{R}} R \mathrm{d}t + \sigma_{\mathrm{R}} R \mathrm{d}W$$

其中:μ_{R} 是 R 的期望增长率,满足 $\mu_{\mathrm{R}} < r$,否则,投资者会一直持有房产;σ_{R} 是 R 的期望增长率的标准差;W 是标准的维纳过程;$\mathrm{d}W$ 是维纳过程的增量,满足 $\mathrm{d}W = \varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}, \varepsilon \sim \mathrm{N}(0,1)$. 记保持房产为可出租态的维护成本为 $C = \theta R (0 < \theta < 1)$,则投资者的净收入为 $R(1-\theta)$. 若记投资者的寿命与贴现率(如银行活期利率)分别为 T 与 r,则其当前(0 时刻)房产价值 V_T 必满足

$$V_T = \int_0^T E(R-C)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t = (1-\theta)\int_0^T ER\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t = \frac{R_0(1-\theta)(\mathrm{e}^{(\mu_{\mathrm{R}}-r)T}-1)}{2(\mu_{\mathrm{R}}-r)} \quad (1)$$

事实上,由于 $R = R_0 \exp[(\mu_{\mathrm{R}} - \frac{\sigma_{\mathrm{R}}^2}{2})t + \sigma_{\mathrm{R}}\mathrm{d}W]$,故 $ER = \exp[(\mu_{\mathrm{R}} - \frac{\sigma_{\mathrm{R}}^2}{2})t]E\mathrm{e}^{\sigma_{\mathrm{R}}\mathrm{d}W}$. 又因 $\mathrm{d}W \sim N(0,t)$,故

$$E\mathrm{e}^{\sigma_{\mathrm{R}}\mathrm{d}W} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\sigma_{\mathrm{R}}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2t}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\sigma_{\mathrm{R}}^2 t}{2}}}{2}$$

$$V_T = \frac{(1-\theta)R_0}{2}\int_0^T \mathrm{e}^{(\mu_{\mathrm{R}}-r)t}\mathrm{d}t = \frac{(1-\theta)(\mathrm{e}^{(\mu_{\mathrm{R}}-r)T}-1)R_0}{2(\mu_{\mathrm{R}}-r)}$$

V_T 是研究租 - 售转换决策的比较基准.

再设房地产的价格 P 服从如下的 GBM

$$\mathrm{d}P = \mu P \mathrm{d}t + \sigma P \mathrm{d}W \quad (2)$$

其中:μ 是期望增长率,它满足 $\mu < r$(否则投资者将不会做出出售决策,因为等待永远是有利可图的);σ 是标准差;W 亦满足 $\mathrm{d}W = \varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}, \varepsilon \sim N(0,1)$.

再记投资者继续保持出租态的决策与停止出租转而出售的决策分别为继续决策与停止决策. 那么,当房价击中某一外生最优临界值 P^* 时,停止决策就会发生,投资者执行这一决策可获取最大期望收益;否则,投资者会做出继续决策. 为求出该最优阀值,需设定一外生变量 $\hat{P}$:它表示在 $\hat{P}$ 处的停止决策至少是有利可图的 —— 尽管停止决策可能并不是最优的(最优的停止决策是 P^*). 若再记房价首次击中 $\hat{P}$ 的时间为 τ,则在 $\hat{P}$ 时,投资者停止决策的价值 V_s 必满足

$$V_s = E_\tau[\int_0^T E_{\mathrm{R}}(R-C)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-r\tau}(P_\tau - K)] \quad (3)$$

其中:$\tau = \inf\{t > 0 \mid P \geqslant \hat{P}\}$;$K$ 为转租为售的转

换成本(即出售成本：例如它可以是投资者为出售房产而向中介支付的佣金等)，设 $K = \lambda P_\tau (0 < \lambda < 1)$；$E$ 为期望算子. 由于 $P_\tau = \hat{P}$，从而式(3)可以化简为

$$V_s = E_\tau \frac{R_0(1-\theta)(e^{(\mu_R - r)\tau} - 1)}{2(\mu_R - r)} + (1-\lambda)\hat{P}E_\tau e^{-r\tau} \tag{4}$$

上式成立是因为 $E_\tau e^{(\mu_R - r)\tau} = E_\tau e^{-r\tau}$. 关于此式，简略证明如下.

记 $f(P) = Ee^{\alpha\tau}$. 对 $P(P < \hat{P})$，记在时间段 dt 后 P 的取值为 $P + dP$，则 $f(P)$ 满足

$$f(P) = e^{-rdt}E[f(P + dP) \mid P]$$

由 Taylor 公式

$$f(P + dP) = f + f'dP + \frac{1}{2}f''(dP)^2 + o[(dP)^2]$$

根据

$$(dW)^2 = dt, dWdt = 0, (dt)^2 = 0$$

故

$$E[f(P + dP)] = f + f'\mu Pdt + \frac{1}{2}f''\sigma^2P^2dt$$

从而 $f(P) = e^{-rdt}E[f(P + dP) \mid P]$ 变为

$$f = [1 - rdt + o(dt)][f + f'\mu Pdt + \frac{1}{2}f''\sigma^2P^2dt]$$

令 $dt \to 0$ 得

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''P^2 + \mu f'P - rf = 0$$

该常微分方程的解法是标准的. 不难得到其解为

$$f(P) = AP^{\beta_1} + BP^{\beta_2}$$

其中：A 与 B 均为待定常数；$\beta_i, i = 1,2$ 是关于 β 的一元二次方程 $Q(\beta) = \sigma^2\beta\frac{\beta - 1}{2} + \mu\beta - r = 0$ 的两个根. 由于 $Q(0) < 0, Q(1) < 0$，所以不难得到

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2})^2 + 2\frac{r}{\sigma^2}} > 1$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2})^2 + 2\frac{r}{\sigma^2}} < 0$$

考虑到如下两个边界条件：1) 若 $P = \hat{P}$，则 $\tau = 0$. 从而 $f(\hat{P}) = 1$；2) 若 $P = 0$，则不会有投资者预期到房价会上升. 否则，P 就不可能为零. 所以，这样的期权是无价值的. 于是 $f(0) = 0$. 从而可得

$$A = 0, B = (\frac{1}{\hat{P}})^{\beta_2}$$

$$f(P) = E_te^{\alpha\tau} = (\frac{P}{\hat{P}})^{\beta_2}$$

故对 $P_0 < \hat{P}$ 有 $f(P_0) = (\frac{P}{\hat{P}})^{\beta_2}$. 所以不难得到

$$E_\tau e^{(\mu_R - r)\tau} = E_\tau e^{-r\tau} = (\frac{P_0}{\hat{P}})^{\beta_1}$$

显然，$e^{\alpha\tau}$ 的期望与 α 无关，这是因为不同参数 α 的边界条件都相同的缘故. 记

$$\Delta = V_s - V_T = \left[(1-\lambda)\hat{P} + \frac{R_0(1-\theta)}{2(\mu_R - r)}\right]Ee^{-r\tau} - \frac{R_0(1-\theta)}{2(\mu_R - r)}e^{(\mu_R - r)T} \tag{5}$$

显然，理性的投资者绝不会在 Δ 为负时实施停止决策. 所以，Δ 必然为正值，从而转租为售的最优转换期权价值为

$$\Delta^+ = \max\{V_s - V_\infty, 0\} = [(1-\lambda)\hat{P} + \frac{R_0(1-\theta)}{2(\mu_R - r)}] \times Ee^{-r\tau} \frac{R_0(1-\theta)}{2(\mu_R - r)}e^{(\mu_R - r)T} \tag{6}$$

根据前文结果，将 $Ee^{-r\tau}$ 替换得到

$$\Delta^+ = \max\{V_s - V_\infty, 0\} = [(1-\lambda)\hat{P} + \frac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R - r)}](\frac{P_0}{\hat{P}})^{\beta_1} - \frac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R - r)}e^{(\mu_R - r)T} \tag{7}$$

由于 $\Delta^+ \geqslant 0$，从而必有

$$\hat{P} \geqslant \frac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R - r)(1-\lambda)}[e^{(\mu_R - r)T} - (\frac{P_0}{\hat{P}})^{\beta_1}]$$

或写为

$$\hat{P} \geqslant \widetilde{P}\left[\left(\frac{P_0}{\hat{P}}\right)^{\beta_1} - e^{(\mu_R - r)T}\right] \tag{8}$$

由此得到下面的结论.

命题 1　投资者停止决策的可行域可隐式地记为

$$FR = \left\{P \mid \hat{P} \geqslant \widetilde{P}\left[\left(\frac{P_0}{\hat{P}}\right)^{\beta_1} - e^{(\mu_R - r)T}\right]\right\}$$

这一结论意味着投资者在 FR 上的停止决策是有利可图的. 表 1 给出了不同参数下的一组可行域数值解. 数值结果直观地表明了各参数与可

行域之间的关系. 下面通过经济分析来说明这些关系的合理性.

1）由于较高的房价的波动性 σ（不确定性）提高了投资者对房价上升到高位的预期，从而使得可行域变小（可行域变小即临界值变大）；

2）租金增长率 μ_R 对可行域的影响比较复杂，主要在于人的寿命. 如当寿命很长时，可行域表达式右端之负项消失，所以，租金增长率越高，可行域越小. 这是因为寿命越长，转租为卖的机会成本越高，这使投资者要求更高的房价进行补偿；当寿命较小时，即使租金增长率很高，但获得的租金收入毕竟有限即出售的机会成本较小，这使得投资者的心理保留价位较低，亦即可行域变大；

3）房价的期望增长率 μ 越高，投资者当然不愿意在较低的价位上出售房产，从而可行域变小；

4）贴现率 r 越高，意味着实际租金减少，为弥补租金的减少，投资者要求更高的房价回报，这使得可行域变小；

5）维持可租态的成本（θ 或 C）越高，表明持有房产的成本高，为免于这部分成本支出，投资者愿意以较低价格出售房产，从而使可行域变大；

6）出售成本（λ 或 K）越高，可行域变小. 原因是投资者希望以更高的房价来冲销过高的成本支出（这一分析暗含着出售成本是由卖方支付）；

7）当前年租金收入 $R_0$② 较高时，意味着持有房产出租更划算，除非更高的房价，这就使得可行域变小；

8）当前房价 P_0 越高，未来出售房产的心理价位当然不会低于当前价，从而可行域变小；

9）可出租的年限 T 越长，卖掉房产的机会损失越大，所以投资者要求更高的房价作为回报，这使得可行域变小.

表 1　各参数对可行域影响的数值结果（精度：0.1）

Table 1 Numerical result between parameters and feasible region (precision: 0.1)

σ (%)	μ_R (%)	μ (%)	r (%)	θ (%)	λ (%)	R_0 (%)	P_0 / 万元	T/ 年	FR/ 元
20	3	4	5	20	3	1	2	70	[40 420.82, ∞]
30	3	4	5	20	3	1	2	70	[41 292.48, ∞]
30	3.5	4	5	20	3	1	2	70	[38 107.39, ∞]
30	3.5	4.5	5	20	3	1	2	70	[39 166.72, ∞]
30	3.5	4.5	6	20	3	1	2	70	[41 784.01, ∞]
30	3.5	4.5	6	30	3	1	2	70	[3 991 181, ∞]
30	3.5	4.5	6	30	4	1	2	70	[40 055.54, ∞]
30	3.5	4.5	6	30	4	2	2	70	[50 169.28, ∞]
30	3.5	4.5	6	30	4	2	10	70	[142 726.51, ∞]
30	3.5	4.5	6	30	4	2	10	40	[122 796.02, ∞]

然而，应当清楚命题 1 并未表明已经获得了投资者的最优临界值 P^*. 下面来求 P^*.

1.2　最优临界值 P^* 的确定

P^* 为最优临界值，意味着它满足下式

$$V^* = \max_{\hat{P}} \Delta^+ = \left[(1-\lambda)P^* + \frac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R - r)}\right]\left(\frac{P_0}{P^*}\right)^{\beta_1} - \frac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R - r)} e^{(\mu_R - r)T} \tag{9}$$

该最大化问题的一阶与二阶条件为

$$\begin{cases} \text{FOC}: \dfrac{\partial \Delta^+}{\partial \hat{P}}\Big|_{\hat{P}=P^*} = \dfrac{\partial}{\partial \hat{P}}\left\{\left[(1-\lambda)\hat{P} + \dfrac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R - r)}\right]\left(\dfrac{P_0}{\hat{P}}\right)^{\beta_1}\right\}\Big|_{\hat{P}=P^*} = 0 & \text{(a)} \\ \text{SOC}: \dfrac{\partial^2 \Delta^+}{\partial \hat{P}^2}\Big|_{\hat{P}=P^*} < 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{10}$$

由方程（10 - a）可得

$$P^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\tilde{P}, \tilde{P} = \frac{(1-\theta)R_0}{2(r - \mu_R)(1-\lambda)} \tag{11}$$

② 一般，谈到年金收入并不是特指 1 年的现金收入，年金收入中的“年”有任意时间段的含义.

下面验证 P^* 为最优值. 这只需证明式(10-b)成立即可. 事实上将式(11)代入式(10-b)有

$$\frac{\partial^2\Delta^+}{\partial\hat{P}^2}\Big|_{\hat{P}=P^*}=-P_0^{\beta_1}\hat{P}^{-\beta_1-1}\beta_1[(1-\lambda)(1-\beta_1)+\frac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R-r)}(1+\beta_1)\frac{1}{\hat{P}}]\Big|_{\hat{P}=P^*}$$

$$=-P_0^{\beta_1}\hat{P}^{-\beta_1-1}(1-\lambda)(\beta_1-1)<0 \quad (12)$$

将式(11)代入式(9)得最优转换期权价值为

$$V^*=[(1-\lambda)P^*+\frac{(1-\theta)R_0}{2(\mu_R-r)}]\frac{P_0^{\beta_1}}{P^{*\beta_1}}-\frac{(1-\theta)R_0e^{(\mu_R-r)T}}{2(\mu_R-r)}$$

$$=\frac{(1-\lambda)P_0^{\beta_1}}{\beta_1P^{*\beta_1-1}}+\frac{R_0(1-\theta)e^{(\mu_R-r)T}}{2(r-\mu_R)}$$

$$=\frac{[(1-\lambda)P_0]^{\beta_1}}{\beta_1}[\frac{2(r-\mu_R)(\beta_1-1)}{R_0(1-\theta)}]^{\beta_1-1}+\frac{R_0(1-\theta)e^{(\mu_R-r)T}}{2(r-\mu_R)} \quad (13)$$

由此得到下面的结论.

命题2　投资者最优停止决策时机为 $P=P^*$. 此时，转换期权的价值最大，其最大值由式(13)给出，其中的 P^* 由式(11)给出.

1.3　最优临界值 P^* 的可达性

已求出了停止的最优时机为 P^*，接下来的问题是 P 是否会达到 P^*？即要解决与 P^* 相对应的 τ^* 的一、二阶矩的存在性与可达概率问题.

对于形如式(2)的随机过程，随机变量的密度函数可表示为[18]

$$f(t,P_0,P^*)=\frac{\ln(\frac{P^*}{P_0})}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{[\ln(\frac{P^*}{P_0})-(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t]^2}{2\sigma^2t}}$$

其中，$P^*(P^*>P)$ 是 P 要达到的临界值. 令 $s=\frac{\mu-\sigma^2}{2}$. 1) 若 $s>0$，P 必会以概率1达到 P^*，且达到的期望时间与方差分别为 $E(\tau^*)=\frac{\ln\frac{P^*}{P_0}}{s}$，$Var(\tau^*)=\sigma^2\frac{\ln\frac{P^*}{P_0}}{s^3}$；2) 若 $s<0$，可能达到 P^*，达到概率为 $Pr=(\frac{P^*}{P_0})^{\frac{2\mu}{\sigma^2}-1}$，但其一阶矩并不存在；3) 当 $s=0$ 时，必会以概率1达到 P^*，但期望等待的时间是无穷大.

类似地若 $P^*<P$，则当 $s<0$ 时，在有限时间内 P 会以概率1达到 P^*，否则其一、二阶矩不存在. 但本文的经济含义意味着 $P^*>P$. 由此，可以给出下面的结论.

命题3　P 不一定能在有限的时间内达到 P^*. P^* 能否达到取决于 s. 若 $s>0$，则一定能在有限时间内达到 P^*，首次达到 P^* 的平均时间是 $E(\tau^*)=\frac{\ln\frac{P^*}{P_0}}{s}$，方差是 $Var(\tau^*)=\sigma^2\frac{\ln\frac{P^*}{P_0}}{s^3}$；当 $s\leqslant0$ 时，以概率 $Pr=(\frac{P^*}{P_0})^{\frac{2\mu}{\sigma^2}-1}$（概率 $\mathrm{Pr}=1$）达到 P^*，但达到的平均时间是无穷.

命题3表明当房市前景看好时($s>0$)，在 P^* 处进行转租为售的投资是可行的. 因为投资者只需等待有限时间就可实现期望收益. 当房市萧条时，等待最优临界值的策略由于平均等待时间无穷而可能是不理想的策略——尽管预期的结果可能出现.

2　结论分析

2.1　比较静态分析

由于 $p^*=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{(1-\theta)R_0}{2(r-\mu_R)(1-\lambda)}$ 且 $\beta_1=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2})^2+2\frac{r}{\sigma^2}}(\beta_1>1)$. 所以 P^* 是关于 β_1、θ 的减函数，是关于 R_0、λ 和 μ_R 的增函数. 又将 β_1 代入 P^* 中可以得到

$$P^*=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2})^2+2\frac{r}{\sigma^2}}-1}\right)\times\frac{(1-\theta)R_0}{2(r-\mu_R)(1-\lambda)}$$

故 P^* 是 r 的减函数. 图1直观地给出了一条 P^* 与 r 的模拟曲线.

由于 β_1 关于方差的导数为

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}=\frac{2\mu}{\sigma^3}-\frac{(1/2-\mu/\sigma^2)(2\mu/\sigma^3)-2r/\sigma^3}{\sqrt{(1/2-\mu/\sigma^2)^2+2r/\sigma^2}}$$

正负号判断不明确，所以用数值实验来寻找 P^* 与 σ 之间的关系，图2就是二者关系的一条模拟曲线. 这条曲线反映了方差与临界值之间的正函数关系.

又由 $\frac{|1/2-\mu/\sigma^2|}{\sqrt{(1/2-\mu/\sigma^2)^2+2r/\sigma^2}}<1$，故

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma}=-\frac{1}{\sigma^2}\left(1+\frac{1/2-\mu/\sigma^2}{\sqrt{(1/2-\mu/\sigma^2)^2+2r/\sigma^2}}\right)<0,$$

从而 P^* 是 μ 的增函数，图3的模拟曲线表征了这种正相关关系.

根据以上分析可得如下静态分析结论.

命题4 临界值 P^* 与参数 σ、μ，μ_R、λ 和 R_0 呈正相关关系，与 r 和 θ 呈负相关关系，但 P^* 与 P_0 和 T 无关.

表2给出了各参数与 P^* 关系的一组数据，它直观地证实了命题4的结果.

又根据

$$V^* = [\frac{(1-\lambda)P_0}{\beta_1}]^{\beta_1}[\frac{2(r-\mu_R)(\beta_1-1)}{R_0(1-\theta)}]^{\beta_1-1} + \frac{(1-\theta)R_0 e^{(\mu_R-r)T}}{2(r-\mu_R)}$$

可知 λ 与 V^* 负相关. 但 σ、μ、r 和 μ_R 与 V^* 的关系不明确. 然而数值实验表明，σ、μ 与 V^* 正相关，但 μ_R、θ 和 r 与 V^* 因参数不同（如 P_0）而呈递增、递减或 U 形关系. 表2给出了各参数与 V^* 的一组计算结果. 由此得到下面的结论.

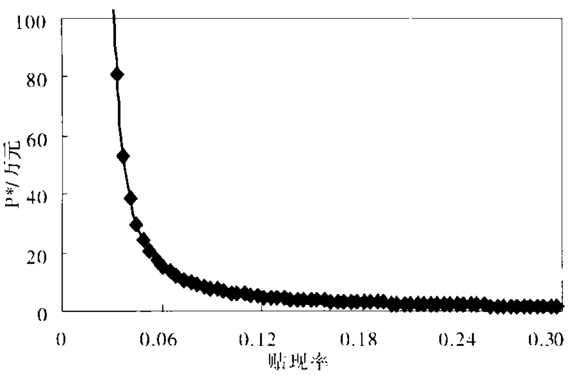

图1 贴现率与临界值的关系模拟曲线

参数：$\mu_R = \mu = 2\%$，$\sigma = 1\%$，$\theta = 20\%$，$\lambda = 3\%$，$R_0 = 10\ 000$

Fig. 1 Simulation curve between r and P^*

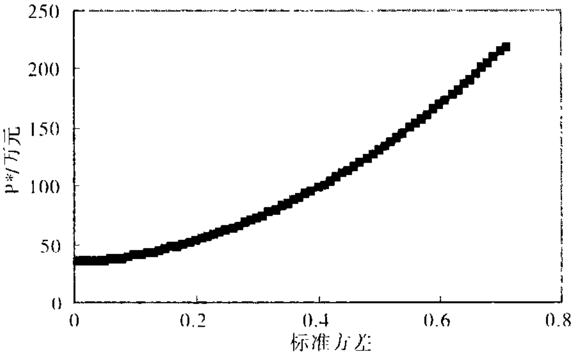

图2 方差与临界值的关系模拟曲线

参数：$\mu_R = \mu = 2\%$，$r = 5\%$，$\theta = 20\%$，$\lambda = 3\%$，$R_0 = 10\ 000$

Fig. 2 Simulation curve between σ^2 and P^*

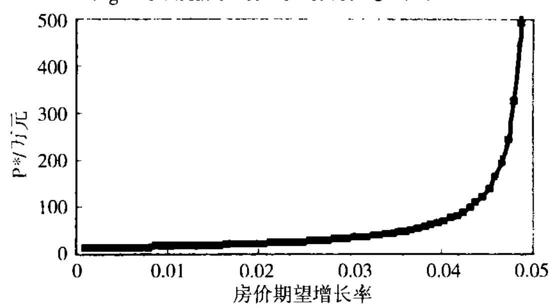

图3 房价期望增长率与临界值的关系模拟曲线

参数：$\mu_R = 2\%$，$\sigma = 1\%$，$r = 5\%$，$\theta = 20\%$，$\lambda = 3\%$，$R_0 = 10\ 000$

Fig. 3 Simulation curve between μ and P^*

命题5 最优转换期权价值 V^* 与参数 P_0、σ 和 μ 呈正相关关系，与 λ 和 T 呈负相关关系；但它与 R_0、μ_R、r 和 θ 的关系因参数不同而呈现不同的函数关系.

这一结论部分关系的数值说明见表2.

2.2 各参数与平均首次可达时间的关系

表2 各参数与 $P^*/V^*/E\tau^*/\mathrm{Pr}$ 关系的数值结果

Table 2 numerical result between parameters and object value

σ (%)	μ_R (%)	μ (%)	r (%)	θ (%)	λ (%)	R_0 (%)	P_0/万元	T/年	P^*/万元	V^*/万元	$E\tau^*$/万元	Pr
20	3	4	5	20	3	1	2	70	150.86	5.78	432.32	—
30	3	4	5	20	3	1	2	70	206.19	5.98	∞	0.60
30	3.5	4	5	20	3	1	2	70	274.91	10.34	∞	0.58
20	3.5	4.5	5	20	3	1	2	70	393.15	10.54	352.07	—
20	3.5	4.5	6	20	3	1	2	70	92.73	3.48	255.77	—
20	3.5	4.5	6	30	3	1	2	70	81.14	3.15	246.87	—
20	3.5	4.5	6	30	4	1	2	70	81.98	3.14	247.56	—
20	3.5	4.5	6	30	4	2	2	70	163.97	5.47	293.77	—
20	3.5	4.5	6	30	4	2	10	70	163.97	9.17	186.47	—
20	3.5	4.5	6	30	4	2	10	40	163.97	14.61	186.47	—

根据E(τ^*)和Pr的表达式及命题4，不难得到下面的命题.

命题6　若$s>0$，平均等待时间与参数σ、μ、λ、R_0和μ_R呈正相关关系，与r和θ呈负相关关系，与T无关；当$s=0$，可达概率为1，但等待的平均时间是无穷大；若$s<0$则较小的临界值有较大的概率被击中.

命题6表明，与初始位置较近的P^*只需等待较短的平均时间就可被击中($s>0$)或有较大的可达概率($s\leqslant 0$)，这一结论与实际情况很吻合. 命题6的数值结果见表2.

2.3　结果的经济解释与政策含义

利用命题4，可以说明本模型蕴含着丰富的经济与政策含义.

1)θ越高，意味着为将房产维持在可出租态，投资者不得不支付较高成本从而使出租获利的实际收入变小. 为免于这部分成本支出，投资者出售房产的意愿增强，即投资者愿意在较小的临界值P^*上做出停止决策. 这一结果意味着当房市供求紧张时，如果供求规律起作用，可以适当提高租赁成本如加大对租赁房产的税收以增加房产供给.

2)λ越高，意味着出售房产的交易成本高，它降低了投资者的既得收益. 为弥补这一收益损失，投资者希望将高成本转嫁于购房者，从而使停止决策的临界值水平提高. 关于此点，不难从2004年1月1日杭州市政府出台的“房产新政”对住房投机者按照“财产转让所得”项目课以20%的个人所得税，进而引发更高的售房价格中看出其合理性③. 所以，政府通过规范市场，减少交易成本可增加房产的供给. 当然在房市过热时可以通过加大交易成本来抑制过热. 这种交易成本可以是税收杠杆也可以是其他“无形”手段，如增加出售的时间成本与“精力耗费”.

3)R_0越高，意味着出租的获利空间大，停止决策的机会成本高，除非较高的出售临界值可以弥补其过高的成本损失，否则投资者是不会做出停止决策的. 所以，减少租金收入如政府设立租金的价格上限并对租赁所得课以较高税赋，可增加房产供给.

4)贴现率r越高，意味着出租获利的成本较高，为尽快免于较高的成本支出，投资者愿以较低临界值停止决策(出售房产). 所以，央行可以通过提高存款利率水平来降低投资者的意愿投资临界值，从而使房市供给增加. 显然，理论上央行可以通过降低存款利率来抑制过热的房市.

5)μ越高，说明等待出售房产是有利可图的，投资者不愿轻易卖出房产，这意味着临界值有较高的水平. 所以，政府抑制房价过快上升是增大房产供给、缓解供求矛盾的有效途径之一.

6)σ越高，投资者的售房临界值越高. 这是因为不确定性使房价的可能上升空间变大，这使投资者有理由期待更高的出售房价. 这表明，政府保持房市的稳健发展从而降低“抛售”临界值，是有效缓解“捂房”获利的有效途径. 而房市的稳定可以使投资者更多地由“投机房产”理性地回归为“投资房产”，从而挤出房市中太多的投机成分，将真正的“投资者”(真正的住房需求者)吸引到房市中来，这不但对房市真正的繁荣有益，也更具有深刻的社会学含义.

7)租金期望增长率μ_R越高，投资者越愿等待，因为持有房产可获得较高的租金收益. 这表明降低租金的期望增长率可以将部分出租房从出租市场挤到二手房交易市场，从而增大了住房的供给、缓解住房矛盾.

最后，初始房价与寿命对最优值无影响的结果表明，在任何当前房价下任何投资者无论其寿命长短都有可能在其一生中最大化其转租为售的期权价值.

3　研究小结与展望

鉴于已有ROs框架下的房地产投资文献长期以开发商为建模对象，却忽视了对个人房地产投资者的建模研究. 所以，本文在房地产价格服从GBM的条件下对投资者转租为售这一投资问题进行了探索性建模，并运用停时方法求解了模型. 给出了投资者的最优停止决策点，明确了新投资

③　2003—2004年，杭州楼市投机盛行，造成“需求完全大于供给”的假象. 为抑制投机炒房、制止房价过快上涨，杭州市政府于2004年1月1日起对个人出售自有住房(包括商品房、房改房)所得按照“财产转让所得”项目征收20%的个人所得税. 但它反而促使房价攀升，因为卖方纷纷把20%的税赋转嫁给买方. 迫于“新政”的种种局限，同年9月1日，征税政策叫停.

规则中所包含的期权价值并分析了结论的可达性问题.特别地,还对结论做了比较静态分析、数值分析并给出了结论的经济解释,明确了各变量对可行域、临界值及最优转换期权的影响.指出这些结论与直觉的一致性.考虑到理论应当对实践做出指导,本文特别分析了结论所蕴含的政策含义.研究表明政府与央行在对房地产市场进行宏观调控方面可资利用的工具是很多的.

然而,应当说明的是,在经济解释与政策含义分析一节中的研究蕴含着若干前提:1)住房市场中的部分供给源于租赁市场;2)住房市场上存在投机者;3)建模的对象只是转租为售的有房者;4)政府对房市的调节可以通过影响投资者的“租”“售”行为来进行.所以,本文所指的供给源于二手房市场,源于那些为获利目的而随时准备“转租为售”的投资者的,也就是说本文的分析并未涉及到对房市供给产生重大影响的土地因素,而只是涉及到了除土地因素外还有哪些因素可影响到房市供给.当然,这样的因素有很多,但只选取了“转租为售”所形成的潜在住房供给市场进行抽象建模.所以,将其它诸多因素如土地、预期等因素纳入到建模研究中去无疑具有重要的现实与理论意义,但限于篇幅,本文不可能一一尽述.希望有更多的科研工作者能加入到这一颇富成果的研究领域中来.

此外,本文的研究还可以拓展到融资投机房产、以租养房的问题等,这些研究无疑对目前我国的金融实践与个人投资实践具有重要意义.还有,考虑出租收益的随机性、房产价格的噪声以及将期权博弈的方法纳入到研究中来等必将是富有理论与现实意义的研究切入点,关于这些问题的探讨将在后继的研究中深入展开.

参 考 文 献:

[1]Titman S. Urban land prices under uncertainty[J]. American Economic Review, 1985, 75(3): 505—514.

[2]Quigg L. Empirical testing of real option-pricing models[J]. The Journal of Finance, 1993, 48(2): 621—640.

[3]Capozza D R, Helsley R. The fundamental of land prices and urban growth[J]. Journal of Urban Economics, 1989, 26(3): 295—306.

[4]Clarke H, Reed W. A stochastic analysis of land development timing and property valuation[J]. Regional Science and Urban Economics, 1988, 18(3): 367—382.

[5]Williams J. Real estate development as an option[J]. Journal of Real Estate Finance and Economics, 1991, 4(2): 191—208.

[6]Capozza D, Sick G. The risk structure of land markets[J]. Journal of Urban Economics, 1994, 36(1): 297—319.

[7]Geltner D, Riddiough T, Stojanovich S. Insights on the effect of land use choice[J]. Journal of Urban Economics, 1996, 39(3): 20—50.

[8]Childs P D, Riddiough T J, Triantis A J. Mixed uses and the redevelopment option[J]. Real Estate Economics, 1996, 24(3): 317—339.

[9]Leishman, *et al.* The influence of uncertainty on house builder behavior and residential land values[J]. Journal of Property Research, 2000, 17(2): 147—168.

[10]Williams J T. Equilibrium and options on real assets[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(4): 825—850.

[11]Grenadier. The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets[J]. Journal of Finance, 1996, 51(5): 1653—1679.

[12]Grenadier S R. Option exercise games: An application to the equilibrium investment strategies of firms[J]. Review of Financial Studies, 2002, 15(3): 691—721.

[13]Kawaguchi, *et al.* The pricing of real options in discrete time models: Another story of the value of waiting to invest[J]. Journal of Property Investment and Finance, 2001, 19(1): 9—34.

[14]Capozza, *et al.* The intensity and timing of investment: The case of land[J]. The American Economic Review, 1994, 84(4): 889—904.

[15]Williams J T. Redevelopment of real assets[J]. Real Estate Economics, 1997, 25(3): 387—407.

[16]蔡晓钰，韩丽川，吴圣佳．个人房地产购置时机选择的最优停时分析[J]．系统工程，2005，(1)：280—286.
Cai Xiaoyu, Han Lichuan, Wu Shengjia. *Investment timing choice for individual real estate based on optimal stopping time approach*[J]. Systems Engineering, 2005, (1): 280—286. (in Chinese)
[17]蔡晓钰，陈　忠，蔡晓东．个人房产投资的相机策略及其可达性：一个最优停时分析框架[J]．数量经济技术经济研究，2005，(3)：88—96.
Cai Xiaoyu, Chen Zhong, Cai Xiaodong. Timing choice and passage problem of personal real estate investment within the context of the optimal stopping time analysis framework[J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2005, (3): 88—96. (in Chinese)
[18]Rhys Song, Jindrichovska. The timing of real option exercise: Some recent developments[J]. The Engineering Economist, 2002, 47: 436—450.

Study on the investment decision about optimal renting-selling conversion of individual real estate in real options' framework

CAI Xiao-yu[1,2], *CHEN Zhong*[2], *WU Sheng-jia*[3]

1. Department of Financial Institution and Markets, Branch of Shanghai, Industrial Bank Co., LTD., Shanghai 200041, China;
2. Management School, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China;
3. Network Education College of Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract: Existing research regarding real estate investment in real options' framework usually focused on modeling of the developers instead of the individual investors. In this paper, we investigate the renting-selling conversion problem under the general assumption that rental stream and price of real estate follow a continuously stochastic process, and solve the problem using the stopping time approach with a series of conclusions. We simultaneously make analysis of the first passage time and the comparative static, and give economic explanation and policy implication of the results.

Key words: individual real estate; investment decision; optimal timing; renting-selling conversion; real options