易腐性产品运输设施选择博弈①

李 军[1], 蔡小强[2]
(1. 西南交通大学经济管理学院, 成都 610031; 2. 香港中文大学系统工程与工程管理系, 中国香港)

摘要: 易腐性产品的价值会随着时间的流逝而逐渐损失, 多个客户可以联合使用某种运输设施时, 如何对费用进行公平且稳定的分摊是合作能否进行的基础. 把易腐性产品的损失价值和运输费用之和作为总费用, 进而将易腐性产品的运输设施选择的费用分配问题构造成运输设施选择合作博弈, 证明了在易腐性产品负指数价值损失的情况下, 运输设施选择博弈的核心非空, 且为凹博弈, 并讨论了解的特征. 论文还证明具有附加运输费用的运输设施选择博弈的核心非空, 分析了核心与线性规划松弛的对偶最优解之间的关系. 论文对有约束设施选择博弈进行了分析, 并提出了进一步研究的方向.

关键词: 易腐性产品; 运输设施选择博弈; 负指数损失函数; 凹博弈
中图分类号: F224.32 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2009)01-0028-10

0 引 言

对一些易退化(deteriorating)的产品, 一般分为有确定的保质期、连续腐烂衰退两种. 也可以把产品的价值或者效用看成是时间的函数, 分为以下几类: (1)效用不变(constant-utility)产品, 即在可用的生命周期内没有可感知的价值损失, 如处方药品; (2)效用递减(decreasing-utility)产品, 即在整个生命周期, 效用递减, 如新鲜产品; (3)效用递增(increasing-utility)产品, 即在生命周期内效用递增, 如酒、古董等[1~3]. 本文考虑第二类效用递减产品, 也称易腐性产品(perishable products). 易腐性产品广泛存在于日常生产和生活中, 如新鲜蔬菜、水果、肉食、海鲜等. 这些产品随着时间的流逝其新鲜程度也在逐渐损失, 对销售商而言, 售价会降低; 对消费者而言可接受度降低. 因此可以认为易腐性产品的价值会随着时间而逐渐损失, 而且属于连续腐烂衰退类型, 其产品生命周期随机.

目前对易腐性产品的研究主要集中在库存、定价策略等方面[1~3]. 在产品随机生命周期情况下, 损失率为常数时, 损失为负指数分布; 损失率为变量时, 损失为韦伯分布. 负指数分布是韦伯分布的特例, 大量文献研究随机生命周期时一般都假定价值损失为负指数分布[1~3]. 对生鲜产品来说负指数分布也是符合实际的. 本文对负指数价值损失函数下易腐性产品的运输设施选择中的费用分配问题进行研究.

考虑在某一区域的一些客户, 每一个客户需求另一区域的一些易腐性产品, 这些产品需要用某种运输设施运送. 可供选择的运输设施具有不同的运输速度和运输费用. 一般来说, 运输费用越高, 则运输速度越快, 即运输时间越少. 对于一个客户, 他需要兼顾考虑所花的运输费用和可能造成的产品价值的损失, 然后确定采用哪一种运输设施.

易腐性产品价值损失, 会影响其售价, 进而影响收益, 因此可以把易腐性产品的损失价值看作

① 收稿日期: 2006-08-22; 修订日期: 2008-07-25.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70471039); 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0886); 国家社会科学基金资助项目(07BJY038); 西南交通大学"扬华之星"人才计划.
作者简介: 李 军(1967—), 女, 四川资阳人, 博士, 教授, 博士生导师. Email: lijun@ nec. swjtu. edu. cn

费用. 在客户需求量不大情况下, 若不同的客户能够分摊包括运输费用和易腐性产品的损失价值在内的总费用, 一些客户也许可以考虑由一个运输设施联合运输来供应他们的需求. 这是找到一个极小化总费用的运输设施选择问题. 考虑对应于选择的运输设施, 是否总费用能够被公平地或是稳定地在所有客户之间进行分摊, 该问题叫做易腐性产品运输设施选择的费用分配问题.

许多学者从不同角度研究了收益及费用分配方法. Young等研究分析了不同费用分配方法的应用[4,5]. Diaw讨论了费用分配方法作为一种协调机制[6]. Moulin和 Sprumont综述了具有生产外部性的公平分配问题的研究进展, 讨论了不同的分配方法[7]. 郑立群等对成本分配决策以及异质成本分配进行了讨论[8]. 孟庆国等应用智猪博弈讨论了电信网络互联互通中的利益分配问题[9]. 大家都知道合作博弈理论, 能够基于对公平性的定量测度来计算费用分配[4,5,10]. 合作博弈已在许多实际的费用分配问题中广为应用. 例如 1930年田纳西州流域当局 (Tennessee Valley Authority, TVA)对大坝系统的费用分摊问题的作法成为应用博弈论进行费用分配的经典案例, 该案例在有关费用分配问题的论文中广为出现[4,5,10,11]; González等人研究了外科费用的最优分配问题[12]; Fragnelli等人研究了城市固体废物的收集和处理中的费用分配问题[13]; Bjørndal等人研究了不同银行的客户共用 ATM机时, 银行之间的费用分配问题[14]; Engevall讨论了车辆路径问题中的费用分配问题[15]. 本文把易腐性产品运输设施选择的费用分配问题构造成一个易腐性产品运输设施选择博弈.

1　问题描述

某一区域有一些客户, 需求另一区域的某一种易腐性产品. 以 q_i 表示客户 i的需求数量, θ_i表示对应产品的损失指数, 有 $0<\theta_i<1$. 如果一个客户, 不只需求一种产品, 将把该客户看成几个客户 (对应于几种产品), 这样所有的客户都只需要一种产品, 以N表示客户集. 以F表示可供选择的运输设施集, 将产品运输到需求地, 使用运输设施 $i\in F$ 产生一个固定运输费用 $f_i\geqslant 0$ 对应的运输时间 $t_i\geqslant 0$. 显然对 $i, j\in F$, 若 $f_i\geqslant f_j$, 则 $t_i\leqslant t_j$.

假定 1) 所有客户的需求之和不超过运输设施容量; 2) 每一个客户的产品对运输设施无特别要求, 即能够使用每一种运输设施; 3) 价值损失函数是负指数函数, 当客户 j的需求由运输设施 i 完成时, 损失价值是 $q_j(1-e^{-\theta_j t_i})$; 4) 所有客户的总费用是每个客户的费用之和. 每一个客户都必须选择一个运输设施. 所有客户可以合作联合使用一个运输设施来运输他们需要的易腐性产品. 所有客户的每一个子集也能使用某一运输设施仅仅服务于它的成员. 每一个客户必须决定是与其他客户联合还是单独使用一个运输设施, 选择哪一个运输设施. 可以得到下面的定义.

定义 1　对 $i\in F, j\in N$, 易腐性产品的运输设施选择问题定义为

$$\min \sum_{i\in F}\left(f_i y_i+\sum_{j\in N} q_j\left(1-e^{-\theta_j t_i}\right) x_{ij}\right) \tag{1}$$

$$\begin{cases}\sum_{i\in F} x_{ij}=1 & \text{对所有 } j\in N\\ x_{ij}\leqslant y_i & \text{对所有 } i\in F, j\in N\\ x_{ij}, y_i=0\text{或 }1 & \text{对所有 } i\in F, j\in N\end{cases} \tag{2}$$

其中

$$y_i=\begin{cases}1 & \text{运输设施 } i\text{被使用, } i\in F\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{客户 } j\text{由设施 } i\text{服务, } i\in F, j\in N\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

式 (1) 表示总费用最小 (包括固定运输费用和损失价值), 约束 (2) 保证每一个客户仅被一个开放的设施服务. 上述运输设施选择问题以 TCP 表示.

易腐性产品运输设施选择的费用分配问题可以转换成易腐性产品运输设施选择博弈 (N, c). 以 $N=\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n\geqslant 2)$ 表示客户集合, N 的子集 $S\subseteq N$ 被称为联盟 (coalition), N 称为全联盟 (grand coalition). N 的所有子集有 2^N 个. 函数 $c: 2^N\to R$ 有 $c(\varnothing)=0$指分派给任意非空联盟 $S\subseteq N$ 的特征函数. $c(S)$ 称为博弈 (N, c) 中联盟 S 的费用, 表示联盟 S 中的客户在联合运输时产生的最小总费用 (固定运输费用与损失价值之和), 有以下定义.

定义 2　对给定的运输设施选择问题 TCP, 联盟 $S\subseteq N$ 的费用是联盟所能产生的最小总费

用, 定义对应的运输设施选择博弈 (N, c) 为

$$c(S) = \min_{\Pi_S} \sum_{i \in F} \Big(f_i + \sum_{j \in S} q_j (1 - e^{-\theta_j t_i}) \Big) \quad (3)$$

其中, Π_S 表示满足下面约束的解集

$$\begin{cases} \sum_{i \in F} x_{ij} = 1 & \text{对所有 } j \in S \\ x_{ij} \leqslant y_i & \text{对所有 } i \in F, j \in S \\ x_{ij}, y_i = 0 \text{或} 1 & \text{对所有 } i \in F, j \in S \end{cases}$$

令 $d_{ij} = q_j (1 - e^{-\theta_j t_i})$, 显然该问题类似于无约束的设施选址博弈, 具有相应的特征[16].

假如定义在集合 N 上的费用函数 $c(S)$ 是次加性的 (subadditive), 即对所有 $S, T \subset N$, 且 $S \cap T = \varnothing$ 有 $c(S \cup T) \leqslant c(S) + c(T)$, 那么所有的客户有动机联合构成一个联盟, 进行联合运输. 易腐性产品运输设施选择博弈 (N, c) 的主要问题是在全联盟构成时, 如何在客户之间划分 $c(N)$.

2 相关合作博弈研究现状

合作博弈中有许多解概念[17, 18], 例如夏普利值 (Shapley value)、稳定集 (stable set)、核心 (core)、讨价还价集 (bargaining set)、内核 (kernel)、核仁 (nucleolus)、c值 (c-value) 等. 核心是合作博弈中最重要的解概念, 核心对应的分配方案是一个公平的分配方案, 这时没有任何参与人的子集从全联盟中撤出构成自己的联盟会做的更好, 即没有任何一个子联盟有动机从全联盟中分离出来[19~21]. 对费用博弈的任意特征函数 c, 核心 $Core(c)$ 定义如下

$$Core(c) = \left\{ v \in R^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{j \in S} v_j \leqslant c(S), \forall S \subset N \\ \sum_{j \in N} v_j = c(N) \end{array} \right\} \quad (4)$$

一个博弈的核心也许是空的, 但核仁一直存在, 且是一个唯一值. 当核心非空时, 博弈被称为平衡的 (balanced), 这时核仁总在核心里. 夏普利值是一个唯一值, 即使核心非空, 夏普利值也不一定在核心里. Deng等人讨论了合作博弈的解的复杂性: 1) 非空性 (nonemptyness): 核心是否为空? 2) 凸特征 (convex characterization): 核心是否可以表示成一些很好定义的变量组合; 3) 测试非空 (testing nonemptiness): 博弈的一个给定的实例能在多项式时间里测试核心非空吗? 4) 检查成员 (checking membership): 一个分配是否属于核心能够在多项式时间里被检查吗? 5) 找到一个核心解 (finding a core member): 可能在多项式时间里找到核心的一个分配吗? 说明对许多合作博弈, 这些问题都是NP问题[22, 23]. 因此人们对合作博弈的研究重点放在一些具有良好特征的博弈上.

费用博弈有一类平衡博弈是凹博弈 (concave game), 又称子模博弈 (submodular)[17, 18, 24], 即对所有 $S, T \subset N$ 和 $l \in N$, 满足 $S \subset T \subset N - \{l\}$, 有下式成立

$$c(S \cup \{l\}) - c(S) \geqslant c(T \cup \{l\}) - c(T) \quad (5)$$

即任意参与者对一个联盟的边际贡献比对一个更大联盟的边际贡献大.

在合作博弈中, 价值博弈的凸性 (convexity) 和费用博弈的凹性 (concavity) 由于其对许多解概念拥有很好的特性而被广泛研究[25, 26]. 对该类博弈, 边际向量刚好是核心的极点, 核心是边际向量的凸组合, 夏普利值是核心的极点的重心; 核心是唯一的稳定集, 而且讨价还价集和核心重合, 内核和核仁重合. 一个博弈如果是凸的或凹的, 则也是半凸或半凹的[17]. 凸性和凹性成为合作博弈研究的一个主题. 例如, TVA项目博弈是凸的[10, 11], 机场博弈 (airport games) 是凹的[17]. 对于组合博弈 (combinatorial games), 凸性和凹性是一个稀有的特性, 如一般的最小生成树博弈 (minimum spanning tree games)、旅行售货员博弈 (travelling salesman games) 都不拥有凸性或者凹性特性[18, 27]. Hamers证明对应于有桥相连的循环图的传送博弈是凹的[28]. Herer研究了产生子模旅行售货员博弈的图结构[29]. Okamoto证明了有对称序列改变的 Kalmanson 矩阵 (permuted Kalmanson Matrix) 的旅行售货员博弈是子模的[30].

线性规划博弈 (linear programming games) 是一类具有良好特征的博弈[18, 31, 32]. 线性规划博弈是全平衡的. Owen介绍了线性生产博弈并说明它是另一类线性规划博弈. 与线性规划博弈相关的博弈已经吸引了许多的注意. 如分配博弈 (assignment games)[18]、最大背包博弈 (maximum packing games)、最小覆盖博弈(minimum covering games)[33]、划分博弈(partition game)[18]、运输博弈(transportation games)[34], 这些博弈都讨论了核心非空与线性规划松弛的对偶最优解之间的关系.

Kolen证明无容量设施选址博弈(uncapacitated facility location game)当且仅当其线性规划松弛没有整数间距, 即线性规划松弛的最优解为整数时, 其核心非空, 并且对应于简单选址问题的集覆盖问题能在多项式时间里求解[18]. Chardaire证明无容量设施选址博弈, 在对应的设施选址问题的线性规划松弛满足 Owen的加性假定条件下能被看作线性生产博弈[18]. Sharkey给出了双边分享设施博弈(two-sided shared facility game)有非空核心的条件[35]. Tamir证明对树图情况, 每一个客户有最大距离约束和最小总距离目标的设施选址问题, 其核心非空, 并且为线性规划最优对偶变量集合[36]. Goemans和 Skutella证明对无约束设施选址问题, 在设施呈直线排列且具有单峰连接费用情况(unimodal connection costs)下, 没有整数间距, 核心非空; 并说明对一般无约束设施选址问题确定核心是否非空属于NP-完全问题; 如果一个无约束设施选址博弈的核心非空, 那么核心能在多项式时间里计算得到, 并且一个给定的分配能在多项式时间里检验是否属于核心[16]. 对p-中心选址博弈(p-center location games)和p-中位选址博弈(p-median location games), Curiel分别给出了有非空核心的条件[18].

3 运输设施选择博弈的凹性

命题 1 对易腐性产品运输设施选择博弈 (N, c), 特征函数 c是严格次加性的.

证明 如果 c是次加性的, 对联盟 $S \subseteq N$, 有

$$c(S) = \min_{k\in F} p_k(S)$$

$$= \min_{k\in F}\left(f_k + \sum_{j\in S} q_j(1 - e^{-\theta_j t_k})\right) \quad (6)$$

其中, $p_k(S)$表示集合 S的客户用一个运输设施 k运输的总费用. 设对应于 $c(S)$的固定运输费用和运输时间分别是 f^S和 t^S, 则

$$c(S) = f^S + \sum_{j\in S} q_j(1 - e^{-\theta_j t^S})$$

$$\leqslant f_i + \sum_{j\in S} q_j(1 - e^{-\theta_j t_i}) \quad i \in F \quad (7)$$

1) 假设 $S, T \subset N$, $S \cap T = \varnothing$, c在 S和 T上具有次加性, 则 $c(S) = f^S + \sum_{j\in S} q_j(1 - e^{-\theta_j t^S})$, $c(T) = f^T + \sum_{j\in T} q_j(1 - e^{-\theta_j t^T})$. 以 $p^U(W)$表示集合 W的客户用集合 U的最优运输设施运输的总费用, 因此有

$$p^S(S\cup T) - c(S) - c(T)$$
$$= \sum_{j\in T} q_j(e^{-\theta_j t^T} - e^{-\theta_j t^S}) - f^T \quad (8)$$

$$p^T(S\cup T) - c(S) - c(T)$$
$$= \sum_{j\in S} q_j(e^{-\theta_j t^S} - e^{-\theta_j t^T}) - f^S \quad (9)$$

若 $t^S \leqslant t^T$, 则 $e^{-\theta_j t^S} \geqslant e^{-\theta_j t^T}$, 由式(8)得到 $p^S(S\cup T) - c(S) - c(T) < 0$; 若 $t^S \geqslant t^T$, 则 $e^{-\theta_j t^S} \leqslant e^{-\theta_j t^T}$, 由式(9)得到 $p^T(S\cup T) - c(S) - c(T) < 0$ 因此 $\min\{p^S(S\cup T), p^T(S\cup T)\} < c(S) + c(T)$.

假设对任意 $S', T' \subset N$, $S' \cup T' = S \cup T$, 且 $S' \cap T' = \varnothing$, c在 S'和 T'上具有次加性, 则同理得到

$$\min\{p^{S'}(S'\cup T'), p^{T'}(S'\cup T')\} < c(S') + c(T')$$

因此

$$\min_{k\in F} p_k(S\cup T) < \min_{S'\cup T' = S\cup T,\, S'\cap T' = \varnothing}\{c(S') + c(T')\} \quad (10)$$

所以

$$c(S\cup T) = \min_{k\in F} p_k(S\cup T) < c(S) + c(T)$$

即 c在 $S\cup T$上具有严格次加性.

2) 对 $i, j\in N$, $c(\{i\}) = f^{\{i\}} + q_i(1 - e^{-\theta_i t^{\{i\}}})$, $c(\{j\}) = f^{\{j\}} + q_j(1 - e^{-\theta_j t^{\{j\}}})$, 有 $p^{\{i\}}(\{i, j\}) = f^{\{i\}} + \sum_{k=i,j} q_k(1 - e^{-\theta_k t^{\{i\}}})$, $p^{\{j\}}(\{i, j\}) = f^{\{j\}} + \sum_{k=i,j} q_k(1 - e^{-\theta_k t^{\{j\}}})$.

所以

$$p^{\{i\}}(\{i, j\}) - c(\{i\}) - c(\{j\}) = q_j(e^{-\theta_j t^{\{j\}}} - e^{-\theta_j t^{\{i\}}}) - f^{\{j\}}$$

$$p^{\{j\}}(\{i, j\}) - c(\{i\}) - c(\{j\}) = q_i(e^{-\theta_i t^{\{i\}}} - e^{-\theta_i t^{\{j\}}}) - f^{\{i\}}$$

显然上两式至少一式小于 0, 即

$\min\{p^{\{i\}}(\{i, j\}), p^{\{j\}}(\{i, j\})\} - c(\{i\}) - c(\{j\}) < 0$, 因此, $\min_{k\in F} p_k(\{i, j\}) < c(\{i\}) + c(\{j\})$, 所以 $c(\{i, j\}) < c(\{i\}) + c(\{j\})$. c在 $|S\cup T| = 2$时具有严格次加性.

3) 根据 2), 类似 (1) 的证明, 可以得到 c 在 $|S \cup T| = 3$ 时具有严格次加性. 依次类推, 得到 c 在 N 上具有严格次加性. 证毕.

次加性说明任一客户集合都是使用一个运输设施要好于使用多个运输设施.

命题 2 对易腐性产品运输设施选择博弈 (N, c), 若 $l \notin S \subset N$, 考虑联盟 S 和 $S \cup \{l\}$, 对应于 $c(S)$ 和 $c(S \cup \{l\})$ 的运输时间分别是 t^S 和 $t^{S \cup \{l\}}$, 那么有 $t^{S \cup \{l\}} \leqslant t^S$.

证明 由命题 1, c 是次加性的, 有

$$c(S \cup \{l\}) = f^{S \cup \{l\}} + \sum_{j \in S \cup \{l\}} q_j (1 - e^{-\theta_j t^{S \cup \{l\}}}) \leqslant f^S + \sum_{j \in S \cup \{l\}} q_j (1 - e^{-\theta_j t^S}) \quad (11)$$

$$c(S) = f^S + \sum_{j \in S} q_j (1 - e^{-\theta_j t^S}) \leqslant f^{S \cup \{l\}} + \sum_{j \in S} q_j (1 - e^{-\theta_j t^{S \cup \{l\}}}) \quad (12)$$

由式 (11) 和 (12), 得到 $e^{-\theta_l t^{S \cup \{l\}}} \geqslant e^{-\theta_l t^S}$, 所以 $t^{S \cup \{l\}} \leqslant t^S$. 证毕.

$t^{S \cup \{l\}} \leqslant t^S$ 意味着 $f^{S \cup \{l\}} \geqslant f^S$, 说明越大的联盟越有可能使用昂贵的运输设施以获得少的运输时间.

命题 3 易腐性产品运输设施选择博弈 (N, c) 是凹博弈.

证明 令 $h(S, \{l\}) = c(S \cup \{l\}) - c(S)$, 则 $h(S, \{l\}) = f^{S \cup \{l\}} + \sum_{j \in S \cup \{l\}} q_j (1 - e^{-\theta_j t^{S \cup \{l\}}}) - f^S - \sum_{j \in S} q_j (1 - e^{-\theta_j t^S})$ 将式 (11) 和 (12) 代入, 得到

$$q_l (1 - e^{-\theta_l t^{S \cup \{l\}}}) \leqslant h(S, \{l\}) \leqslant q_l (1 - e^{-\theta_l t^S})$$

类似地有

$$q_l (1 - e^{-\theta_l t^{T \cup \{l\}}}) \leqslant h(T, \{l\}) \leqslant q_l (1 - e^{-\theta_l t^T})$$

所以

$$h(S, \{l\}) - h(T, \{l\}) \geqslant q_l (e^{-\theta_l t^T} - e^{-\theta_l t^{S \cup \{l\}}}) \quad (13)$$

又

$$\begin{aligned} h(S, \{l\}) - h(T, \{l\}) &= f^{S \cup \{l\}} + \sum_{j \in S \cup \{l\}} q_j (1 - e^{-\theta_j t^{S \cup \{l\}}}) - f^S - \sum_{j \in S} q_j (1 - e^{-\theta_j t^S}) - f^{T \cup \{l\}} - \sum_{j \in T \cup \{l\}} q_j (1 - e^{-\theta_j t^{T \cup \{l\}}}) + \\ &\quad f^T + \sum_{j \in T} q_j (1 - e^{-\theta_j t^T}) \end{aligned}$$

因为

$$c(T \cup \{l\}) = f^{T \cup \{l\}} + \sum_{j \in T \cup \{l\}} q_j (1 - e^{-\theta_j t^{T \cup \{l\}}}) \leqslant f^{S \cup \{l\}} + \sum_{j \in T \cup \{l\}} q_j (1 - e^{-\theta_j t^{S \cup \{l\}}})$$

$$c(S) = f^S + \sum_{j \in S} q_j (1 - e^{-\theta_j t^S}) \leqslant f^T + \sum_{j \in S} q_j (1 - e^{-\theta_j t^T})$$

将两式代入得到

$$h(S, \{l\}) - h(T, \{l\}) \geqslant \sum_{j \in T - S} q_j (e^{-\theta_j t^{S \cup \{l\}}} - e^{-\theta_j t^T}) \quad (14)$$

如果 $t^{S \cup \{l\}} \geqslant t^T$ 那么 $e^{-\theta_l t^{S \cup \{l\}}} \leqslant e^{-\theta_l t^T}$, 由式 (13) 得到 $h(S, \{l\}) - h(T, \{l\}) \geqslant q_l (e^{-\theta_l t^T} - e^{-\theta_l t^{S \cup \{l\}}}) \geqslant 0$; 否则, 由式 (14) 得到 $h(S, \{l\}) - h(T, \{l\}) \geqslant \sum_{j \in T - S} q_j (e^{-\theta_j t^{S \cup \{l\}}} - e^{-\theta_j t^T}) \geqslant 0$ 因此 $h(S, \{l\}) \geqslant h(T, \{l\})$, 即 $c(S \cup \{l\}) - c(S) \geqslant c(T \cup \{l\}) - c(T)$, 所以 (N, c) 是凹博弈. 证毕.

由于凹性是费用博弈非常好的特性, 因此对运输设施选择博弈, 其解具有下面一些特性:

1) 核心是边际向量的凸组合, 且与稳定集、讨价还价集重合. 夏普利值是博弈核心的极点的重心, 即边际向量 $\boldsymbol{m}^\sigma = (m_1^\sigma, m_2^\sigma, \cdots, m_n^\sigma)$ 的重心. 对所有 $i \in N$, 边际向量计算如下:

$$m_i^\sigma := c(\Gamma_i^\sigma \cup \{i\}) - c(\Gamma_i^\sigma) \quad (15)$$

其中, $\Gamma_i^\sigma := \{k \in N \mid \sigma(k) < \sigma(i)\}$, 意指全联盟的序 $\sigma \in \Omega$ 中 i 之前的点集合, Ω 指全联盟所有序的集合. 因此夏普利值 $\varphi \in R^N$ 如下计算:

$$\varphi_i = (n!)^{-1} \sum_{\sigma \in \Omega} m_i^\sigma \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (16)$$

2) 凹性意味着半凹, 半凹博弈的 τ – 值计算如下[37]:

$$\tau_i = m_i + g(N) g(\{i\}) \left[\sum_{k \in N} g(\{k\}) \right]^{-1} \quad (17)$$

$$(i = 1, \cdots, n)$$

其中, $g(\{i\})$ 为单点集 $i \in N$ 的间距函数. 这时分配与 TVA 项目的交互式费用消除方法 (Alternative Cost Avoided Method, ACA) 一致[10].

3) 核仁存在于核心中, 内核与核仁重合.

例 1 考虑四人易腐性产品运输设施选择博弈 PTCG. 已知客户需求及易腐性产品的损失指数示于表 1 中, 四种运输设施的固定运输费用和

运输时间示于表 2中. 这里四个客户的需求之和不超过运输设施的容量.

表 1　客户的需求数量和损失指数

Table 1 Demand quantities and decay index of customers

客户	1	2	3	4
需求	1.9	2.5	1.2	2.8
损失指数	0.09	0.15	0.23	0.28

表 2　运输设施的运输费用和运输时间

Table 2 Transportation cost and time of facilities

运输设施	A	B	C	D
固定运输费用	2.6	3.2	3.7	4.1
运输时间	4.6	3.5	2.6	2

显然该博弈是凹博弈. 对 $S\subseteq N$, 得到 $c(S)$ 示于表 3中. 根据核心的定义由表 3得到核心分配向量 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3, v_4)$ 满足

$v_1\leqslant 3.244$, $v_2\leqslant 3.846$, $v_3\leqslant 3.383$, $v_4\leqslant 4.628$, $v_1+v_2\leqslant 4.49$, $v_1+v_3\leqslant 4.028$, $v_2+v_3\leqslant 4.629$, $v_1+v_4\leqslant 5.272$, $v_2+v_4\leqslant 5.874$, $v_3+v_4\leqslant 5.411$, $v_1+v_2+v_3\leqslant 5.274$, $v_1+v_2+v_4\leqslant 6.262$, $v_1+v_3+v_4\leqslant 6.055$, $v_2+v_3+v_4\leqslant 6.391$, $v_1+v_2+v_3+v_4=6.704$

将核心示于图 1中, 核心是在正四面体中一个 18个顶点的凸多面体.

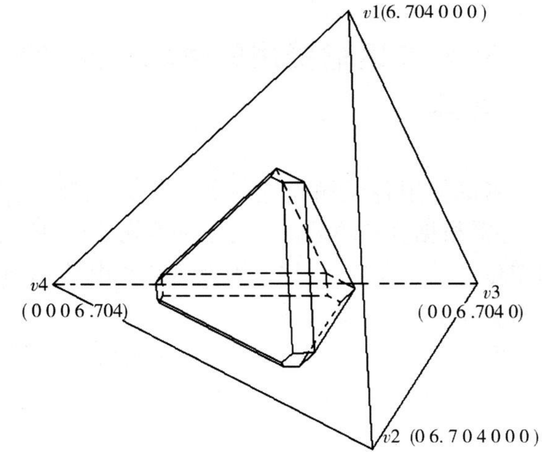

图 1　博弈 **PTCG**的核心构形

Fig. 1 The core of the game PTCG

据式(15)计算边际向量示于表 4中. 显然边际向量刚好是图 1中核心的各顶点. 然后计算夏普利值 $\varphi(S)$ 及 τ – 值 $\tau(S)$ 示于表 3中.

核心是所有边际向量的凸组合, 即核心 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, v_3, v_4)$, 满足 $v_1=\sum_{i\in\sigma_i}\mu_i m_1^{\sigma}$, $v_2=\sum_{i\in\sigma_i}\mu_i m_2^{\sigma}$, $v_3=\sum_{i\in\sigma_i}\mu_i m_3^{\sigma}$, $v_4=\sum_{i\in\sigma_i}\mu_i m_4^{\sigma}$, 且 $\sum_{i\in\sigma_i}\mu_i=1$.

由于为凹博弈, 这时夏普利值、核仁在核心里; 由于为半凹博弈, 参与者少于 4个时, c – 值也在核心里.

表 3　博弈 **PTCG**的特征函数值与解

Table 3 Characteristics function and solution of coalitions of game PTCG

S	{1}	{2}	{3}	{4}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 4}	{2, 4}	{3, 4}	{1, 2, 3}	{1, 2, 4}	{1, 3, 4}	{2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4}
$c(S)$	3.244	3.846	3.383	4.628	4.49	4.028	4.629	5.272	5.874	5.411	5.274	6.262	6.055	6.391	6.704
$\tau(S)$	1.238	1.657	1.37	2.439	2.895	2.608	3.027	3.677	4.096	3.809	4.265	5.334	5.047	5.466	6.704
$\varphi(S)$	1.19	1.703	1.326	2.485	2.893	2.516	3.029	3.675	4.188	3.811	4.219	5.378	5.001	5.514	6.704

表 4　博弈 **PTCG**的边际向量

Table 4 Marginal vectors of game PTCG

序列	1, 2, 3, 4	1, 2, 4, 3	1, 3, 2, 4	1, 3, 4, 2	1, 4, 2, 3	1, 4, 3, 2	2, 3, 4, 1	2, 3, 1, 4	2, 4, 1, 3	2, 4, 3, 1	2, 1, 3, 4	2, 1, 4, 3
m_1^{σ}	3.2441	3.2441	3.2441	3.2441	3.2441	3.2441	0.313	0.6441	0.3878	0.313	0.6441	0.6441
m_2^{σ}	1.2461	1.2461	1.2461	0.6488	0.9898	0.6488	3.8461	3.8461	3.8461	3.8461	3.8461	3.8461
m_3^{σ}	0.7834	0.4425	0.7834	0.7834	0.4425	0.7834	0.7834	0.7834	0.4425	0.5173	0.7834	0.4425
m_4^{σ}	1.4304	1.7714	1.4304	2.0277	2.0277	2.0277	1.7615	1.4304	2.0277	2.0277	1.4304	1.7714
序列	3, 1, 2, 4	3, 1, 4, 2	3, 2, 4, 1	3, 2, 1, 4	3, 4, 1, 2	3, 4, 2, 1	4, 1, 2, 3	4, 1, 3, 2	4, 2, 3, 1	4, 2, 1, 3	4, 3, 1, 2	4, 3, 2, 1
m_1^{σ}	0.6441	0.6441	0.313	0.6441	0.6441	0.313	0.6441	0.6441	0.313	0.3878	0.6441	0.313
m_2^{σ}	1.2461	0.6488	1.2461	1.2461	0.6488	0.9799	0.9898	0.6488	1.2461	1.2461	0.6488	0.9799
m_3^{σ}	3.3834	3.3834	3.3834	3.3834	3.3834	3.3834	0.4425	0.7834	0.5173	0.4425	0.7834	0.7834
m_4^{σ}	1.4304	2.0277	1.7615	1.4304	2.0277	2.0277	4.6277	4.6277	4.6277	4.6277	4.6277	4.6277

4 有附加运输费用的运输设施选择博弈

考虑使用各运输设施时除了固定运输费用外, 还需根据客户的运量支付附加运输费用. 假定每单位产品由设施 i运输时附加运输费用是 a_i. 显然对 $f_i \geqslant f_j$, 有 $a_i \geqslant a_j$和 $t_i \leqslant t_j$.

定义 3 给定有附加运输费用的运输设施选择问题 TCP_A, 对应的运输设施选择博弈 (N, c_A) 定义为

$$c_A(S) = \min_{\Pi_S}\left(\sum_{i\in F} f_i + \sum_{j\in S} q_j(1 - e^{-\theta_j t_i}) + \sum_{j\in S} a_i q_j\right) \tag{18}$$

命题 4 对有附加运输费用的易腐性产品运输设施选择博弈 (N, c_A), 如果 c_A 是次加性的, 则核心问题等价于运输设施选择问题 TCP_A 的线性规划松弛的对偶问题, 当且仅当 TCP_A 的线性规划松弛没有整数间距时, 核心非空.

证明 令 $d_{ij} = q_j(1- e^{-\theta_j t_i})$, $e_{ij} = a_i q_j$, 则 $w_{ij} = e_{ij} + d_{ij}$, 那么

$$c_A(S) = \min_{\Pi_S}\left(\sum_{i\in F} f_i + \sum_{j\in S} e_{ij} + \sum_{j\in S} d_{ij}\right)$$
$$= \min_{\Pi_S}\left(\sum_{i\in F} f_i + \sum_{j\in S} w_{ij}\right)$$

该问题可以被看作一个无约束的选址问题博弈[16], 其中 f_i为固定费用, w_{ij}为连接费用. 不失一般性, TCP_A 线性规划松弛的对偶问题 $DTCP_A$ 为

$$\max\left(\sum_{j\in N} v_j\right)$$
$$\begin{cases} v_j \leqslant w_{ij} + u_{ij} & \text{对所有 } i\in F \text{ 和 } j\in N \\ \sum_{j\in N} u_{ij} \leqslant f_i & \text{对所有 } i\in F \\ u_{ij} \geqslant 0 & \text{对所有 } i\in F \text{ 和 } j\in N \end{cases}$$

从对偶问题可以得到下面的问题 CAP

$$\max\left(\sum_{j\in N} v_j\right)$$
$$\sum_{j\in S} v_j \leqslant f_i + \sum_{j\in S} w_{ij} \quad \text{对所有 } i\in F \text{ 和 } S\subseteq N$$

当特征函数具有次加性时

$$c_A(S) = \min_{i\in F}\left\{f_i + \sum_{j\in S} w_{ij}\right\} \tag{19}$$

因此 CAP 的最优解是博弈 (N, c_A) 的核心. 由于 $DTCP_A$ 的约束比 CAP 的约束强, 故 $DTCP_A$ 的最优解也是 (N, c_A) 的核心. 证毕.

命题 5 对有附加运输费用的运输设施选择问题 TCP_A, 价值损失函数是运输设施 i的单峰函数.

证明 设共有 m 种运输设施. 单峰函数意味着存在一个所有设施的序 1, …, m, 对任意一个客户 j, 存在一个设施 i^*, 满足对 $i\leqslant i^*$, w_{ij}非增, 和对 $i\geqslant i^*$, w_{ij} 非降.

按照 t_i 的降序 (或增序) 排列所有设施, 记为 1, …, m. 对 $j\in N$, 由于 $d_{ij} = q_j(1- e^{-\theta_j t_i})$ 是 t_i的增函数, 所以 d_{ij} 根据设施 i降序 (或增序) 排列, 即 d_{ij} 是单峰函数. 由于 $e_{ij} = a_i q_j$ 是 a_i 的增函数, 即是 t_i 的减函数, 因此 e_{ij} 根据设施 i增序 (或减序) 排列. 由于 $w_{ij} = e_{ij} + d_{ij}$, 因此对 $j\in N$, 存在设施 i^* 满足 $w_{i^*j} = \min\{w_{ij}\}$, 所以对 $i\leqslant i^*$, w_{ij} 非增, 对 $i\geqslant i^*$, w_{ij} 非降. 证毕.

Goemans和 Skutella证明了设施呈直线排列且具有单峰连接费用的无约束设施选址问题没有整数间距, 并且核心非空[16]. 本文所有运输设施的费用只与设施类型有关, 与位置无关, 因此类似得到下面的命题.

命题 6 如果 c_A 是次加性的, 对有附加运输费用的运输设施选择问题 TCP_A 没有整数间距, 并且博弈 (N, c_A) 的核心非空.

由命题 4 可知, 线性规划松弛的对偶最优解属于核心.

5 讨论与总结

由于 N 的所有子集有 2^n 个, 数量是参与者个数的指数形式, 若每一子集的特征函数 $c(S)$ 的确定又具有一定复杂性, 因此合作博弈的任何解都是不容易得到的. 一般是找特殊的博弈结构, 如线性规划博弈、凹博弈等, 再分析解的特征. 但即使是凹博弈, 由于全联盟的序为 $n!$ 个, 边际向量的计算也较为麻烦, 要表示出整个核心也有一定难度. 具体应用时常求一些数值解如夏普利值、τ–值等. 对一些具体的问题有时计算式可以简化. 在计算较复杂时, 也可以设计启发式方法求解. 对于本问题由于线性规划松弛的对偶最优解属于核心, 也可以利用线性规划的方法求解该问题, 但是

为多重解, 故在例 1中并未示出.

当易腐性产品运输设施选择问题存在一些约束, 如当一个设施不能服务客户的所有需求时, 该问题就存在着容量约束; 假如客户集被划分成几个子集, 一个设施只能服务一个子集的客户, 即存在着不相容约束; 假如每一个客户仅能由某一特定的设施集合服务. 考虑下面的例子.

例 2　对有约束的运输设施选择的费用分配博弈 (N, c), 客户集 $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 有需求为 $q = \{1.6, 3.3, 1.3, 2.4, 1.8\}$, 损失指数为 $\theta = \{0.15, 0.13, 0.2, 0.12, 0.08\}$. 设施集 $F = \{A, B, C, D\}$, 有固定运输费用为 $f = \{f_A, f_B, f_C, f_D\} = \{4.6, 3.5, 2.7, 2\}$, 运输时间为 $t = \{t_A, t_B, t_C, t_D\} = \{2.6, 3.2, 3.7, 4.1\}$. 假定每种设施只能执行两项运输任务.

求解得到该运输设施选择问题的最优分配方案为 $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1, x_{A5} = 1, x_{B1} = 1, x_{B3} = 1, x_{C2} = 1, x_{C4} = 1$, $\min z = 12.91$, 即设施 A运输第 5种产品, 设施 B运输第 1、3种产品, 设施 C运输第 2、4种产品. 但该问题的线性规划松弛无整数解, 因此核心不存在.

华中生等说明合作是提高供应链竞争力的途径, 也是增强供应链企业抵御经营风险的重要手段[38]. 在合作的多个个体共同使用某种资源时, 需要对发生的费用以公平、公正、合理、稳定的方式进行分摊, 这样个体才有动机进行合作. 费用分配的目标就是设计解决这些问题的标准和方法. 本文研究了易腐性产品运输设施选择的费用分配问题, 应用合作博弈理论, 把易腐性产品的损失价值和运输费用之和作为总费用, 将费用分配问题构造成运输设施选择合作博弈. 论文得到了在负指数价值损失函数下, 运输设施选择博弈为具有良好特征的凹博弈的结论, 对于易腐性产品运输设施选择的费用分配具有重要的意义. 论文还讨论了具有附加运输费用的运输设施选择博弈, 应用无约束设施选址博弈的结论, 证明了博弈的核心非空, 并说明线性规划松弛的对偶最优解属于核心. 论文讨论了有约束的运输设施选择博弈的核心可能为空.

有约束的运输设施选择博弈核心非空的条件以及对其他价值损失函数的运输设施选择博弈的解的特征都还有待进一步研究.

参 考 文 献:

[1] Raafat F. Survey of literature on continuously deteriorating inventory models[J]. The Journal of the Operational Research Society, 1991, 42(1): 27—37.

[2] Nahmias S. Perishable inventory theory: A review[J]. Operations Research, 1982, 30(4): 680—708.

[3] Goyal S K, Giri B C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134: 1—16

[4] Young H P. Cost allocation[A]. In Handbook of Game Theory, Volume 2[M]. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 1994: 1193—1235.

[5] Young H P. Cost Allocation: Methods, Principles, Applications[M]. Amsterdam: Elseviers Science Publishers B. V., 1994

[6] Diaw K. Cost Allocation As A Coordination Mechanism[R]. Working Paper, Tilburg: Center for Economic Research, Tilburg University, 2003

[7] Moulin H, Sprumont Y. Fair Allocation of Production Externalities: Recent Results[R]. Working Paper, Montréal: Départment de Sciences économiques, Université de Montréal, 2005.

[8] 郑立群, 李瑞函, 吴育华. 异质成本分配模型的公理体系及分配方法[J]. 管理科学学报, 2003, 6(6): 15—20.
Zheng Liqun, Li Ruihan, Wu Yuhua. Axiomatic analysis of heterogeneous cost sharing model and its methods[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(6): 15—20. (in Chinese)

[9] 孟庆国, 陈　剑. 电信网络互联互通利益分配模型及激励机制[J]. 管理科学学报, 2003, 6(6): 40—45.
Meng Qingguo, Chen Jian. Model of interests allocation in telecom network interconnection and incentive mechanism analysis[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(6): 40—45. (in Chinese)

[10] Tijs S H, Driessen T S H. Game theory and cost allocation problems[J]. Management Science, 1986, 32: 1015—1028.

[11] Straffin P D, Heaney J P. Game theory and the tennessee valley authority[J]. International Journal of Game Theory, 1981, 10: 35—43.

[12] González P, Herrero C. Optimal sharing of surgical costs in the presence of queues[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2004, 59: 435—446.

[13] Fragnelli V, Iandolino A. A cost allocation problem in urban solid wastes collection and disposal[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2004, 59: 447—463.

[14] Bjørndal E, Hamers H, Koster M. Cost allocation in a bank ATM network[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2004, 59: 405—418.

[15] Engevall S. Cost Allocation in some Routing problems-A Game Theoretic Approach[D]. Sweden: Division of Optimization Department of Mathematics, Linköping Institute of Technology, 2002.

[16] Goemans M X, Skutella M. Cooperative facility location games[J]. Journal of Algorithms, 2004, 50: 194—214.

[17] Driessen T S H. Cooperative Games, Solutions and Applications[M]. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[18] Curiel I. Cooperative Games Theory and Applications[M]. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[19] Shapley L S. On balanced sets and cores[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1967, 14: 453—460.

[20] Peleg B. Axiomatizations of the core[A]. In: Handbook of Game Theory, Volume 1[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1992. 397—412.

[21] Driessen T S T. The core of a cooperative game: Bounds and characterizations[A]. In: Surveys in Game Theory and Related Topics[M]. Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1987. 181—208.

[22] Deng X, Papadimitriou C H. On the complexity of cooperative solution concepts[J]. Mathematics of Operations Research, 1994, 19: 257—266.

[23] Deng X, Ibaraki T, Nagamochi H. Algorithmic aspects of the core of combinatorial optimization games[J]. Mathematics of Operations Research, 1999, 24: 751—766.

[24] Shapley L S. Cores of convex games[J]. International Journal of Game Theory, 1971, 1: 11—26.

[25] Faigle U, Kern W. On the core of ordered submodular cost games[J]. Mathematical Programming Ser A, 2000, 87: 483—499.

[26] Velzen B, Hamers H, Norde H. Characterizing convexity of games using marginal vectors[J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 143: 298—306.

[27] Borm P, Hamers H, Hendrickx R. Operations research games: A survey[J]. Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Top, 2001, 9(2): 139—216.

[28] Hamers H. On the concavity of delivery games[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 99: 445—458.

[29] Herer Y T. Submodularity and the traveling salesman problem[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 114: 489—508.

[30] Okamoto Y. Traveling salesman games with the Monge property[J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 138: 349—369.

[31] Samet D, Zemel E. On the core and dual set of linear programming games[J]. Mathematics of Operations Research, 1984, 9(2): 309—316.

[32] Potters J. Linear optimalization games[A]. In: Surveys in Game Theory and Related Topics[M]. Amsterdam: Stichting Mathematisch Centrum, 1987. 251—275.

[33] Deng X, Ibaraki T, Nagamochi H, *et al.* Totally balanced combinatorial optimization games[J]. Mathematical Programming, 2000, 87, (3): p441—452.

[34] Sánchez-Soriano J, López M A, García-Jurado I. On the core of transportation games[J]. Mathematical Social Sciences, 2001, 41: 215—225.

[35] Sharkey W W. Cores of games with dixed costs and shared facilities[J]. International Economic Review, 1990, 31: 245—262.

[36] Tamir A. On the core of cost allocation games defined on location problems[J]. Transportation Science, 1993, 27:

81— 86.

[37] Driessen T S H, Tijs S H. Nijmegen. The τ-value, the core and semiconvex games[J]. International Journal of Game Theory, 1985, 14: 229—247.

[38]华中生, 孙毅彪, 李四杰. 单周期产品需求不确定性对供应链合作的影响[J]. 管理科学学报, 2004, 7(5): 40— 47.

Hua Zhongsheng, Sun Yibiao, Li Sijie. Effect of demand uncertainty on supply chain cooperation for single-period product [J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(5): 40—47. (in Chinese)

Transportation facility choice game of perishable products

LI Jun, CAI Xiao-qiang

1. School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

2. Department of System Engineering and Engineering Management, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China

Abstract　The values of perishable products decay as time passes. If the total costs can be allocated fairly or stably among customers, there is an incentive to cooperate for different customers. Considering the transportation cost and decay value, the cost allocation problem is formulated as a transportation facility choice game. It is proved that the choice game has a non-empty core and also concave in case of negative exponential decay function. The characteristics of some solutions are analyzed. It is shown that the choice game with additional transportation cost has a non-empty core. The relation is discussed between the core and the dual of the linear programming relaxation. Finally the choice game with constraints are discussed, and further research areas are presented.

Key words　perishable products; transportation facility choice game; non-exponential decay; concave game