

多元广义自回归条件密度建模及应用^①

蒋翠侠^{1,2}, 张世英²

(1 山东工商学院数学与信息科学学院, 烟台 264005 2 天津大学管理学院, 天津 300072)

摘要: 广义自回归条件密度 (GARCD) 建模为描述金融资产收益的概率密度函数提供了 1 种工具, 这对于全面、准确把握金融资产收益的动态行为具有重要的意义. 在 1 元 GARCD-JSU 模型的基础上, 提出了多元 GARCD-JSU 模型并给出其向量表示; 利用动态条件相关设定, 给出多元 GARCD-JSU 模型的简化表示; 接着给出了模型参数的三阶段极大似然估计方法和诊断检验方法. 最后, 对中国股市进行了实证研究.

关键词: GARCD 模型; JSU 分布; 极大似然估计

中图分类号: F224.0 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2009)01-0082-11

0 引言

随着金融理论与实践的深入, 正态分布的假定受到越来越多的挑战, 因此仅从前二阶矩出发研究金融时间序列的分布特征存在一定的局限性. Harvey 等利用非中心学生 t 分布提出了广义自回归条件偏度 (GARCHS) 模型^[1]; Jondeau 等基于非中心学生 t 分布提出了广义自回归条件偏度、峰度 (GARCHSK) 模型^[2]; Leon 等基于正态密度的 Gram-Charlier 展开也给出了广义自回归条件偏度、峰度 (GARCHSK) 模型^[3]; 许启发进一步给出了一元 GARCHSK 模型的一整套建模技术^[4]. 无论是 GARCH 模型、GARCHS 模型, 还是 GARCHSK 模型, 它们都是对金融时间序列的矩进行自回归设定, 所以统称为广义自回归条件矩 (GARCM) 模型. GARCM 模型为描述金融时间序列的矩序列动态性提供了一种工具, 其含意也较为直观. 然而, 有的金融时间序列其高阶矩不一定存在, 这样 GARCM 模型就难以奏效. 同时, 由于 GARCM 模型将动态性直接强加于偏度、峰度以及不含于偏度和峰度的形状参数上, 存在着计算

上的困难, Hansen 基于有偏学生 t 分布给出的广义自回归条件密度 (GARCD) 模型则能避免这一情况的发生^[5]. 在 GARCD 模型研究中, 不同的学者采用了不同的分布形式来拟金融数据的分布特征, 具有代表性的有: Premaratne 和 Bera 采用了 Pearson IV 型分布^[6]; Yan 和 Choi 等采用了 Johnson SU 型分布 (简记为 JSU 分布)^[7,8]; 蒋翠侠讨论了 JSU 分布的一些性质, 验证了 JSU 分布对金融时间序列的刻画能力, 建立了一元 GARCD-JSU 模型, 并给出模型的参数估计与诊断检验方法^[9].

金融风险管理中, 往往需要同时研究若干个金融市场或资产风险之间关系, 这依赖于多元波动性建模工作的开展. 在一阶矩波动性建模领域, 熊熊等利用多个时间序列之间的协整关系, 建立了误差校正模型, 研究了多个市场之间的信息传递效率^[10]. 在二阶矩波动性建模领域, Bollerslev 等提出了多元 GARCH 模型, 用于同时讨论多个金融资产动态风险之间相互关系^[11]; 樊智等基于遗传算法进一步研究了多元 GARCH 模型的参数估计方法^[12], 王明进等基于独立成分分解技术给

① 收稿日期: 2007-12-18; 修订日期: 2008-10-31.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70471050); 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目 (08JC790062); 中国博士后科学基金资助项目 (20060400192); 全国统计科研计划资助重点项目 (2006B07).

作者简介: 蒋翠侠 (1973-), 女, 安徽砀山人, 博士生, 讲师. Email: jiangcx1973@163.com

出多元波动率的估计方法^[13]; 吴振翔等利用 Copula 技术可以连接边缘分布的特点, 将其与 GARCH 模型结合对投资组合风险进行了研究^[14]. 在高阶矩波动性建模领域, 许启发、张世英提出了多元 GARCHSK 模型及其建模方法^[15]; 蒋翠侠等在利用多元 GARCHSK 模型进行高阶矩风险测度基础上, 给出了带有高阶矩风险的动态组合投资策略^[16]. 除了可以对金融时间序列的矩进行研究以外, 还可以研究其整个密度函数. 洪永森指出: 概率密度函数可以最好地描述金融时间序列的不确定性^[17]. 而 GARCD 建模则为实现整个密度函数预测提供了一条有效的途径.

本文遵循 GARCD 模型的建模思路, 建立了一个新的多元 GARCD-JSU 模型并给出其向量表示. 鉴于多元 GARCD-JSU 模型的“维数灾难”问题, 基于动态条件相关设定, 给出其简化表示; 接着, 给出了模型参数的三阶段极大似然估计方法和诊断检验方法. 最后, 利用多元 GARCD-JSU 模型对中国股市进行了实证研究, 该模型既能描述单个市场的动态行为, 又能够描述多个市场之间的动态关联关系.

1 一元及多元 JSU 分布

1.1 一元 JSU 分布

Johnson 分布体系是由 Johnson 对服从标准正态分布的随机变量实施不同的变换得到的, 主要包括三种类型: 对数正态系统 (SL)、有界系统 (SB)、无界系统 (SU)^[18]. 由于对随机变量的取值范围进行限制, SL 型和 SB 型分布均不适宜用于对金融时间序列的分布进行拟合, 而 SU 型分布则受到金融计量建模者的青睐.

设 Z 为标准正态随机变量, JSU 分布随机变量 Y 可由 Z 经双曲正弦变换

$$Y = \xi + \lambda \sinh\left(\frac{Z - \gamma}{\sigma}\right)$$

得到, 记为 $Y \sim \text{JSU}(\xi, \lambda, \gamma, \sigma)$. 式中, $\xi, \lambda (\lambda > 0), \gamma, \delta (\delta > 0)$ 分别为位置参数、尺度参数、偏度参数和峰度参数. 相反, 随机变量 Y 经逆双曲正弦变换

$$Z = \gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{Y - \xi}{\lambda}\right)$$

可以得到标准正态随机变量 Z . 式中, $\sinh(y) = (e^y - e^{-y})/2$ 为双曲正弦变换, $\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ 为逆双曲正弦变换.

根据随机变量的概率密度函数及随机变量函数的概率密度函数之间对应关系, 容易得到服从 JSU 分布的随机变量 Y 的概率密度函数为

$$f(y; \xi, \lambda, \gamma, \delta) = J\phi(z) = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{1 + \left(\frac{y - \xi}{\lambda}\right)^2}} \phi\left(\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{y - \xi}{\lambda}\right)\right) \quad (1)$$

式中, $\phi(\cdot)$ 为标准正态随机变量的概率密度函数; J 为变换的 Jacobian 行列式, 取值为

$$J = \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{1 + \left(\frac{y - \xi}{\lambda}\right)^2}}$$

由于 $\sinh(\cdot)$ 与 $\sinh^{-1}(\cdot)$ 都为增函数, 对于服从 JSU 分布的随机变量 Y 的累积分布函数, 有

$$\begin{aligned} F(y; \xi, \lambda, \gamma, \delta) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr\left(\xi + \lambda \sinh\left(\frac{Z - \gamma}{\delta}\right) \leq y\right) \\ &= \Pr\left(Z \leq \gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{y - \xi}{\lambda}\right)\right) \\ &= \Phi\left(\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{y - \xi}{\lambda}\right)\right) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数.

此外, 对于服从 $\text{JSU}(\xi, \lambda, \gamma, \delta)$ 分布的随机变量 Y , 可以对其实施标准化处理 $Y = (Y - \xi) / \lambda$, 得到标准化的随机变量 Y 而 $Y \sim \text{JSU}(0, 1, \gamma, \delta)$.

事实上, 在式 (1) 中, 令 $y = (y - \xi) / \lambda$ 可得

$$\begin{aligned} f(y; \xi, \lambda, \gamma, \delta) &= \frac{\delta}{\lambda \sqrt{1 + y^2}} \phi(\gamma + \delta \sinh^{-1}(y)) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\delta}{\sqrt{1 + y^2}} \phi(\gamma + \delta \sinh^{-1}(y)) \end{aligned}$$

根据随机变量概率密度函数与随机变量函数概率密度函数之间的关系, $1/\lambda$ 为变换的 Jacobian 行列式, 则可以得到 Y 的概率密度函数为

$$\tilde{f}(y; 0, 1, \gamma, \delta) = \frac{\delta}{\sqrt{1 + y^2}} \phi(\gamma + \delta \sinh^{-1}(y)) \quad (3)$$

即 $Y \sim \text{JSU}(0, 1, \gamma, \delta)$, 表明标准化变换只改变随

机变量分布的位置和散布, 不改变随机变量分布的形态.

1.2 多元 JSU 分布

由于正态分布能够方便地实现从一元扩展到多元, 而 JSU 分布是由正态分布经逆双曲正弦变换后得到, 因此 JSU 分布也容易实现从一元扩展到多元.

对服从 $N \times 1$ 维标准正态分布的随机向量 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)'$, 其联合概率密度函数为

$$\phi_R(z) = (2\pi)^{-N/2} |\mathbf{R}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}z'Rz}$$

式中, $\mathbf{R} = (\rho_{ij})_{i,j=1,2,\dots,N}$ 为随机向量 Z 的相关系数矩阵, 元素 ρ_{ij} 为随机向量 Z 中两个随机变量 Z_i 与 Z_j 的相关系数; $|\cdot|$ 表示行列式.

多元 JSU 分布的随机向量 $Y = (Y_1, Y_2, \dots,$

$Y_N)'$ 可由标准正态随机向量 $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)'$ 通过变换

$$Y_i = \xi_i + \lambda_i \sinh\left(\frac{Z_i - \xi_i}{\delta_i}\right)$$

得到, 且 Y 的联合概率密度函数为

$$f(y) = (2\pi)^{-N/2} J' |\mathbf{R}|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}z'Rz} \quad (4)$$

式中,

$$J' = \prod_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i \sqrt{1 + \left(\frac{y_i - \xi_i}{\lambda_i}\right)^2}}$$

为增加对多元 JSU 分布的直观印象, 以二元为例, 取 $\xi_1 = \xi_2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \nu_1 = 3$ 和 $\nu_2 = 0, \delta_1 = \delta_2 = 3$ 且随机变量 Y_1 与 Y_2 之间相互独立, 得到其联合概率密度函数如图 1 所示.

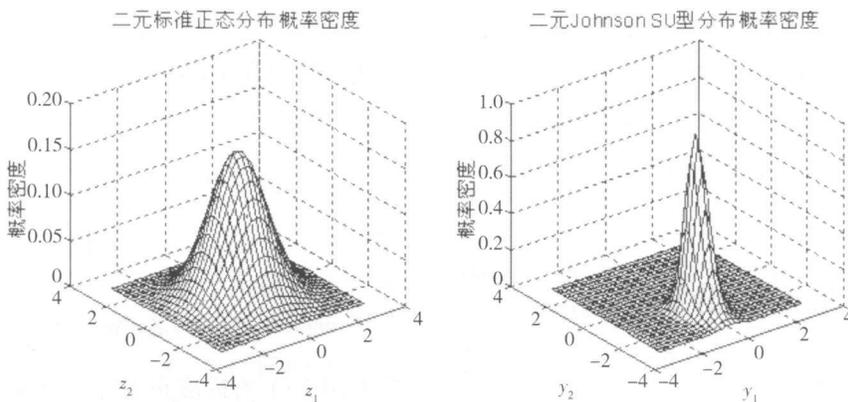


图 1 二元 Johnson SU 型分布与二元标准正态分布概率密度比较

Fig 1 Comparison of bivariate density between Johnson SU and standard normal distribution

由图 1 可以看出, 由已知参数确定的二元 Johnson SU 型分布呈现出一定的偏态特征 (在 y_1 轴上为正偏, 而在 y_2 轴上为对称分布); 同时与二元标准正态分布概率密度相比, 具有更高的峰.

由于 JSU 分布为由标准正态分布的变换得到的分布, 因此, 其随机数发生器、分位数、密度函数、分布函数均可由标准正态分布的对应参数经变换得到. 不同于其它的分布 (学生 t 分布、非对称或有偏的学生 t 分布、Pearson IV 型分布), JSU 分布所有的前四阶矩均是有限的, 这使得它容易描述金融资产收益的非对称性和肥尾特征. 此外, 基于 JSU 分布的对数似然函数的梯度和 Hessian 矩阵的解析式都容易得到, 因此, 基于 JSU 分布设

定的模型容易使用极大似然方法估计模型的参数. 综上所述, 这里选择基于 JSU 分布讨论 GARCD 模型的构建.

2 一元 GARCD-JSU 模型

Yan 基于 JSU 分布初步地讨论了广义自回归条件密度建模问题^[7]. 本文中, 将 Yan 的模型从一阶扩展到高阶, 建立了 GARCD-JSU 模型, 并且给出了模型参数的两阶段极大似然估计方法.

2.1 模型表示

给出一元 GARCD($p, q; p_2, q_2, p_3, q_3$)-JSU 模型, 模型表示如下

$$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \text{JSU}_t(0, h_t, \gamma_t, \delta_t | \Omega_{t-1}) \\ \eta_t = h_t^{-1/2} \varepsilon_t, \eta_t \sim \text{JSU}_t(0, 1, \gamma_t, \delta_t | \Omega_{t-1}) \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p_1} \beta_i h_{t-i} \\ \gamma_t = c_0 + \sum_{i=1}^{q_2} c_i \eta_{t-i} + \sum_{j=1}^{p_2} c_{q_2+j} \gamma_{t-j} \\ \delta_t = d_0 + \sum_{i=1}^{q_3} d_i \eta_{t-i} + \sum_{j=1}^{p_3} d_{q_3+j} \delta_{t-j} \end{cases} \quad (5)$$

式中, $\mu_t = E_{t-1}(y_t)$ 为条件均值部分, 常采用自回归设定形式; ε_t 为误差项, η_t 为 ε_t 经 $h_t^{-1/2}$ 标准化后的误差项; $\text{JSU}_t(\cdot, \cdot, \gamma_t, \delta_t | \Omega_{t-1})$ 为条件 JSU 分布, γ_t 为时变的偏度参数, δ_t 为时变的峰度参数; 其中 (p_1, q_1) 为条件方差方程的阶; (p_2, q_2) 为时变偏度参数方程的阶; (p_3, q_3) 为时变峰度参数方程的阶. 参数向量 $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p_1}, c_0, c_1, c_2, \dots, c_{p_2+q_2}, d_0, d_1, d_2, \dots, d_{p_3+q_3})'$ 中每一个元素均为待估计的参数.

2.2 参数估计

现在给出模型参数的两阶段极大似然估计方法. 由模型 (5) 中前两个方程, 可以得到

$$\eta_t = \frac{y_t - \mu_t}{h_t^{1/2}}$$

该式表明 η_t 为 y_t 经线性变换得到, 因此 η_t 的条件概率密度函数 $\tilde{f}_t(\eta_t | \Omega_{t-1})$ 与 y_t 的条件概率密度函数 $f_t(y_t | \Omega_{t-1})$ 之间存在关系

$$f_t(y_t | \Omega_{t-1}) = \frac{1}{h_t^{1/2}} \tilde{f}_t(\eta_t | \Omega_{t-1})$$

式中, 系数 $(h_t^{1/2})^{-1}$ 为变换的 Jacobian 行列式值.

这样, 可以得到 GARCD-JSU 模型 (式 (5)) 的样本条件对数似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta | \Omega_{t-1}) &= L(y_1, y_2, \dots, y_T; \theta | \Omega_{t-1}) \\ &= \sum_{t=T_0}^T \ln f_t(y_t | \Omega_{t-1}) \\ &= \sum_{t=T_0}^T \left[\ln \tilde{f}_t(\eta_t | \Omega_{t-1}) - \frac{1}{2} \ln h_t \right] \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $T_0 = \max(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3) + 1$

由于 $\tilde{f}_t(\eta_t | \Omega_{t-1})$ 为标准化的 JSU 分布的条件概率密度函数, 可由式 (3) 中的变量及参数 γ 和 δ 动态化得到, 其表达式如下

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\eta_t | \Omega_{t-1}) &= \frac{\delta}{\sqrt{1 + \eta_t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ &\exp\left\{-\frac{[\gamma_t + \delta_t \sinh^{-1}(\eta_t)]^2}{2}\right\} \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 样本条件对数似然函数可以表示为

$$\begin{aligned} L(\theta | \Omega_{t-1}) &= \sum_{t=T_0}^T \left[\ln \tilde{f}(\eta_t | \Omega_{t-1}) - \frac{1}{2} \ln h_t \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T \left[\ln(2\pi) + \ln h_t + \ln(1 + \eta_t^2) \right] + \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T \left[2 \ln \delta_t - (\gamma_t + \delta_t \sinh^{-1}(\eta_t))^2 \right] \\ &= L_V(\theta_V | \Omega_{t-1}) + L_S(\theta_S, \theta_3 | \Omega_{t-1}) \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $\theta_V = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p_1})'$ 为波动方程参数向量, $\theta_S = (c_0, c_1, \dots, c_{p_2+q_2}, d_0, d_1, \dots, d_{p_3+q_3})'$ 为形状方程参数向量, 且 $\theta = (\theta'_V, \theta'_S)'$; 而

$$\begin{aligned} L_V(\theta_V | \Omega_{t-1}) &= -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T \left[\ln(2\pi) + \ln h_t + \right. \\ &\quad \left. \ln(1 + \eta_t^2) \right] \\ L_S(\theta_S, \theta_3 | \Omega_{t-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T \left[2 \ln \delta_t - \right. \\ &\quad \left. (\gamma_t + \delta_t \sinh^{-1}(\eta_t))^2 \right] \end{aligned}$$

式 (8) 表明样本条件对数似然函数可以表示为波动方程条件对数似然函数与形状方程条件对数似然函数之和. 为求参数向量 θ 的值, 可以采用两阶段估计法对 $L(\theta | \Omega_{t-1})$ 实施极大似然估计.

第一阶段, 通过

$$\hat{\theta}_V = \arg \max_{\theta_V} L_V(\theta_V | \Omega_{t-1})$$

得到波动方程参数向量的估计 $\hat{\theta}_V$; 第二阶段, 通过

$$\hat{\theta}_S = \arg \max_{\theta_S} L_S(\hat{\theta}_V, \theta_S | \Omega_{t-1})$$

得到形状方程参数向量的估计 $\hat{\theta}_S$. 这样, 就可以实现对模型 (5) 参数向量 $\theta = (\theta'_V, \theta'_S)'$ 的估计.

3 多元 GARCH-JSU 模型

下面将一元 GARCH-JSU 模型扩展到多元 GARCH-JSU 模型, 并给出其参数估计及诊断检验方法.

3.1 模型表示

对 $N \times 1$ 维向量时间序列 $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Nt})'$, 多元 GARCH($p, q; p_2, q_2; p_3, q_3$)-JSU 模型的向量表示为

$$\left\{ \begin{aligned} & Y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim JSU_t(Q, H_t, \gamma, \delta | \Omega_{t-1}) \\ & \eta_t = D_t^{-1} \varepsilon_t \\ & \text{vech}(H_t) = a_0 + \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_i \text{vech}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i}) + \\ & \quad \sum_{j=1}^{p_1} \beta_j \text{vech}(H_{t-j}) \\ & Y_t = c_0 + \sum_{i=1}^{q_2} c_i \eta_{t-i} + \sum_{j=1}^{p_2} c_{q_2+j} Y_{t-j} \\ & \delta_t = d_0 + \sum_{i=1}^{q_3} d_i \eta_{t-i} + \sum_{j=1}^{p_3} d_{q_3+j} \delta_{t-j} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

式中, $\mu_t = E_{t-1}(Y_t)$ 为条件均值向量; Ω_{t-1} 为直到 $t-1$ 时刻的信息集; $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{Nt})'$ 服从多元条件 JSU 分布, $\eta_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t}, \dots, \eta_{Nt})' = (\varepsilon_{1t} / \sqrt{h_{11t}}, \varepsilon_{2t} / \sqrt{h_{22t}}, \dots, \varepsilon_{Nt} / \sqrt{h_{NNt}})'$ 服从标准化的多元条件 JSU 分布; $D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{11t}}, \sqrt{h_{22t}}, \dots, \sqrt{h_{NNt}})$, 为对角矩阵; $\text{vech}(\cdot)$ 为拉直向量算子, 它将矩阵的下三角部分堆成一个列向量; $N \times 1$ 维向量 a_0, c_0 和 $d_0, N \times N$ 维矩阵 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, q_1), \beta_j (j = 1, 2, \dots, p_1), c_l (l = 1, 2, \dots, p_2 + q_2)$ 和 $d_l (l = 1, 2, \dots, p_3 + q_3)$ 中的元素均为待估计参数.

该模型可以全面准确地刻画波动的相关特征, 经济意义明确, 但模型中出现了过多的待估计参数, 并且随着金融资产数量的增加, 待估计参数的数目将以指数形式增加, 这给参数估计带来了巨大的困难. 为此, 需要对多元 GARCH-JSU 模型进行简约化处理. 常用的处理方式可以借鉴多元 GARCH 模型的做法, 包括: Bollerslev 等的对角化设定、Engle 等的 BEKK 设定、Bollerslev 等的常相

关设定、Engle 等的因子模型, 这些设定各有优势与不足: 有的经济意义不明确、有的设定形式过于苛刻. 而 Engle 等的动态条件相关设定^[19, 20] 则较好地解决这种两难选择问题, 这里选取 Cho 等的动态条件相关设定对多元 GARCH-JSU 模型进行简约化处理.

记 $\varepsilon = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \dots, \varepsilon_{Nt})'$ 中任意两个随机变量 ε_{it} 与 ε_{jt} 之间的条件相关系数为 ρ_{ijt} , 则有

$$\begin{aligned} \rho_{ijt} &= \frac{\text{cov}_{t-1}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt})}{\sqrt{\text{var}_{t-1}(\varepsilon_{it}) \text{var}_{t-1}(\varepsilon_{jt})}} = \frac{h_{ijt}}{\sqrt{h_{iit} h_{jtt}}} \\ &= (\sqrt{h_{iit}})^{-1} \cdot h_{ijt} \cdot (\sqrt{h_{jtt}})^{-1} \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $\text{cov}_{t-1}(\cdot, \cdot)$ 为条件协方差, $\text{var}_{t-1}(\cdot)$ 为条件方差. 式 (10) 可以写成矩阵表达

$$R_t = D_t^{-1} H_t D_t^{-1} \quad (11)$$

式中, R_t, H_t 分别为 ε_t 的条件相关系数矩阵和条件方差 - 协方差矩阵.

由式 (11) 可得

$$H_t = D_t R_t D_t$$

关于条件方差 - 协方差矩阵 H_t 的估计可以由两个阶段完成. 第一阶段, 估计 D_t . 由于 D_t 为由各变量条件标准差组成的对角矩阵, 因此可由 N 个一元 GARCH 模型实现其估计. 第二阶段, 估计 R_t . 相关矩阵 R_t 中的元素为 ε_{it} 与 ε_{jt} 之间的条件相关系数 ρ_{ijt} , 所组成, 这与标准化误差 η_{it} 与 η_{jt} 之间的条件相关系数完全相同, 可由 $\eta_t = (\eta_{1t}, \eta_{2t}, \dots, \eta_{Nt})'$ 的条件方差 - 协方差矩阵

$$Q_t = \begin{pmatrix} q_{11t} & q_{12t} & \dots & q_{1Nt} \\ q_{21t} & q_{22t} & \dots & q_{2Nt} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{N1t} & q_{N2t} & \dots & q_{NNt} \end{pmatrix}$$

通过 $R_t = Q_t^*^{-1} Q_t Q_t^*^{-1}$ 来估计. 式中, $Q_t^* = \text{diag}(\sqrt{q_{11t}}, \sqrt{q_{22t}}, \dots, \sqrt{q_{NNt}})$ 为由矩阵 Q_t 对角元素的平方根组成的对角矩阵. 这样, R_t 中的元素将由 Q_t 中的元素通过 $\rho_{ijt} = \frac{q_{ijt}}{\sqrt{q_{iit} q_{jtt}}}$ 得到.

综合上述, 动态条件相关的多元 GARCH($p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3$)-JSU 模型可以表示为

$$\left\{ \begin{aligned} & Y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{JSU}_t(\theta, H_t, \gamma_t, \delta_t \mid \Omega_{t-1}) \\ & D_t^2 = \text{diag}(\omega_t) + \sum_{l=1}^{q_1} \text{diag}(\alpha_{i,l}) \circ \varepsilon_{t-l} \varepsilon'_{t-l} + \sum_{l=1}^{p_1} \text{diag}(\beta_{i,l}) \circ D_{t-l}^2 \\ & \eta_t = D_t^{-1} \varepsilon_t, \quad \eta_t \sim \text{JSU}_t(\theta, R_t, \gamma_t, \delta_t \mid \Omega_{t-1}) \\ & Q_t = (1 - \sum_{l=1}^{M_1} a_l - \sum_{l=1}^{M_2} b_l) \bar{Q} + \sum_{l=1}^{M_1} a_l (\eta_{t-l} \eta'_{t-l}) + \sum_{l=1}^{M_2} b_l Q_{t-l} \\ & R_t = Q_t^*{}^{-1} Q_t Q_t^*{}^{-1} \\ & Y_t = (c_{1,0} \ c_{2,0} \ \dots \ c_{N,0})' + \sum_{l=1}^{q_2} (c_{1,b} \ c_{2,b} \ \dots \ c_{N,b})' \eta_{t-l} + \sum_{l=1}^{p_2} (c_{1,q_2+b} \ c_{2,q_2+b} \ \dots \ c_{N,q_2+l})' \varepsilon_{t-l} \\ & \delta_t = (d_{1,0} \ d_{2,0} \ \dots \ d_{N,0})' + \sum_{l=1}^{q_3} (d_{1,b} \ d_{2,b} \ \dots \ d_{N,b})' \eta_{t-l} + \sum_{l=1}^{p_3} (d_{1,q_3+b} \ d_{2,q_3+b} \ \dots \ d_{N,q_3+l})' \varepsilon_{t-l} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

式中, \circ 为 Hadamard 乘积, 定义为 $A \circ B \triangleq (a_{ij} b_{ij})$, a_{ij} 与 b_{ij} 分别为矩阵 (向量) A 与 B 中对应位置上的元素; ε_t 的方差方程实际上为一个对角化的条件方差过程, 其系数满足约束条件: $\sum_{l=1}^{q_1} \alpha_{i,l} + \sum_{l=1}^{p_1} \beta_{i,l} < 1$; \bar{Q} 为标准化误差 η_t 的非条件方差 - 协方差矩阵, M_1, M_2 为滞后的阶; 其它符号含意同前.

3.2 模型估计

这里, 给出多元 GARCD-JSU 模型的三阶段极大似然估计方法. 由模型 (12) 的第一个方程和第三个方程, 可以得到

$$\eta_t = D_t^{-1} \varepsilon_t = D_t^{-1} (Y_t - \mu_t)$$

该式表明 η_t 为 Y_t 经多元线性变换得到, 故 η_t 的多元条件概率密度函数 $\tilde{f}_t(\eta_t \mid \Omega_{t-1})$ 与 Y_t 的多元条件概率密度函数 $f_t(y_t \mid \Omega_{t-1})$ 之间存在关系

$$\begin{aligned} f_t(y_t \mid \Omega_{t-1}) &= |D_t^{-1}| \cdot \tilde{f}_t(\eta_t \mid \Omega_{t-1}) \\ &= \frac{1}{|D_t|} \tilde{f}_t(\eta_t \mid \Omega_{t-1}) \end{aligned}$$

式中, $1/|D_t|$ 为多元变换的 Jacob 行列式.

这样, 可以得到模型 (12) 的样本条件对数似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta \mid \Omega_{t-1}) &= L(y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1T}; \dots; y_{N1}, y_{N2}, \\ &\dots, y_{NT}; \theta \mid \Omega_{t-1}) = \sum_{t=T_0}^T \ln f_t(y_t \mid \Omega_{t-1}) \\ &= \sum_{t=T_0}^T [\ln \tilde{f}_t(\eta_t \mid \Omega_{t-1}) - \ln |D_t|] \quad (13) \end{aligned}$$

式中, $T_0 = \max(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, M_1, M_2) + 1$; θ 为

模型 (12) 中所有待估计参数组成的向量. 由于 $\tilde{f}_t(\eta_t \mid \Omega_{t-1})$ 为标准化的多元 JSU 分布的条件概率密度函数, 可由式 (4) 同时令 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_N = 0$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 1$ 并将参数 γ_i 和 δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 动态化得到, 其表达式如下

$$\tilde{f}_t(\eta_t \mid \Omega_{t-1}) = (2\pi)^{-N/2} |J'_t| |R_t|^{-1/2} e^{(-\frac{1}{2} \eta_t' R_t^{-1} \eta_t)}$$

式中, $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{Nt})'$ 中的元素 z_{it} 满足 $z_{it} = \gamma_{it} + \delta_{it} \sinh^{-1}(\eta_{it})$, 而 J' 满足 $J'_t = \prod_{i=1}^N \frac{\delta_{it}}{\sqrt{1 + \eta_{it}^2}}$

因此, 样本条件对数似然函数可以进一步表示为

$$\begin{aligned} L(\theta \mid \Omega_{t-1}) &= \sum_{t=T_0}^T [\ln \tilde{f}_t(\eta_t \mid \Omega_{t-1}) - \ln |D_t|] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T [N \ln(2\pi) - 2 \ln(J'_t) + \ln(|R_t|) + \\ &\quad z_t' R_t^{-1} z_t + 2 \ln |D_t|] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T [N \ln(2\pi) + 2 \ln |D_t| + \ln(|R_t|) - \\ &\quad 2 \ln(J'_t) + z_t' R_t^{-1} z_t] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T [N \ln(2\pi) + 2 \ln |D_t|] - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T \ln(|R_t|) - \frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T [-2 \ln(J'_t) + \\ &\quad z_t' R_t^{-1} z_t] \\ &= L_V(\theta_V \mid \Omega_{t-1}) + L_R(\theta_R, \theta_S \mid \Omega_{t-1}) + \\ &\quad L_S(\theta_V, \theta_R, \theta_S \mid \Omega_{t-1}) \quad (14) \end{aligned}$$

式中, $\theta_V = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N; \alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{N,1}, \dots, \alpha_{1,q_P}, \alpha_{2,q_P}, \dots, \alpha_{N,q_P}; \beta_{1,1}, \beta_{2,1}, \dots, \beta_{N,1}, \dots, \beta_{1,p_P}, \beta_{2,p_P}, \dots, \beta_{N,p_P})'$ 为波动方程参数向量, $\theta_R = (a_1, a_2, \dots, a_M; b_1, b_2, \dots, b_M)'$ 为相关方程的参数向量, $\theta_S = (c_{1,0}, c_{2,0}, \dots, c_N, 0; c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{N,1}, \dots, c_{1,p_2+q_2}, c_{2,p_2+q_2}, \dots, c_{N,p_2+q_2}; d_{1,0}, d_{2,0}, \dots, d_{N,0}, d_{1,1}, d_{2,1}, \dots, d_{N,1}, \dots, d_{1,p_3+q_3}, d_{2,p_3+q_3}, \dots, d_{N,p_3+q_3})'$ 为形状方程参数向量, 且 $\theta = (\theta'_V, \theta'_R, \theta'_S)'$; 而

$$L_V(\theta_V | \Omega_{t-1}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T [N \ln(2\pi) + 2\mathbf{h} | \mathbf{D}_t |]$$

$$L_R(\theta_V, \theta_R | \Omega_{t-1}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T \ln(| \mathbf{R}_t |)$$

$$L_S(\theta_V, \theta_R, \theta_S | \Omega_{t-1}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=T_0}^T [-2\ln(J'_t) + \mathbf{z}'_t \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{z}_t]$$

式(14)表明样本条件对数似然函数可以表示为波动方程条件对数似然函数、相关方程条件对数似然函数与形状方程条件对数似然函数之和。为实现对参数向量 θ 的估计, 可以采用三阶段估计法对 $L(\theta | \Omega_{t-1})$ 实施极大似然估计。第一阶段, 通过

$$\hat{\theta}_V = \arg \max L_V(\theta_V | \Omega_{t-1})$$

得到波动方程参数向量的估计 $\hat{\theta}_V$; 第二阶段, 通过

$$\hat{\theta}_R = \arg \max L_R(\hat{\theta}_V, \theta_R | \Omega_{t-1})$$

得到形状方程参数向量的估计 $\hat{\theta}_R$; 第三阶段, 通过

$$\hat{\theta}_S = \arg \max L_S(\hat{\theta}_V, \hat{\theta}_R, \theta_S | \Omega_{t-1})$$

得到形状方程参数向量的估计 $\hat{\theta}_S$ 。

由此, 可以得到模型(12)中参数向量 θ 的估计 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}'_V, \hat{\theta}'_R, \hat{\theta}'_S)'$ 。

3.3 诊断检验

不妨设多元时间序列 $\{Y_t\}$ 来自某个数据生

成过程, 该过程的真实条件联合概率密度函数为 $f_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1})$ 。由模型(12)确定的条件联合概率密度函数 $\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t}; \hat{\mu}_b, \hat{H}_b, \hat{V}_b, \hat{\delta}_t | \Omega_{t-1})$ 简记为: $\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1})$, 可以用 $\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1})$ 对 $f_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1})$ 进行估计。若可以对条件联合概率密度函数 $\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1})$ 进行如下分解^②

$$\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1}) = \hat{f}_{1,t}(y_{1,t} | \Omega_{t-1}) \hat{f}_{2,t}(y_{2,t} | \Omega_{t-1}; y_{1,t}) \dots \hat{f}_{N,t}(y_{N,t} | \Omega_{t-1}; y_{N-1,t}, \dots, y_{2,t}, y_{1,t})$$

则可以对 $(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t})$ 中的每一个分量 $y_{i,t}$ 根据对应的条件概率密度 $\hat{f}_{i,t}(y_{i,t} | \Omega_{t-1}; y_{i-1,t}, \dots, y_{2,t}, y_{1,t})$ 进行概率积分变换

$$v_{i|t-1, \dots, 2,t,t} = \int_{-\infty}^{y_{i,t}} \hat{f}_{i,t}(x_{i,t} | \Omega_{t-1}; y_{i-1,t}, \dots, y_{2,t}, y_{1,t}) dx_{i,t} \quad (15)$$

得到 N 个序列 $\{v_{i|t-1, \dots, 2,t,t}\}_{i=1,2,\dots,N; t=1,2,\dots,T}$ 。^③

Diebold等证明^[21, 22] $\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1})$ 与 $f_t(y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{N,t} | \Omega_{t-1})$ 一致, 当且仅当概率积分变换序列 $\{v_{i|t-1, \dots, 2,t,t}\}_{i=1,2,\dots,N; t=1,2,\dots,T}$ 中的每一个序列均满足: $\{v_{i|t-1, \dots, 2,t,t}\}_{t=1,2,\dots,T} \sim \text{i i d } U(0, 1)$, 同时所有序列组合成的整体 $\{\dots, v_{k,t}, v_{21k,t}, \dots, v_{N(N-1, \dots, 2,t,t}, \dots)\}$ 也满足: $\{\dots, v_{k,t}, v_{21k,t}, \dots, v_{N(N-1, \dots, 2,t,t}, \dots)\} \sim \text{i i d } U(0, 1)$ 。

概率积分变换式(15)实际上就是求条件JSU分布的累积分布函数, 根据式(2)的结论, 该累积分布函数可由标准正态分布的累积分布函数求得。对条件 $\{v_{i|t-1, \dots, 2,t,t}\}_{t=1,2,\dots,T} \sim \text{i i d } U(0, 1)$ 和 $\{\dots, v_{1,t}, v_{21,t}, \dots, v_{N(N-1, \dots, 2,t,t}, \dots)\} \sim \text{i i d } U(0, 1)$ 进行检验, 一方面利用 K-S(Kolmogorov-Smirnov) 检验和 χ^2 拟合优度检验判断其是否服

② 这种分解形式有 $N!$ 种可能, 如 $\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t} | \Omega_{t-1})$ 既可以分解为 $\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t} | \Omega_{t-1}) = \hat{f}_{1,t}(y_{1,t} | \Omega_{t-1}) \hat{f}_{2,t}(y_{2,t} | \Omega_{t-1}; y_{1,t})$, 也可以分解为:

$\hat{f}_t(y_{1,t}, y_{2,t} | \Omega_{t-1}) = \hat{f}_{2,t}(y_{2,t} | \Omega_{t-1}) \hat{f}_{1,t}(y_{1,t} | \Omega_{t-1}; y_{2,t})$ 。

③ 当 $i=1$ 时, $\{v_{i|t-1, \dots, 2,t,t}\}_{t=1,2,\dots,T}$ 就是 $\{v_{k,t}\}_{t=1,2,\dots,T}$, 而 $v_{1,t} = \int_{-\infty}^{y_{1,t}} \hat{f}_{1,t}(x_{1,t} | \Omega_{t-1}) dx_{1,t}$ 。

从 $U(0, 1)$; 另一方面利用 Ljung-Box Q 检验和 LM 检验判断其是否独立。

4 实证研究

4.1 数据选取与基本统计特征

选择上证综指和深证成指作为研究对象, 分别记为 SH 和 SZ, 样本区间为 2004/01/01 至 2007/04/30, 剔除节假日和非同步交易日, 样本容量为 $N = 799$ 。数据来自雅虎财经网站: <http://cn.finance.yahoo.com/>。证券指数收益由 $y_{i,t} = \ln P_{i,t} - \ln P_{i,t-1}$ 得到, 其中 $P_{i,t}$ 为 t 时刻第 i 个指数按照派息和拆股调整后的收盘价。

表 1 给出各证券指数收益序列的基本统计性质。由表 1 可知, 在样本观察期间内, 深证成指与

上证综指的平均收益均为正; 深证成指的平均收益高于上证综指的平均收益, 而前者的标准差也高于后者, 符合高收益伴随高风险的规律。就偏度统计的结果而言, 两个股指的偏度系数均为正值, 意味着在该时间区间内, 股指上涨的可能性大于下跌的可能性; 峰度统计值表明两个股指收益分布具有比正态分布更肥的尾部。服从 $\chi^2(2)$ 分布的 Jarque-Bera 统计检验结果, 拒绝了收益序列服从正态分布的假定。因此, 仅从收益序列的前二阶矩出发讨论风险计量、组合投资、资产定价等相关主题, 存在一定的局限性。这里, 将利用广义自回归条件密度建模得到条件概率密度函数, 进而对动态高阶矩风险进行计量, 讨论高阶矩风险之间的相互关系。

表 1 收益序列基本统计特征

Table 1 Descriptive statistics for return time series

	平均值 ($\times 10^{-3}$)	标准差 ($\times 10^{-3}$)	偏 度	峰 度	J- B 检验 (尾概率)
SH	1.1808	1.5023	0.1879	8.5679	1.0275(0.0000)***
SZ	1.4269	1.6453	0.1715	8.4481	983.2(0.0000)***

注: (1) 括号中的数值为 J- B 检验的尾概率; (2)*** 表示 1% 显著性水平下显著。

4.2 模型参数估计

利用动态条件相关的多元 GARCD-JSU 模型 (式 (12)), 取均值方程为一阶自回归形式且 $N = 2, p_1 = q_1 = 1, p_2 = q_2 = 1, p_3 = q_3 = 1, M_1 =$

$M_2 = 1$ 对两个股指收益同时建模, 表 2 给出了模型的参数估计结果。进而可以描述两个股指收益高阶矩的动态特征及动态相关特征。

表 2 基于多元 GARCD-JSU 模型参数估计

Table 2 Estimation results form multivariate GARCD-JSU model

股指	均值方程		方差方程			相关方程				形状方程			
	α_0 ($\times 10^{-3}$)	α_1 ($\times 10^{-2}$)	β_0 ($\times 10^{-6}$)	β_1 ($\times 10^{-2}$)	β_2	a_1	b_1	c_0 ($\times 10^{-3}$)	c_1	c_2	d_0	d_1	d_2
SH	1.181	-1.306	8.555	6.151	0.903	0.042	0.953	8.057	0.151	0.631	0.993	0.124	0.693
SZ	1.425	-0.266	10.954	7.183	0.891			3.645	0.139	0.647	1.003	0.111	0.649

4.3 动态条件相关测度

图 2 给出了两个股指收益序列之间的静态相关系数与条件相关系数。显然, 静态相关系数难以度量出上证综指与深证成指之间时变的相关关系。可以看出在整个样本区间内, 上证综指与深证成指均呈现正向的相关关系, 但相关性的强弱并

非恒定不变, 在绝大多数时间内, 相关系数高达 0.9 以上; 相关系数低于 0.85 只发生在四个时间区段上: 2006/04/13 至 2006/05/23, 2006/07/06 至 2006/07/13, 2006/12/02 至 2006/12/03, 2006/12/27 至 2007/02/01。

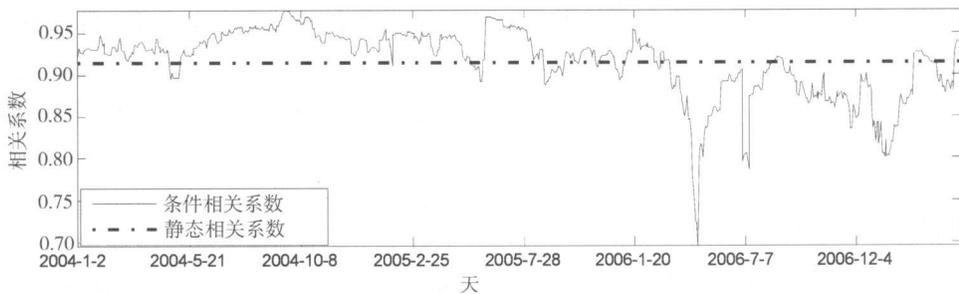


图 2 SH 与 SZ 之间条件相关系数

Fig 2 Conditional correlation coefficient between SH and SZ

4.4 模型效果检验

对于上证综指与深证成指, 得到其条件联合概率密度函数为 $\hat{f}_i(y_{1t}, y_{2t} | \Omega_{t-1})$, 并且可以进行分解: $\hat{f}_i(y_{1t}, y_{2t} | \Omega_{t-1}) = \hat{f}_{1t}(y_{1t} | \Omega_{t-1}) \hat{f}_{2t}(y_{2t} | \Omega_{t-1}; y_{1t})$, 则可以得到概率积分变换序列 $\{v_{1t}\}_{t=1, 2, \dots, 797}$ 和 $\{v_{21t}\}_{t=1, 2, \dots, 797}$ ^④. 图 3a 给出了概率积分变换序列 $\{v_{1t}\}_{t=1, 2, \dots, 797}$ 和 $\{v_{21t}\}_{t=1, 2, \dots, 797}$ 各自的直方图, 由于整个序列个

数为 797, 一共分了 15 组, 平均每组大约有 53 个数据. 由图 3a 可见, 每组数据的个数基本上围绕 53 上下波动, 大致判定其为均匀分布. 图 3b 给出两个股指概率积分变换序列组合后 $\{v_{1t}, v_{21t}\}_{t=1, 2, \dots, 797}$ 的直方图, 由于整个序列个数为 1594, 一共分了 15 组, 平均每组大约有 106 个数据. 由图 3b 可见, 每组数据的个数基本上围绕 106 上下波动, 大致判定其为均匀分布.

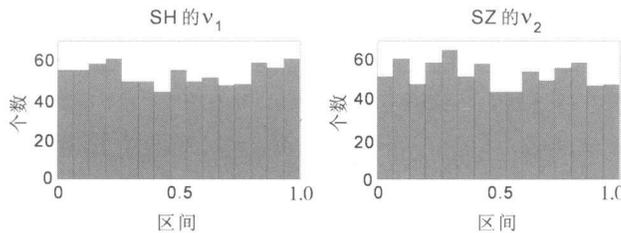


图 3a 单个股指概率积分变换序列的直方图

Fig 3a Histogram for the individual series of probability integral transforms

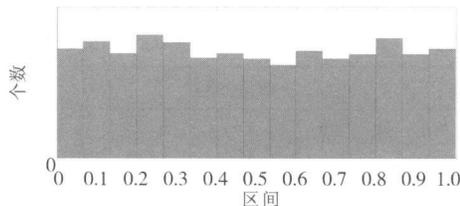


图 3b 两个股指概率积分变换序列组合后的直方图

Fig 3b Histogram for the combined series of probability integral transforms

表 3 给出了在 Statistica6.0 软件中基于 K-S 检验和 χ^2 拟合优度检验得到的结果, 结果显示: 在 5% 的显著性水平下, 都不能拒绝序列为 $U(0, 1)$ 的原假设, 即认为概率积分变换序列服从 $U(0, 1)$ 分布.

接下来, 检验概率积分变换序列的独立性, 表 3 给出了在 Eview 5.0 软件中基于 Ljung-Box Q 检验和 LM 检验得到的结果, 结果显示: 在 5% 的显著性水平, 都不能拒绝序列为随机序列的原假设, 即认为概率积分变换序列具有独立性.

④ 这里“1”表示上证综指, “2”表示深证成指.

表 3 概率积分变换序列的检验

Table 3 Test for the series of probability integral transforms

股 指	U(0, 1) 的检验		独立性的检验				
			Ljung-Box Q 检验			LM 检验	
	K-S 检验	χ^2 拟合优度检验	Q(5)	Q(10)	Q(15)	LM(1)	LM(5)
SH	0.0278 (n.s.)	8.1393 (0.4199) $d_f = 8$	5.1627 (0.396)	7.1715 (0.709)	10.0924 (0.814)	0.0002 (0.988)	1.4791 (0.194)
SZ	0.0338 (n.s.)	12.3573 (0.1359) $d_f = 8$	2.5945 (0.762)	15.756 (0.107)	21.374 (0.125)	0.0088 (0.925)	0.5989 (0.700)
SH 和 SZ	0.0236 (n.s.)	11.0947 (0.1964) $d_f = 8$	5.5322 (0.354)	13.788 (0.183)	19.611 (0.187)	0.2406 (0.624)	1.4726 (0.196)

注: (1) 在 Statistica6.0 软件中“n.s.”表示不显著, d_f 表示自由度; (2) 括号中的数据为检验统计值的尾概率

以上结果表明, 对单个概率积分变换序列有

$\{v_{1t}\}_{t=1,2,\dots,797} \sim \text{iid } U(0,1)$ 和 $\{v_{2t}\}_{t=1,2,\dots,797} \sim$

$\text{iid } U(0,1)$ 成立, 对概率积分变换序列组合后

的序列有 $\{v_{1t}, v_{2t}\}_{t=1,2,\dots,797} \sim \text{iid } U(0,1)$,

因此用动态条件相关的二元 GARCD-JSU 模型拟

合上证综指与深证成指的条件联合概率分布是适

合的。

参 考 文 献:

- [1] Harvey C.R., Siddique A. Autoregressive conditional skewness[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1999, 34(4): 465—487.
- [2] Jondeau E., Rockinger M. Conditional volatility, skewness and kurtosis: Existence, persistence and comovements[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2003, 27: 1699—1737.
- [3] Leon A., Rubio G., Serna G. Autoregressive conditional volatility, skewness and kurtosis[J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 2005, 45: 599—618.
- [4] 许启发. 高阶矩波动性建模及应用[J]. 数量经济技术经济研究, 2006, 23(12): 135—145.
Xu Qifan. Modeling and application of higher moments volatility[J]. Journal of Quantitative & Technical Economics, 2006, 23(12): 135—145. (in Chinese)
- [5] Hanser B.E. Autoregressive conditional density estimation[J]. International Economic Review, 1994, 35(3): 705—730.
- [6] Praratne G., Bera A.K. Modeling Asymmetry and Excess Kurtosis in Stock Return Data[R]. Illinois Research & Reference Working Paper No. 00—123, 2000.
- [7] Yan J. Asymmetry, Fat tail and Autoregressive Conditional Density in Financial Return Data with Systems of Frequency Curves[R]. University of Iowa Working Paper No. 355, 2005.
- [8] Choi P., Kiseok Nam. Asymmetric and leptokurtic distribution for heteroscedastic asset returns: The SU-normal distribution[J]. Journal of Empirical Finance, 2007. (in Press)
- [9] 蒋翠侠. 基于 JSU 分布的广义自回归条件密度建模及应用[J]. 数量经济技术经济研究, 2008, 25(8): 137—150.
Jiang Cuixia. Modeling and application of generalized autoregressive conditional density based on JSU distribution[J]. Journal of Quantitative & Technical Economics, 2008, 25(8): 137—150. (in Chinese)
- [10] 熊 熊, 张 维, 李 帅, 刘文财. 台湾股票指数期货的日内价格发现机制研究[J]. 管理科学学报, 2008, 11(2): 91—99.
Xiong Xiong, Zhang Wei, Li Shuai, Liu Wencai. Intraday price discovery process of Taiwan stock index futures[J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(2): 91—99. (in Chinese)

5 结 束 语

本文在多元 JSU 分布的基础上, 建立了一个新的多元 GARCD-JSU 模型, 给出该模型两种表示形式: 向量表示与简化表示, 提出了模型参数的三阶段极大似然估计方法和诊断检验方法. 最后, 将动态条件相关二元 GARCD-JSU 模型应用于中国股市的研究, 取得了较好的实证效果。

- [11] Bollerslev T, Engle R F, Wooldridge JM. A capital asset pricing model with time-varying covariances[J]. *Journal of Political Economy*, 1988, 96: 116—131.
- [12] 樊智, 张世英. 多元 GARCH 建模及其在中国股市分析中的应用[J]. *管理科学学报*, 2003, 6(2): 68—73
Fan Zhi, Zhang Shiying. Multivariate GARCH modeling and its application in volatility analysis of Chinese stock markets[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2003, 6(2): 68—73 (in Chinese)
- [13] 王明进, 陈奇志. 基于独立成分分解的多元波动率模型[J]. *管理科学学报*, 2006, 9(5): 56—64
Wang Mingjin, Chen Qizhi. Multivariate volatilities modeling based on independent components[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(5): 56—64 (in Chinese)
- [14] 吴振翔, 陈敏, 叶五一, 缪柏其. 基于 Copula GARCH 的投资组合风险分析[J]. *系统工程理论与实践*, 2006, 26(3): 45—52
Wu Zhenxiang, Chen Min, Ye Wuyi, Miao Baiqi. Risk analysis of portfolio by copula GARCH[J]. *Systems Engineering Theory & Practice*, 2006, 26(3): 45—52 (in Chinese)
- [15] 许启发, 张世英. 多元条件高阶矩波动模型研究[J]. *系统工程学报*, 2007, 22(1): 1—8
Xu Qifa, Zhang Shiying. Multivariate conditional higher moments volatility modeling[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2007, 22(1): 1—8 (in Chinese)
- [16] 蒋翠侠, 许启发, 张世英. 金融市场条件高阶矩风险与动态组合投资[J]. *中国管理科学*, 2007, 15(1): 27—33
Jiang Cuixia, Xu Qifa, Zhang Shiying. Conditional higher moments risk and dynamic portfolio[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2007, 15(1): 27—33 (in Chinese)
- [17] 洪永淼. 金融计量的新近发展[J]. *经济学(季刊)*, 2002, 1(2): 250—268
Hong Yongmiao. Some recent development in financial econometrics[J]. *China Economic Quarterly*, 2002, 1(2): 250—268 (in Chinese)
- [18] Johnson N L. Systems of frequency curves generated by method of translation[J]. *Biometrika*, 1949, 36: 149—176
- [19] Engle R F, Sheppard K. Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH[R]. Working Paper, Department of Economics, UC San Diego, 2001.
- [20] Engle R F. Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate GARCH models[J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002, 20(3): 339—350
- [21] Diebold FX, Gunther T, Tay A S. Evaluating density forecasts with applications to financial risk management[J]. *International Economic Review*, 1998, 39: 863—883
- [22] Diebold FX, Hahn J, Tay A S. Multivariate density forecast evaluation and calibration in financial risk management: High-frequency returns on foreign exchange[J]. *The Review of Economics and Statistics*, 1999, 81(4): 661—673

Multivariate generalized autoregressive conditional density modeling and its application

JIANG Cui-xia^{1, 2}, ZHANG Shi-ying²

1. School of Mathematics and Information Science, Shandong Institute of Business and Technology, Yantai 264005, China

2. School of Management, Tianjin University, Tianjin 300072, China

Abstract Generalized autoregressive conditional density model provides a useful tool for simulating the probability density function of financial asset returns. It is important to describe the dynamic character of financial asset return comprehensively. Based on univariate GARCD-JSU model, the multivariate GARCD-JSU model has been proposed in the paper. First, we give the vector expression of the new model. Second, the reducing expression is obtained by dynamic conditional correlation method. Third, three-stage maximum likelihood estimation and diagnosis test methods to the new model have been proposed. Finally, Chinese stock markets are selected for empirical analysis.

Key words GARCD model, JSU distribution, maximum likelihood estimation