多银行贷款池的组合违约风险研究①

张 维[1,2], 邱 勇[1]
(1. 天津大学管理学院, 天津 300072; 2. 天津财经大学, 天津 300222)

摘要: 资产组合的违约风险是决定其定价的重要因素. 根据多银行贷款池这样一类特殊的资产组合的契约特征,可将其组合违约风险的影响因素分解为:1)宏观的系统风险因素;2)各贷款银行的风险因素;3)各债项的异质风险因素. 在此基础上,构建了反映这类贷款池的违约风险和相关性结构的多因素模型,并在条件独立性假设和多元正态分布假设下,得到了该贷款池的违约行为随机特征. 数值分析表明,多元正态分布的因素模型能够比较清楚地刻画所研究的多银行贷款池的组合违约风险.

关键词: 违约风险; 相关性; 贷款池; 因素模型
中图分类号: F832.33 **文献标识码**: A **文章编号**: 1007-9807(2008)04-0134-08

0 引 言

在解决中小企业融资难的问题上,中小银行较大银行更具有克服信息不对称、处理成本较低等明显的优势[1],但另一方面,面对高风险的中小企业,相对薄弱的资产和技术实力又会给单个的中小银行带来更多的风险. 因此,将多个中小银行的若干贷款资产组成一个资产池以分散它们各自风险的设想受到了实践界和学术界的关注[2]. 多银行贷款池的最优风险—收益分担契约设计,及其在风险分散化和降低效率损失等方面的功效已经得到国内外相关研究的证实,多银行贷款池的证券化发售模式也获得了相关研究的支持[2~4]. 在构建多银行贷款池的基础上,进一步运用合成 CDO(synthetic collateralized debt obligations)等结构化融资方式能够减少传统证券化方式的效率损失,提高中小企业贷款资产的流动性,有利于扩大商业银行对中小企业的贷款供给,为化解中小企业信贷资产风险、缓解中小企业融资困境提供了新思路[5]. 不过,进一步实施以上结构化融资安排,首先必须正确认识多银行贷款池的组合违约风险,而贷款资产违约相关性结构则是研究这种组合违约风险的关键.

在一般情况下,组合资产违约影响因素可以分解为宏观系统风险因素和异质风险因素. 宏观系统风险因素将对所有参与组合的资产之违约行为产生影响,从而使这些资产的违约行为将产生一定的相关性. 此时以单因素模型(one-factor model)为基础的相关研究[6,7]为解决以上组合违约风险问题提供了具有良好解析性质的分析框架. 它的基本思路是把影响组合违约行为的风险因素分解为单一的共同影响因素和一组相互独立的异质因素,在条件独立性假设下刻画参与组合的资产之违约相关性结构,进而得到组合违约风险的随机分布规律. 根据以上思想,文献[6]首先在两个企业的情况下建立了正态分布的单因素模型. 此后,其他学者在不同的分布假设下进一步扩展了文献[6]的模型[7~11]. 一些最新研究[7,11]进一步提出了多因素模型(multi-factor model)的分析框架,但其相关性研究仍然是在单因素模型分

① 收稿日期: 2007-08-30; 修订日期: 2008-03-07.
基金项目: 教育部博士点基金资助项目(20060056013).
作者简介: 张 维(1958—), 男, 天津人, 教授、博士生导师.

析框架下进行的. 以双因素模型为例，其一般形式可表示如下

$$X_k = a_k Y_0 + b_k Y_1 + Z_k \sqrt{1 - a_k^2 - b_k^2} \tag{1}$$

其中：X_k 表示资产组合中第 k 项资产的价值；Z_k 表示该项资产的异质影响因素. 对于组合中任意一项资产，都具有共同影响因素 Y_0, Y_1.

对于本文研究的多银行贷款池这样一种特殊的资产组合，除宏观系统风险之外，各贷款银行的风险因素也将影响组合中各个贷款资产违约行为的相关性. 因此，仅考虑宏观系统风险因素的单因素模型分析框架将难以适用本文的研究. 在这方面，多因素模型分析框架为本文研究多银行贷款池的组合违约风险提供了很好的借鉴. 因此本文将构建一种特殊的多因素模型，以反映多银行贷款池的违约风险影响因素特征，并在这个分析框架下研究该贷款池的组合违约行为.

1　基本模型假设

对于多银行的中小企业贷款资产组合(即多银行贷款池)，其中包含 $N(N > 1)$ 个贷款银行，第 $i(i = 1, \cdots, N)$ 个贷款银行参与该贷款池的资产笔数为 $m_i(m_i > 1)$. 该贷款池中各个贷款资产之间的违约相关性结构是研究这个组合的违约风险特性的关键. 根据组合贷款违约行为的不同影响路径，违约相关性一般可以分为[12]：周期性相关关系(cyclical correlation)和传染性相关关系(contagious correlation). 周期性相关关系是指由于宏观经济因素对于每一个贷款企业的经营发展产生普遍影响，从而使这些企业贷款的违约行为表现出相关关系，在风险度量模型中体现为系统风险因素. 传染性相关关系则是指由于某一贷款企业的信用质量的突然恶化，进而通过商业借贷链条，影响其他与之间接或者直接相关的企业，而使这些企业贷款的信用质量下降或者造成违约行为，信用风险因此在相关企业之间传染、扩散.

在多银行贷款池的风险 — 收益分担机制下[2,4]，贷款池中每一项贷款资产的风险不仅取决于该项资产本身的异质风险因素，还取决于每项贷款的发放银行所具有的风险因素(由其资产规模、风险管理水平、经营管理水平、发展战略等银行自身条件所决定)，同时也取决于整个宏观经济中的系统性风险因素. 这些因素共同决定了多银行贷款池的风险收益特征，对组合违约风险和证券化产品定价将起到至关重要的作用. 因此，对于多银行贷款池，本文将组合违约风险的影响因素分解为以下3个部分：1) 宏观的系统风险因素；2) 贷款银行的风险因素；3) 债项的异质风险因素. 它们当中：宏观的系统风险因素将影响资产池中所有贷款的违约行为，从而导致该资产组合违约的周期性相关关系；贷款银行的风险因素则会影响各参与银行所持有的那些贷款资产的违约行为，从而导致资产池中部分贷款资产间的违约出现特殊的传染相关关系；在给定宏观系统风险因素和贷款银行的风险因素的条件下，债项异质风险在条件独立性假设下影响资产池中每一笔贷款自身的违约行为.

现代信用风险度量方法主要分为两类，结构模型和简化模型. 文献[13]较全面地分析介绍了结构模型的最新发展. 本文根据信用风险度量的简化模型[14,15]，对于包含 $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ 项中小企业贷款的多银行贷款池，假设每一笔中小企业贷款违约行为是不可预知的随机过程，也即企业的违约过程服从 Poisson 过程，以一个外生的违约强度 $\lambda_{ij}(i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, m_i)$ 发生违约. 因此，若违约强度 λ_{ij} 为常数，资产池组合中某个贷款资产的违约行为就是强度为 λ_{ij} 的齐次 Poisson 过程，从而每一笔组合贷款的违约时点 τ_{ij} 服从参数为 λ_{ij} 的指数分布. 于是，t 时刻之前某一债项的违约概率 $q_{ij}(t)$ 为

$$q_{ij}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_{ij} t} \quad (i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, m_i).$$

2　多银行贷款池的多因素模型构建

为了进一步研究多银行贷款池的组合违约风险，本文将以文献[7]的多因素模型分析框架为基础，在考虑多银行贷款池的上述3类特殊组合违约风险影响因素特征的情况下构建相应的多因素模型. 引入随机变量 $X_{ij}(i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots,$

m_i) 表示资产池中某个受贷企业的资产价值，并假设受贷企业的资本结构中债务资产为单笔贷款资产，而不涉及多笔债务资产的情况，也即每一家企业只在一家银行贷款，于是每一笔债项的违约行为可以用随机变量 X_{ij} 的随机特性描述，也即当企业资产价值低于某一阈值 x_{ij} 时债项发生违约. 此时，随机变量 X_{ij} 与违约时点的概率分布在分位点上存在以下的对应的关系

$$q_{ij}(t) = P(\tau_{ij} \leqslant t),\ x_{ij} = F_{ij}^{-1}(q_{ij}(t)) \quad (2)$$

其中：$i = 1,\cdots,N;\ j = 1,\cdots,m_i;\tau_{ij}$ 为某一债项的违约时点. 假设随机变量 $X_{ij}(i = 1,\cdots,N;\ j = 1,\cdots,m_i)$ 的边际分布函数为 $F_{ij}(x_{ij})$.

根据本文前面的介绍，多银行贷款池的组合违约风险的影响因素可以分解为宏观的系统风险因素、贷款银行的风险因素和债项的异质风险因素等 3 个部分. 本文用影响因素 Y_0 代表宏观的系统风险，$Y_{1i}(i = 1,\cdots,N)$ 代表第 i 个银行的风险因素，$Z_{ij}(i = 1,\cdots,N;j = 1,\cdots,m_i)$ 代表债项的异质风险，则参考文献[7] 的模型并加入表示银行风险因素的 $b_{ij}Y_{1i}$ 项，于是，每一笔中小企业的贷款资产具有如下的多因素影响结构

$$X_{ij} = a_{ij}Y_0 + b_{ij}Y_{1i} + Z_{ij}\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2} \quad (3)$$

其中：$i = 1,\cdots,N;\ j = 1,\cdots,m_i$；系数 a_{ij},b_{ij} 满足以下条件：$-1 \leqslant a_{ij},b_{ij} \leqslant 1, a_{ij}^2 + b_{ij}^2 \leqslant 1$. 对于 Y_0、Y_{1i}、Z_{ij} 等影响因素，在其边际分布规律下，为使模型分析更为简洁直观，在不失一般性的情况下可以对其进行标准化处理，使得各影响因素的期望为零，方差为 1[7]，由式(3) 可知随机变量 X_{ij} 的数字特征满足

$$EX_{ij} = 0,\ VarX_{ij} = 1 \quad (i = 1,\cdots,N;\ j = 1,\cdots,m_i)$$

与前述文献[7] 的工作式(1) 不同，本文构建的由式(3) 表达的多因素模型，除所有贷款面临的共同系统风险因素 Y_0 以外，由于多银行贷款池的分组契约特征，第 i 个银行所涉及的贷款资产还面临一个共同风险因子 $Y_{1i}(i = 1,\cdots,N)$，但它只影响这一部分贷款资产的风险收益特征. 这种结构所表现出的相关性特征和风险特征比文献[7] 所提出的双因素模型更加复杂. 对于处于同一银行的贷款资产，其违约相关性

$$\mathrm{cov}(X_{ij},X_{ik}) = a_{ij}a_{ik} + b_{ij}b_{ik}$$

$$\rho(X_{ij},X_{ik}) = a_{ij}a_{ik} + b_{ij}b_{ik} \quad (4)$$

其中，$j,k = 1,\cdots,m_i$，且 $j \neq k$. 对于属于不同银行的贷款资产，其违约相关性

$$\mathrm{cov}(X_{i_1j_1},X_{i_2j_2}) = a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}$$

$$\rho(X_{i_1j_1},X_{i_2j_2}) = a_{i_1j_1}a_{i_2j_2} \quad (5)$$

其中：$i_1,i_2 = 1,\cdots,N$，且 $i_1 \neq i_2;j_1 = 1,\cdots,m_{i_1}$，$j_2 = 1,\cdots,m_{i_2}$.

假设随机变量 $X_{ij}(i = 1,\cdots,N;\ j = 1,\cdots,m_i)$ 的边际分布函数为 $F_{ij}(x_{ij})$，$Y_{1i}(i = 1,\cdots,N)$ 的边际分布函数为 $H_i(y_{1i})$，$Z_{ij}(i = 1,\cdots,N;j = 1,\cdots,m_i)$ 的边际分布函数为 $G_{ij}(z_{ij})$.

在给定系统风险因子 $Y_0 = y_0$，银行风险因素 $Y_{1i} = y_{1i}(i = 1,\cdots,N)$ 的条件独立性假设下，某一贷款资产 $X_{ij}(i = 1,\cdots,N;j = 1,\cdots,m_i)$ 在 t 时刻之前的条件违约概率和生存概率分别为

$$D_{ij|y}^t = G_{ij}\left(\frac{F_{ij}^{-1}(q_{ij}(t)) - a_{ij}y_0 - b_{ij}Y_{1i}}{\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2}}\right) \quad (6)$$

$$S_{ij|y}^t = 1 - G_{ij}\left(\frac{F_{ij}^{-1}(q_{ij}(t)) - a_{ij}y_0 - b_{ij}Y_{1i}}{\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2}}\right) \quad (7)$$

以 N_t 表示该多银行贷款组合中截至 t 时刻发生的违约数量，则在给定外部影响因素的条件下，各贷款资产的违约行为相互独立，因此在条件独立性假设下，截至 t 时刻发生 k 项违约的条件概率为

$$P(N_t = k\,|\,(y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) = P(N_t = 0\,|\,(y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) \times \sum w_{i_1j_1} \times w_{i_2j_2} \times \cdots \times w_{i_kj_k} \quad (8)$$

由式(6)、(7) 和(8) 表达的条件违约概率分布规律的推导过程参看本文附录.

通过对条件概率 $P(N_t = k\,|\,(y_0,y_{11},\cdots,y_{1N}))$ 的积分，可以得到直到 t 时刻的发生 k 次违约的无条件概率

$$P(N_t = k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} P(N_t = k\,|\,(y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) \times h(y_0) \times \prod_{l=1}^{N} h(y_l)\,\mathrm{d}y_0\mathrm{d}y_{11}\cdots\mathrm{d}y_{1N} \quad (9)$$

其中，$h(y_0)$，$h(y_{1l})$ $(l = 1, \cdots, N)$ 为随机变量 y_0，y_{1l} 的边际概率密度函数.

由以上推导，可以得到截至 t 时刻，参考资产组合共发生的违约次数不超过 n 次的概率为

$$P(N_t \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(N_t = k) \tag{10}$$

如果考虑简化情况，即前述表达中资产池中所有参与组合的贷款违约强度都为常数 λ，所有系数 $a_{ij} = a$，$b_{ij} = b$，Y_0、Y_{1i}、Z_{ij} 为独立同分布的随机变量，则每一笔贷款资产 $X_{ij}(i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, m_i)$ 的条件违约概率为 $D_{t|y} = D^t_{ij|y}$. 截至 t 时刻，发生 k 项违约的条件概率为二项式分布

$$P(N_t = k \mid (y_0, y_{11}, \cdots, y_{1N})) = C_M^k D_{t|y}^k (1 - D_{t|y})^{M-k} \tag{11}$$

无条件违约概率分布情况可以同理得到.

3　基于多元正态分布假设的风险分析

对于以上多银行贷款池的多因素影响结构，本文在假设各影响因素服从正态分布假设的基础上，引入多元正态分布函数假设，分析研究多银行贷款资产组合违约风险.

对于多银行贷款资产组合，其单笔贷款资产的违约风险特征由式(3) 表示，相关性结构由式(4) 和(5) 表示. 假设 Y_0、Y_{1i}、Z_{ij} 为相互独立，服从标准正态分布的随机变量，则标准正态的性质可知 X_{ij} 也是服从标准正态分布的随机变量. 因此随机变量 $X_{ij}(i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, m_i)$ 的联合分布可以由多元正态 Copula 函数表示

$$C^G(u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{Nm_N}) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_{11}), \Phi^{-1}(u_{12}), \cdots, \Phi^{-1}(u_{Nm_N})) \tag{12}$$

其中：$u_{ij} = \Phi(x_{ij})$ $(i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, m_i)$；$R$ 为由式(4) 和(5) 决定的随机变量之间的线性相关系数矩阵.

根据前一部分的推导过程，由式(6)、(7) 可以得到某一笔贷款资产到 t 时刻的条件违约概率和生存概率分别为

$$D^t_{ij|y} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(q_{ij}(t)) - a_{ij}y_0 - b_{ij}y_{1i}}{\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2}}\right)$$

$$S^t_{ij|y} = 1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(q_{ij}(t)) - a_{ij}y_0 - b_{ij}y_{1i}}{\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2}}\right) \tag{13}$$

根据条件独立性假设，由式(9)、(10) 可以得到在多元正态分布假设下，多银行贷款组合的无条件违约概率分布规律.

4　数值计算分析

为了进一步明确分析研究该贷款组合的组合违约概率分布特征，下面对基于多元正态分布函数假设的多银行贷款组合违约风险进行数值计算分析，以考察不同因素对于多银行贷款池组合违约风险特性的影响. 限于数值计算条件，以下考虑多银行贷款池包含 2 个贷款银行，每一个参与银行的贷款数量为 100 项，此时该组合所含贷款数量为 200 项，并假设多因素影响结构中宏观风险因素的影响权重都相同，也即 $a_{ij} = a$ $(i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, m_i)$；每一个银行风险因素的权重相等，也即 $b_{ij} = b(i = 1, \cdots, N; j = 1, \cdots, m_i)$.

4.1　相关系数对组合风险的影响

对于单笔贷款资产，违约强度的高低意味着其自身违约风险的高低；但对于资产组合的违约行为，不仅要考虑单笔资产的违约风险，而且要考虑不同组合资产之间的违约相关关系对于组合违约风险的影响. 在条件独立性的假设下，通过给定宏观影响因子和银行风险因素可以得到多银行贷款池的条件违约概率分布规律. 本节分别在低违约强度和高违约强度的情况下，对不同相关系数对于条件违约概率的影响进行了数值计算分析，数值计算结果如表 1，表中空格部分为计算结果小于 10^{-5} 的情形. 从数值计算结果分析，在弱线性相关和强线性相关的条件下，在低违约强度情况最大发生可能性的组合违约次数分别为 $k = 1$ 和 $k = 0$，而在高违约强度情况则分别为 $k = 12$ 和 $k = 2$. 当高违约强度的情况下，组合发生多次违约的概率明显增大，相对而言，不发生违约或者发生较少的违约事件的概率显著减小. 在给定的风险因素条件下，较高的线性相关性带来了较高的条件生存概率，但是如果在不利的风险因素情况下，则较高的线性相关性将造成更高的条件违约概率.

表 1 正态分布下条件违约概率

Table 1 Conditional default probability based on gaussian distribution

违约次数 k	低违约强度		高违约强度	
	弱线性相关	强线性相关	弱线性相关	强线性相关
0	0.362	0.943	—	0.12
1	0.368	0.055	0.000 04	0.256
2	0.186	0.001 6	0.000 28	0.272
3	0.062	0.000 03	0.001 2	0.191
4	0.015	—	0.003 9	0.1
5	0.003	—	0.009 8	0.041
6	0.000 5	—	0.020 9	0.014
7	0.000 07	—	0.037 7	0.004
8	—	—	0.059 2	0.001
9	—	—	0.082 3	0.000 2
10	—	—	0.102 3	0.000 04

注：参数设定：$y_0 = 1, y_{11} = 0.5, y_{12} = 2$，期限 $t = 1$ 年；

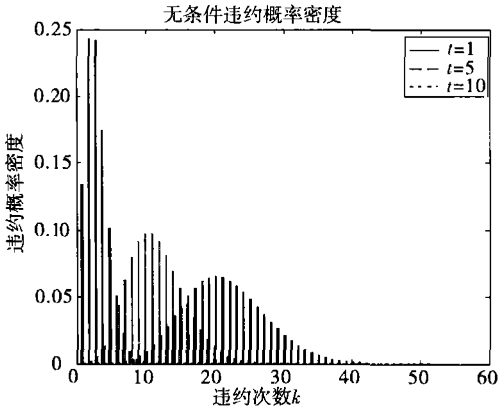
低违约强度，$\lambda = 0.01$；高违约强度，$\lambda = 0.1$；

弱线性相关，$a_{ij} = 0.1, b_1 = 0.1, b_2 = 0.1$；强线性相关，$a_{ij} = 0.3, b_1 = 0.4, b_2 = 0.4$.

4.2 无条件违约概率分析

在不同违约强度和线性相关程度的情况下，条件违约概率反映了在给定影响因素条件下组合违约风险的情况，但要考察全局的组合违约行为，则需要进一步分析在不同时间周期内无条件违约概率的情况. 在此分别计算了 1 年期、5 年期和 10 年期的无条件违约概率密度和累积违约概率，数值计算结果如图1所示. 其中，在1年期内，最有可能发生的违约次数为 1 次，违约次数在 10 次以上的情况几乎不发生；对于 5 年期的情况，最大违约可能性发生在 9 次，违约次数在 30 次以上的情况几乎不发生；对于 10 年期的情况，最有可能发生的违约次数为19 次，违约次数在40 次以上的情况几乎不发生.

这些数值分析表明，在多元正态分布假设下，本文所建立的多因素模型分析框架能够比较清楚刻画多银行贷款池这样一种特殊的资产组合的违约风险特征. 由于正态分布的良好的分析性质，该模型在相关组合产品的定价和风险管理的实际应用具有较好的发展前景.



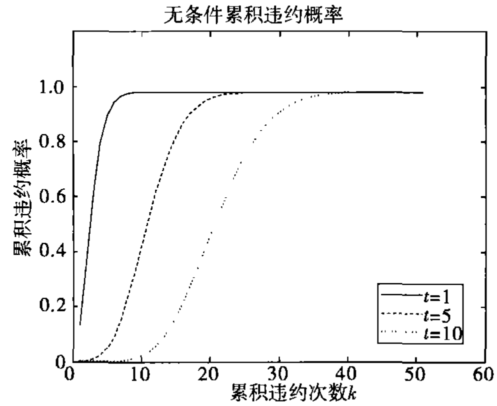


图 1 正态分布下无条件违约概率分布

Fig. 1 Nonconditional default probability distribution based on gaussian distribution

参数设定：$\lambda = 0.01, a_{ij} = 0.1, b_1 = 0.1, b_2 = 0.1$.

4.3　无条件生存概率随着时间的变化

以上的数值分析都是在给定的时间区间内的数值计算结果，为了观察和分析本文所研究的多银行贷款池的组合风险随着时间的变化规律，下面对其无条件生存概率随时间的变化做相应的数值计算和分析（如图2）．该资产组合的生存概率随着时间增大逐渐减小，也即发生违约事件的可能性越来越大．弱线性相关条件下的无条件生存概率略低于强线性相关情况的生存概率，在弱线性相关情况下，在3年以后几乎肯定发生违约事件，在强线性相关情况下，在5年后其生存概率逐渐趋近于零，发生违约事件的概率大大增加．

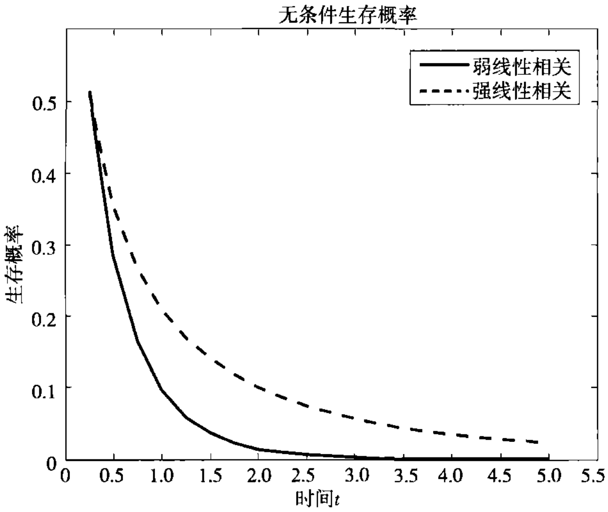


图2　正态分布下无条件生存概率

Fig. 2 Nonconditional survival probability based on gaussian distribution

参数设定：弱线性相关 $\lambda=0.01, a_{ij}=0.1, b_1=0.1, b_2=0.1$.

强线性相关 $\lambda=0.01, a_{ij}=0.3, b_1=0.4, b_2=0.4$.

以上的数值计算分析分别研究了多银行贷款池违约相关性对于条件违约行为的影响、不同时间周期内的无条件违约行为、以及组合违约行为随着时间周期的变化情况．在多银行贷款池的多因素模型构建的基础上，这些数值模拟计算更加明确地表达了多银行贷款池的违约风险特征，为相应的合成CDO产品定价提供良好的风险计量基础，进而使基于多银行贷款池的结构化融资方式可以成为商业银行分散转移中小企业贷款资产风险的有效途径．

5　结　论

由于多银行贷款池的分组契约结构特征，除宏观的系统风险之外，各参与银行的自身风险因素也将对其持有的贷款资产风险收益特征产生重要影响，由此形成的风险因素影响结构将不同于现有文献所建立的多因素模型．为此，本文在深入分析了多银行贷款池的组合违约风险影响因素特征的基础上，新建立了能够反映此贷款组合违约相关性结构特点的多因素模型，并以该模型的分析框架为基础，在条件独立性假设下得到了该贷款资产池的组合违约行为的随机特征．

同时，在多元正态分布假设下，本文根据条件独立性假设得到了多银行贷款组合的无条件违约概率分布．数值分析表明，在较高的线性相关性带来了较高的条件生存概率，但是如果在不利的风险因素情况下，则较高的线性相关性将造成更高的条件违约概率；该贷款组合的生存概率随着时间增大逐渐减小，发生较高违约次数的无条件概率逐渐增大，也即发生违约事件的可能性越来越大．另外，数值计算分析结果还表明，多元正态分布假设下的多因素模型能够比较清楚刻画本文所研究的多银行贷款池的组合违约风险．由于正态分布的良好的解析分析性质，该模型对于相关组合产品的定价和风险管理具有较好的应用前景．

当然，国际上对于多银行资产池这类特殊的资产组合之违约风险特征的研究还处在初步的阶段，国内还几乎从文献中看不到这类工作．但是中国经济发展对于中小企业融资不断高涨的需求，必将使这个科学问题得到越来越多学者的关注．在本文前述工作的基础上，进一步研究的方向还有很多．例如，由于正态分布无法反映市场实际数据所表现的风险特征之厚尾效应，尤其是“相关性微笑”[7] 现象在正态假设条件下无法获得合理解释，因此可以通过采用新的分布来描述组合违约风险的厚尾现象、通过极值理论和Copula函数等来研究资产组合的极端违约特征．另外，限于数值计算能力，本文数值计算部分所设定的多银行贷款池是一种简化情况，参与银行数量和贷款笔数对于数值计算的敏感性有待于进一步分析．与建立在情景模拟基础上的风险／收益测量与管理方法的未来计值方法结合，以及考虑其他商业信用风险相关技术，也是可以进一步研究的问题[16,17]．

参 考 文 献:

[1]林毅夫, 李永军. 中小金融机构发展与中小企业融资[J]. 经济研究, 2001, 36(1): 10—18.
Lin Justin Yifu, Li Yong-jun. Promoting the growth of medium and small-sized enterprises through the development of medium and small-sized financial institutions[J]. Economical Research Journal, 2001, 36(1): 10—18. (in Chinese)

[2]Andreas H, Andreas G. Multi-bank loan pool contracts: Enhancing the profitability of small commercial banks[J]. Applied Financial Economics, 2004, 14: 1239—1252.

[3]DeMarzo P M. The pooling and tranching of securities: A model of informed intermediation[J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(1): 1—35.

[4]张 维, 高雅琴. 多银行贷款池的风险分散和激励研究[J]. 管理评论, 2007, 19(7): 3—9.
Zhang Wei, Gao Ya-qin. Study on risk diversification and performance of multi-bank loan pool[J]. Management Review, 2007, 19(7): 3—9. (in Chinese)

[5]张 维, 邱 勇, 郝 刚. 基于多银行贷款池的合成 CDO 设计[J]. 现代财经, 2007, 27(9): 6—9.
Zhang Wei, Qiu Yong, Hao Gang. Design of synthetic CDO based on multi-bank loan pool[J]. Modern Finance and Economics(Journal of Tianjin University of Finance and Economics), 2007, 27(9): 6—9. (in Chinese)

[6]Li DX. On default correlation: A copula function approach[J]. The Journal of Fixed Income, 2000, 9: 43—54.

[7]Hull J, White A. Valuation of a CDO and nth to default CDS without monte carlo simulation[J]. The Journal of Derivatives, 2004, 2: 8—23.

[8]Frey R, McNeil A, Nyfeler M. Copula and credit models[J]. Risk, 2001, 10: 111—114.

[9]Das S R, Geng G. Correlated default processes: A criterion-based copula approach[J]. Journal of Investment Management, 2004, 2(2): 44—70.

[10]Clemente A Di, Romano C. Measuring and optimizing portfolio credit risk: A copula-based approach[J]. Economic Notes, 2004, 33(3): 325—357.

[11]Glasserman P, Suchintabandid S. Correlation expansions for CDO pricing[J]. Journal of Banking & Finance, 2007, 31(5): 1375—1398.

[12]Giesecke K. Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction[M]. Credit Risk: Models and Management, Vol. 2, D. Shimko (Editor), Riskbooks, London, 2004.

[13]程 功, 张 维, 熊 熊. 信息噪音、结构化模型与银行违约概率度量[J]. 管理科学学报, 2007, 10(4): 38—46.
Cheng Gong, Zhang Wei, Xiong Xiong. Noisy information, structural model and bank evaluation of default probability[J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10(4): 38—48. (in Chinese)

[14]Lando D. On cox processes and credit risky securities[J]. Review of Derivatives Research, 1998, (2): 99—120.

[15]梁世栋, 郭 仌, 方兆本. 随机违约强度下的信用风险期限结构研究[J]. 管理科学学报, 2005, 8(4): 74—79.
Liang Shi-dong, Guo Bing, Fang Zhaoben. Study of credit risk term structure with stochastic default intensity[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(4): 74—79. (in chinese)

[16]张 维, 杨 春, 熊 熊, 等. 商业银行信用风险管理技术分析[J]. 天津大学学报(社会科学版), 2007, 9(2): 159—163.
Zhang Wei, Yang Chun, Xiong Xiong, *et al.* Analysis of commer cial bank's credit risk management technology[J]. Journal of Tianjin University(Social Sciences), 2007, 9(2): 159—163. (in Chinese)

[17]田宏伟, 张 维, 章 飚. 未来计值风险测量与管理方法的几个核心问题[J]. 天津大学学报(社会科学版), 2001, 3(2): 165—169.
Tian Hong-wei, Zhang Wei, Zhang Biao. Several critical points about new risk measurement and management method: MARK-TO-FUTURE[J]. Journal of Tianjin University(Social Sciences), 2001, 3(2): 165—169. (in Chinese)

Portfolio default risks of multi-bank loan pools

ZHANG Wei[1,2], *QIU Yong*[1]

1. School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China;
2. Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin 300222, China

Abstract: Portfolio default risk is the key for loan portfolio pricing. Multi-bank loan pool is a special type of asset portfolio. According to its characteristics of Risk-Return tradeoff, factors influencing the portfolio default behavior can be separated into three parts: (1) systematic risk factor; (2) multi-bank risk factor; (3) loan's heterogeneous risk factor. This paper constructs a multi-factor model to grasp the portfolio default risk and the dependence of the loan pool. Under the conditional independence and multi-variable Gaussian distribution, the stochastic characteristics of the loan pool are obtained. In addition, the numerical analysis indicates that the above multi-factor model with the multi-variable Gaussian distribution can describe the portfolio default behavior of multi-bank loan pool.

Key words: default risk; dependence; loan pool; factor model

附 录:

(1)单笔贷款资产的条件违约概率

对于本文研究的多银行贷款组合,每一笔中小企业贷款资产的多因素结构如式(3),相关性结构由式(4)和(5)刻画.

在给定系统风险因子 $Y_0 = y_0$,银行风险因素 $Y_{1i} = y_{1i}(i = 1,\cdots,N)$ 的条件独立性假设下,某一贷款资产 $X_{ij}(i = 1,\cdots,N;j = 1,\cdots,m_i)$ 在 t 时刻之前的条件违约概率为

$$\begin{aligned} D_{ij|y}^t &= P\{\tau_{ij} \leqslant t \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})\} \\ &= P\{X_{ij} \leqslant x_{ij} \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})\} \\ &= P\left\{a_{ij}y_0 + b_{ij}Y_{1i} + Z_{ij}\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2} \leqslant x_{ij}\right\} \\ &= G_{ij}\left(\frac{F_{ij}^{-1}(q_{ij}(t)) - a_{ij}y_0 - b_{ij}Y_{1i}}{\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2}}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

在 t 时刻之前的条件生存概率分别为

$$\begin{aligned} S_{ij|y}^t &= P\{\tau_{ij} > t \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})\} \\ &= P\{X_{ij} > x_{ij} \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})\} \\ &= 1 - G_{ij}\left(\frac{F_{ij}^{-1}(q_{ij}(t)) - a_{ij}y_0 - b_{ij}y_{1i}}{\sqrt{1 - a_{ij}^2 - b_{ij}^2}}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

(2)贷款组合的条件违约概率

对于本文研究的多银行贷款组合,在给定系统风险因子 $Y_0 = y_0$,银行风险因素 $Y_{1i} = y_{1i}(i = 1,\cdots,N)$ 的条件独立性假设下,某一贷款资产 $X_{ij}(i = 1,\cdots,N;j = 1,\cdots,m_i)$ 在 t 时刻之前的条件违约概率和生存概率由式(6)、(7)表示.

以 N_t 表示该多银行贷款组合中截至 t 时刻发生的违约数量,则在给定外部影响因素的条件下,各贷款资产的违约行为相互独立,因此在条件独立性假设下,直到 t 时刻所有的贷款资产都没有发生违约的条件生存概率为

$$P(N_t = 0 \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{m_i} S_{ij|y}^t \tag{16}$$

以此类推,只有一项贷款发生违约的条件概率为

$$\begin{aligned} &P(N_t = 1 \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) = \\ &\quad (P(N_t = 0 \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{D_{ij|y}^t}{S_{ij|y}^t} \end{aligned} \tag{17}$$

令 $w_{ij} = \dfrac{D_{ij|y}^t}{S_{ij|y}^t}$,则可以推出截至 t 时刻,发生 k 项违约的条件概率为

$$\begin{aligned} &P(N_t = k \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) = \\ &\quad P(N_t = 0 \mid (y_0,y_{11},\cdots,y_{1N})) \times \\ &\quad \sum w_{i_1j_1} \times w_{i_2j_2} \times \cdots \times w_{i_kj_k} \end{aligned} \tag{18}$$

其中,$w_{i_1j_1} \times w_{i_2j_2} \times \cdots \times w_{i_kj_k}$ 是从 M 个组合资产中选择 k 个资产的组合乘积,因此共有 $C_M^k = \dfrac{M!}{k!(M-k)!}$ 组合,关于 $\sum w_{i_1j_1} \times w_{i_2j_2} \times \cdots \times w_{i_kj_k}$ 的计算可以参考文献[7].