自由时差定理与 *k* 阶次关键路线的求法①

李星梅, 乞建勋, 苏志雄
(华北电力大学工商管理学院, 北京 102206)

摘要: 针对项目进度计划管理中如何寻找 CPM 网络图中任意阶次关键路线等问题, 在分析了自由时差概念和特性的基础上提出了 k 级标准工序、k 级特征值和 k 级标准路线等新概念, 推导出自由时差定理和特征值定理, 进而利用这些概念和定理给出 k 阶次关键路线的求法——最小特征值法, 分析了算法的正确性, 并且得出该算法的计算复杂度为 $O(n^2)$. 证明了该算法可以通过局部寻优实现全局寻优. 最后结合应用举例论述了该方法的应用范围及特点.

关键词: CPM 网络计划; k 阶次关键路线; 最小特征值法; 自由时差
中图分类号: TB114.1 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2009)02-0098-07

0 引 言

关键路线法(简称 CPM)网络计划[1]产生于 1956年, 是目前最常用的处理项目计划的图形技术. 这种技术提示决策者将注意力集中到关键路线上, 因为该路线上的活动(即工序)通常被认为是导致项目成败的关键所在[2]. 具体地说, 该技术能科学地计算出项目中各工序的机动时间, 进而找出关键路线, 指出工程中的关键环节, 并综合测度各工序的重要性(在双代号网络中测度箭线的重要性, 在单代号网络中测度节点的重要性[3]), 从而提高项目管理者的决策能力和管理水平. 机动时间(即时差)是 CPM 网络计划的核心, 对它的研究伴随着 CPM 网络计划的诞生而起步. Battersby和 Thomas分别于 1967年和 1969年提出总时差、安全时差、自由时差和干扰时差概念[4], 并推导出由总时差为零的工序组成的路线是关键路线这一重要结论. Elmaghraby提出节点时差概念[4~6], 并给出对这些时差的分析和陈述[4~8]. 另外, 在时间参数的计算上, 针对 CPM 网络计划中双代号网络图的不惟一性可能导致时间参数不惟一的情况, Elmaghraby和 Kamburowski提出虚入节点和虚出节点[5,9]时间参数修正法[10,11].

但在实际应用中, 不仅需要知道关键路线[2,12], 有时还需要知道次关键路线, 以及各阶次关键路线等. 例如, 工程总工期 1 000天, 即关键路线的路长是 1 000天, 当次关键路线的路长是 999天时, 则该路线很容易转化为关键路线. 因此, 它上面的工序也需要特别关注. 又如, 在时间-费用权衡问题[13,14]中, 确定每步压缩的最大有效压缩量是非常重要的, 既要减少压缩步骤, 即每步压缩的压缩量要尽可能大, 又要避免无用的压缩, 即避免工序压缩后没有使总工期缩短, 凭空增加压缩费用. 各步的最大有效压缩量主要由各阶次关键路线的路长之差来确定, 并且, 若由所需路长范围内的各阶次关键路线组成的子网络来代替初始网络会使原问题大大简化, 并且不影响最终结果, 即该子网络与初始网络等效. 再如, 在很多情况下需要得知第 k 阶次关键路线的一些情况, 包括工序情况和机动时间情况等. 此外, 求 k 阶次关键路线还可以用于很多其它领域, 可见其具有重要的理论和实践价值. 但目前 CPM 网络计

① 收稿日期: 2007-09-03; 修订日期: 2008-04-01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70671040); 教育部博士点基金资助项目(20050079008).
作者简介: 李星梅(1971—), 女, 河北承德人, 博士生. Email: xingmei@163.com

划技术中求关键路线的方法不适用于求各阶次关键路线. 动态规划法等其它方法求 k阶次关键路线时过程十分繁琐, 难以推广.

本文由“自由时差”的概念推导出重要结论: “任意路线与关键路线的路长之差等于该路线上各工序的自由时差之和”. 由该结论可知, “自由时差之和”最小且非零的路线就是次关键路线, “自由时差之和”次小的路线就是 2阶次关键路线, 等等. 根据这个原理, 设计出可以方便地求出 k阶次关键路线的方法. 该方法可以通过局部寻优实现全局寻优, 因而大大简化了计算工作量.

1　基本概念

1.1　时差和前主链

总时差　工序 (i, j) 在不影响工程总工期条件下所拥有可利用机动时间的最大值, 记为 TF_{ij}

$$TF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij} \tag{1}$$

自由时差　工序 (i, j) 在不影响紧后工序可能开工条件下所拥有可利用机动时间的最大值, 对该时差的使用不影响紧后工序的时差, 记为 FF_{ij}

$$FF_{ij} = ES_{jr} - EF_{ij} = ES_j - ES_i - T_{ij} \tag{2}$$

路线自由时差　CPM 网络中任意路线 μ上所有工序自由时差之和, 记为 FF_μ

$$FF_\mu = \sum_{(i, j)\in\mu} FF_{ij} \tag{3}$$

节点的前主链　网络中节点 i与源点 1之间由自由时差为零的工序组成的路线段, 也称工序 (i, j)的前主链, 记为 μ_i^*. 由 CPM 作图规则可知, 任意节点 (源点除外) 都至少拥有一条前主链.

1.2　k级标准工序、k级特征值和 k级标准路线

1) 某关键节点 r的紧前工序中, 自由时差不为零的工序 (t, r) 称为节点 r的 1级标准工序, 记为 $A_r^1(t)$. 节点 r相对 t的 1级特征值为

$$D_r^1(t) = FF_{tr} \tag{4}$$

节点 r相对 t的 1级标准路线为 (w 是汇点)

$$\begin{aligned}\mu_r^1(t) &= \mu_t^* + (t, r) + \mu_{r\to w}^\nabla \\ &= \mu_t^* + A_r^1(t) + \mu_{r\to w}^\nabla\end{aligned} \tag{5}$$

2) 对于关键节点 r的 k级标准工序 $A_r^k(e)$ 的前主链 μ_e^* 上的任意节点 v, 当节点 v的紧前工序 (u, v) 自由时差非零时, 称工序 (u, v) 为节点 r相对 u的 $k+1$级标准工序, 记为 $A_r^{k+1}(u)$. 节点 r相对 u的 $k+1$级特征值为

$$\begin{aligned}D_r^{k+1}(u) &= FF_{uv} + D_r^k(e) \\ &= FF_{A_r^{k+1}} + FF_{A_r^k} + \cdots + FF_{A_r^1}\end{aligned} \tag{6}$$

节点 r相对 u的 $k+1$级标准路线 $\mu_r^{k+1}(u)$由以下 4部分组成: A_r^{k+1}的前主链 μ_u^*; 各级标准工序 A_r^1, …, A_r^{k+1}; A_r^i 与 A_r^{i+1} 之间自由时差为零的工序 A_i; 节点 r到 w 的关键路线段 $\mu_{r\to w}^\nabla$, 即

$$\begin{aligned}\mu_r^{k+1}(u) = \mu_u^* + A_r^{k+1}(u) + \cdots + A_r^k(e) + \\ \cdots + A_i + \cdots + A_r^1(t) + \mu_{r\to w}^\nabla\end{aligned} \tag{7}$$

3) 由定义可知, μ_u^* 和 $\mu_{r\to w}^\nabla$ 上工序的自由时差皆为零, 相邻各级标准工序之间工序的自由时差也皆为零. 由路线自由时差的定义可得

$$FF_{\mu_r^{k+1}(u)} = FF_{A_r^{k+1}(u)} + FF_{A_r^k(u)} + \cdots + FF_{A_r^1(t)}$$

再由式 (6) 得

$$FF_{\mu_r^{k+1}(u)} = D_r^{k+1}(u)$$

即

$$FF_{\mu_r^k(u)} = D_r^k(u) \tag{8}$$

2　自由时差定理与特征值定理

根据自由时差的定义, 它表示一个工序的结束时间在不影响它的紧后工序的任何可能开始时间的前提下允许推迟的天数, 是总时差即机动时间的一部分. 可见, 若工序使用完自由时差, 理论上并未使用完自身全部的机动时间. 但是, 自由时差有自身独特的性质, 它能够反映 CPM 网络图中任意路线与关键路线之间, 以及任意路线之间的路长关系. 本文对上述关系进行了研究, 并结合 1.2提出的特征值概念, 提出自由时差定理和特征值定理.

自由时差定理　任意路线 μ与关键路线 μ^∇ 的路长之差等于该路线的自由时差, 即

$$|\mu^\nabla| - |\mu| = FF_\mu \tag{9}$$

证明　1.先证任意节点 i与源点 1之间路线段 μ_i 的路长与路线自由时差之和等于 ES_i, 即

$$ES_i = |\mu_i| + FF_{\mu_i} \tag{10}$$

设 $\mu_i = 1 \to a \to b \to \cdots \to g \to i$ 由定义

$$FF_{\mu_i} = FF_{1a} + FF_{ab} + \cdots + FF_{gi}$$

再由式 (2) 可得

$$FF_{\mu_i} = (ES_a - ES_1 - T_{1a}) + (ES_b - ES_a - T_{ab}) + \cdots + (ES_i - ES_g - T_{gi})$$
$$= ES_i - ES_1 - (T_{1a} + T_{ab} + \cdots + T_{gi})$$
$$= ES_i - |\mu_i|$$

$\therefore ES_i = |\mu_i| + FF_{\mu_i}$, 式(10)成立.

2 再证式(9)成立.

根据 1, 在式(10)中由于 i的任意性, 令 $i = w$, w 是 CPM网络图的汇点, 可得

$$\mu_i = \mu_w = \mu \tag{11}$$

$$ES_i = ES_w = |\mu^{\triangledown}| \tag{12}$$

把式(11)、(12)代入式(10)得

$$|\mu^{\triangledown}| - |\mu| = FF_{\mu}$$

$\therefore$ 式(9)成立, 该定理成立. 证毕.

特征值定理 关键节点的标准路线的特征值越小, 则该路线越长, 即若 $D_r^m(i) < D_g^n(j)$, 则

$$|\mu_r^m(i)| > |\mu_g^n(j)| \tag{13}$$

证明 由式(6)、(8)可推知, $D_r^m(i) = FF_{\mu_r^m}$, $D_g^n(j) = FF_{\mu_g^n(j)}$, 因为已知 $D_r^m(i) < D_g^n(j)$, 所以

$$FF_{\mu_r^m(i)} < FF_{\mu_g^n(j)} \tag{14}$$

由式(9)得

$$|\mu_g^n(j)| = |\mu^{\triangledown}| - FF_{\mu_g^n(j)} \tag{15}$$

$$|\mu_r^m(i)| = |\mu^{\triangledown}| - FF_{\mu_r^m(i)} \tag{16}$$

由式(14)、(15)、(16)得

$$|\mu_r^m(i)| > |\mu_g^n(j)|$$

所以式(13)成立, 该定理成立. 证毕.

3 k阶次关键路线的求法——最小特征值法

3.1 方法描述

在 CPM网络中, 无论应用何种方法求 k阶次关键路线, 都可归结为实现以下两目标中的一个:

1) 找出第 K阶次关键路线;

2) 给定 T, 找出所有路长不小于该值的路线.

因此, 本文给出的 k阶次关键路线的求法——最小特征值法也是要实现这两个目标. 算法如下:

步骤 1 找出关键路线 $\mu^{\triangledown}$, 令 $\mu^0 = \mu^{\triangledown}$.

步骤 2 找出所有关键节点的自由时差非零的紧前工序, 得 $A_r^1(i)$, 计算特征值并组成集合 Ω^1,

$$D_r^1(i) = FF_{A_r^1(i)}$$

步骤 3 搜索 k阶次关键路线 μ^k.

1) 找出集合 Ω^k 内所有最小值, 统记为 I^k;

2) 设 $I^k = D_e^c(a_c)$, 按 $D_e^c(a_c)$ 的递推式得

$$I^k = D_e^c(a_c): [A_e^c(a_c), A_e^{c-1}(a_{c-1}), \ldots, A_e^1(a_1)]$$

3) 将 I^k后[ ]内的工序与自由时差为零的工序连成路线, 即 μ^k, 其路长

$$|\mu^k| = |\mu^{\triangledown}| - I^k \tag{17}$$

步骤 4 检验.

1) 若要实现目标 1, 则

若 $k = K$, 停止;

若 $k < K$, 转步骤 5.

2) 若要实现目标 2, 则

若 $|\mu^k| \leqslant T$, 停止;

若 $|\mu^k| > T$, 转步骤 5.

步骤 5 找出 μ^k上 $1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_c$ 各节点的自由时差非零的紧前工序, 得 $A_e^{c+1}(a_{c+1})$, 计算特征值

$$D_e^{c+1}(a_{c+1}) = D_e^c(a_c) + FF_{A_e^{c+1}(a_{c+1})} \tag{18}$$

步骤 6 将 I^k移出 Ω^k, $D_e^{c+1}(a_{c+1})$移入 Ω^k, 组成集合 Ω^{k+1},

若 $\Omega^{k+1} = \varnothing$停止;

若 $\Omega^{k+1} \neq \varnothing$, 转步骤 3.

3.2 算法正确性分析

若最小特征值法正确, 则用该算法求 k阶次关键路线时, 既不会漏掉 k阶及其以内任何路线, 也不会找出 k阶以外的路线. 上述条件可转化以下 3个命题, 若这 3个命题都成立, 则该算法正确.

命题 1 若所有关键节点的特征值共包含 N个不同的非零值 $D^{[i]}$, $D^{[1]} < D^{[2]} < \cdots < D^{[N]}$, 则网络图中共包含 N 阶次关键路线.

证明 根据关键节点的标准路线概念可知, 网络图中的所有非关键路线都是关键节点的标准路线. 再根据特征值的概念、式(8)和自由时差定理, 关键节点的特征值表示非关键路线与关键路线的路长之差. 可见, 若所有关键节点的特征值

共包含 N 个不同的值 $D^{[i]}$, $D^{[1]} < D^{[2]} < \cdots < D^{[N]}$, 说明网络图中共有 N 个不同的非关键路线的路长, 即共包含 N 阶次关键路线.

所以命题 1成立. 证毕.

命题 **2** 若网络图中共包含 N 阶次关键路线, 则用该算法可以找出 N 个不同的非零值 I^k, 且 $I^k = D^{[k]}$, $k = 1, 2, \cdots, N$.

证明 1. 首先证明 $I^k < I^{k+1}$ 成立.

根据关键节点标准路线的概念, 步骤 3–3) 所得 μ^k 就是某关键节点的某级标准路线, 步骤 5中 $1 \rightarrow \cdots \rightarrow a_c$ 就是节点 a_c 的前主链 $\mu^*_{a_c}$. 根据自由时差定理和特征值的概念, 式 (17) 正确.

1) 当 $k = 1$时, 根据步骤 1、2和 3, 找出关键节点最小的 1级特征值, 即

$$I^1 = \min\{D_j^1(i) \in \Omega^1\} = D_r^1(a_1) \tag{19}$$

根据步骤 5, 找出关键节点 r的 2级标准工序 $A_r^2(a_2)$, 计算 2级特征值

$$D_r^2(a_2) = D_r^1(a_1) + FF_{A_r^2(a_2)} \tag{20}$$

故

$$I^1 < D_r^2(a_2) \tag{21}$$

根据式 (19)、(21) 和步骤 6, 将 I^1移出 Ω^1, 再将 $D_r^2(a_2)$ 移入 Ω^1 后组成的集合 Ω^2 内的所有特征值都大于 I^1. 再根据步骤 3

$$I^2 = \min\{D_j^t(i) \in \Omega^2, (j) \in \mu^{\nabla}\}$$

故

$$I^1 < I^2$$

2) 设当 $k = m > 1$时, $I^{m-1} < I^m$, 现证当 $k = m + 1$时, $I^m < I^{m+1}$.

设 $I^m = D_e^c(a_c)$, 根据步骤 3和 5

$$I^m = \min\{D_j^t(i) \in \Omega^m\} = D_e^c(a_c) \tag{22}$$

根据步骤 5和式 (18), 找出节点 e的 $c + 1$级标准工序 $A_e^{c+1}(a_{c+1})$, 计算特征值

$$D_e^{c+1}(a_{c+1}) = D_e^c(a_c) + FF_{A_e^{c+1}(a_{c+1})} \tag{23}$$

故

$$I^m < D_e^{c+1}(a_{c+1}) \tag{24}$$

根据式 (22)、(24) 和步骤 6, 将 I^m 移出 Ω^m, 再将 $D_e^{c+1}(a_{c+1})$ 移入 Ω^m 后组成的集合 Ω^{m+1} 内的所有特征值都大于 I^m. 再根据步骤 3

$$I^{m+1} = \min\{D_j^t(i) \in \Omega^{m+1}, (j) \in \mu^{\nabla}\}$$

故

$$I^m < I^{m+1}$$

所以 $I^k < I^{k+1}$ 成立.

2. 再证明若用该算法实现了目标 1: $K = N$; 或目标 2: $T = |\mu|_{\min}$, 则所有关键节点的所有特征值都已被计算出来.

若实现目标 1或目标 2, 意味着要找出所有的非关键路线, 由命题 1可知, 即计算出所有关键节点的所有特征值.

用反证法证明. 假设当用该算法实现了这两个目标时, 关键节点 s的某个特征值 $D_s^t(a_t)$ 还没有被计算出来, 根据步骤 5和式 (18)

$$D_s^t(a_t) = D_s^{t-1}(a_{t-1}) + FF_{A_s^t(a_t)}$$

说明 $D_s^{t-1}(a_{t-1})$ 也没有被计算出来, 再根据步骤 5和式 (18)

$$D_s^{t-1}(a_{t-1}) = D_s^{t-2}(a_{t-2}) + FF_{A_s^{t-1}(a_{t-1})}$$

说明 $D_s^{t-2}(a_{t-2})$ 也没有被计算出来. 依此类推

$$D_s^2(a_2) = D_s^1(a_1) + FF_{A_s^2(a_2)} = FF_{A_s^1(a_1)} + FF_{A_s^2(a_2)}$$

说明 $FF_{A_s^1(a_1)}$ 没有被计算出来, 与步骤 1相悖, 所以假设不成立, 即 2) 成立.

3. 由 1和 2, 用该算法能算出所有关键节点的特征值, 若网络中共有 N阶次关键路线, 则共包含 N 个不同的值 I^k, 且 $I^k < I^{k+1}$, 由命题 1

$$I^k = D^{[k]}, \quad k = 1, 2, \cdots, N$$

所以命题 2成立. 证毕.

命题 **3** 在用该算法找完 k阶次关键路线后, ①k阶次关键路线必已全部找出; ② 不会找出阶数高于 k阶的次关键路线.

证明

1. 由命题 2的证明 2可知 ①成立;

2. 用反证法证明 ②成立. 假设在用该算法找完 k阶次关键路线后, $k + i$阶次关键路线也被找出, 根据特征值的概念和命题 1, 相当于步骤 3–1) 中将大于 $I^j (j \leqslant k)$ 的特征值从 Ω^j中选出, 以至于步骤 3–2)、3–3) 找出的路线其路长小于所求 k阶次关键路线的路长, 与步骤 3相悖, 所以假设不成立, 即 ②成立.

所以命题 3成立. 证毕.

由于 3个命题成立, 所以最小特征值法正确.

3.3 算法复杂性分析

假设网络中共有 n个工序, 最小特征值法的计算复杂性分析如下:

步骤 1需要计算所有工序的总时差, 找出总时差为零的工序连成关键路线, 复杂度为 $O(n)$.

步骤 2和步骤 5需要计算工序的自由时差, 最多计算 n次, 并将非零值找出, 复杂度为 $O(n)$.

步骤 3- 1) 搜索最小值, 复杂度为 $O(n)$; 步骤 3- 2) 搜索递推式所列工序, 复杂度为 $O(n)$; 步骤 3- 3) 搜索自由时差为零的工序并与所列工序连成路线, 复杂度为 $O(n)$. 所以步骤 3的复杂度为 $O(n)$.

步骤 4检验, 最多检验 n次, 复杂度为 $O(n)$.

步骤 6为单个数值的移动, 复杂度为 $O(n)$.

所以步骤 1～ 6运行一次的复杂度为 $O(n)$.

由于算法在步骤 3～ 6之间循环, 每一次循环都围绕 1个工序来计算, 所以最多循环 n次. 可见, 该算法的计算复杂度为

$$nO(n) = O(n^2)$$

4 应用举例

某项目工程的 CPM 网络计划如图 1所示, 找出该网络图的前 4阶次关键路线, 并组成子网络.

解

1 把关键工序相连得关键路线 μ^{∇}

$$\mu^0 = \mu^{\nabla} = 1 \to 4 \to 10 \to 14 \to 19 \to 24 \to 27$$

$$|\mu^{\nabla}| = |\mu^0| = 520$$

2 1) 求所有关键节点的 1级特征值, 组成集合 Ω^1, 从中找出最小值 I^1 如下

$$I^1 = D^1_{14}(9) = 1: [(9, 14)]$$

2) 求 1阶次关键路线 μ^1.

$\because FF_{1,4} = FF_{4,9} = FF_{14,19} = FF_{19,24} = FF_{24,27} = 0$

$\therefore$ 这些工序和节点 9, 14组成的路线为 μ^1

$$\mu^1 = 1 \to 4 \to 9 \to 14 \to 19 \to 24 \to 27$$

$$|\mu^1| = |\mu^0| - I^1 = 519$$

3 1) 找出 μ^1 上节点 1, 4, 9的自由时差非零的紧前工序, 按式 (18) 计算特征值

$$D^2_{14}(3) = D^1_{14}(9) + FF_{3,9} = 21$$

$$D^2_{14}(5) = D^1_{14}(9) + FF_{5,9} = 31$$

2) 将 $D^1_{14}(9)$ 移出 Ω^1, $D^2_{14}(3)$ 和 $D^2_{14}(5)$ 移入 Ω^1, 组成集合 Ω^2, 找出最小值 I^2 如下

$$I^2 = D^1_{27}(25) = 2: [(25, 27)]$$

3) 求 2阶次关键路线 μ^2.

$\because FF_{1,4} = FF_{4,10} = FF_{10,14} = FF_{14,19} = FF_{19,25} = 0$

$\therefore$ 这些工序和节点 25, 27组成的路线为 μ^2.

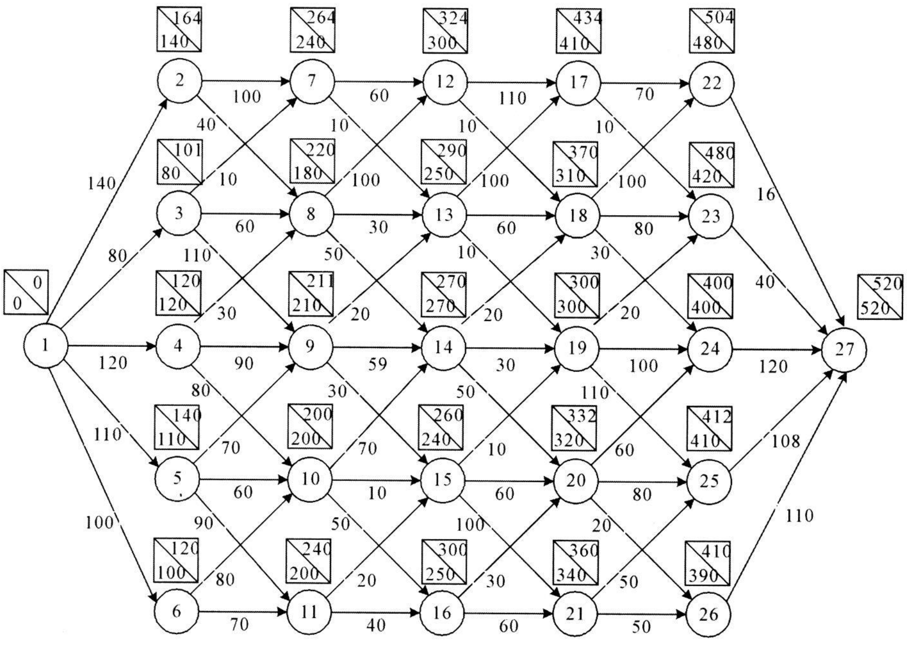

图 1 CPM 网络计划图

Fig. 1 CPM network planning

$$\mu^2 = 1 \to 4 \to 10 \to 14 \to 19 \to 25 \to 27$$

$$|\mu^2| = |\mu^0| - I^2 = 518$$

4　1) 找出 μ^2 上节点 1, 4, 10, 14, 19, 25的自由时差非零的紧前工序, 按式 (18) 计算特征值, 并将其移入 Ω^2, I^2移出 Ω^2, 组成集合 Ω^3, 找出最小值 I^3如下

$$I^3 = D^2_{27}(9) = 3: [(9, 14), (25, 27)]$$

2) 求 3阶次关键路线 μ^3.

$$\because FF_{1,4} = FF_{4,9} = FF_{14,19} = FF_{19,25} = 0$$

$\therefore$ 这些工序和节点 9, 14和 25, 27组成的路线为 μ^3

$$\mu^3 = 1\to 4\to 9\to 14\to 19\to 25\to 27$$

$$|\mu^3| = |\mu^0| - I^3 = 517$$

5　1) 找出 μ^3 上节点 1, 4, 9的自由时差非零的紧前工序, 按式 (18) 计算特征值, 并将其移入 Ω^3, I^3 移出 Ω^3, 组成集合 Ω^4, 找出最小值 I^4如下

$$I^4 = D^1_{27}(22) = 24: [(22, 27)]$$

2) 求 4阶次关键路线 μ^4.

$$\because FF_{1,2} = FF_{2,7} = FF_{7,12}, FF_{12,17} = FF_{17,22} = 0$$

$\therefore$ 这些工序和节点 22, 27组成的路线为 μ^4

$$\mu^4 = 1\to 2\to 7\to 12\to 17\to 22\to 27$$

$$|\mu^4| = |\mu^0| - I^4 = 496$$

6　将路线 $\mu^0 \sim \mu^4$组成子网络, 如图 2

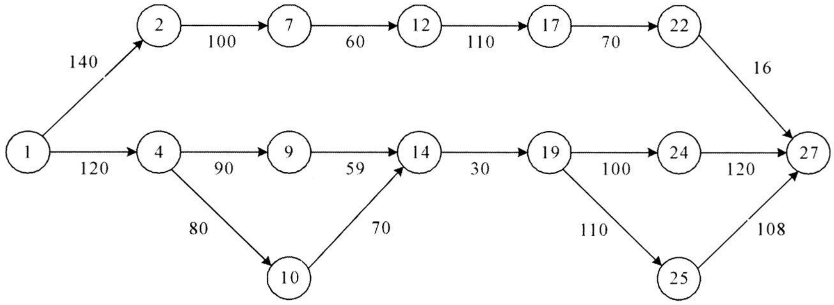

图 2　子网络

Fig. 2 Sub-network

5　结束语

CPM网络计划中 k阶次关键路线问题的解决可以解决管理中的很多问题, 尤其为研究其它问题提供了一个很好的工具, 能有力地促进 CPM网络计划优化理论的发展和项目管理水平的提高.

求 k阶次关键路线的最小特征值法的最大优点是从少数几条路线中求得的最长路线也是全网络的最长路线, 即它可以通过局部寻优实现全局寻优, 因此可以大大简化计算工作量. 作为未来的研究, 将对该算法作进一步改进.

最小特征值法的理论基础是自由时差定理, 该定理不但对求解 k阶次关键路线问题很重要, 而且还是研究其它问题的基础, 提供了网络计划研究的一种新理论和新思路, 从发展的角度来看有重要意义.

参 考 文 献:

[1] Elmaghraby S E. On criticality and sentivity in activity networks[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 127: 220—238

[2] 刘春林, 陈华友. 区间数计划网络的关键路问题研究[J]. 管理科学学报, 2006, 9(1): 27—32.
Liu Chun-lin, Chen Hua-you. Critical path for an interval project network[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(1): 27—32. (in Chinese)

[3] 安世虎, 聂培尧, 贺国光. 节点赋权网络中节点重要性的综合测度法[J]. 管理科学学报, 2006, 9(6): 37—42.
An Shi-hu, Nie Pei-yao, He Guo-guang. Comprehensive importance measurement for nodes within a node-weighted network[J]. Journal of Management Sciences in China, 2006, 9(6): 37—42. (in Chinese)

[4] Elmaghraby S E. Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models[M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 1977. 18—22

[5]乞建勋. 网络计划优化新理论与技术经济决策[M]. 北京: 科学出版社, 1997. 10—15.

Qi Jian-xun. The New Theory and Techno-economic Decision-making in Network Planning[M]. Beijing: Science Press, 1997. 10—15. (in Chinese)

[6]Elmaghraby S E. Activity nets: A guided tour through some recent developments[J]. European Journal of Operational Research, 1995, 82: 383—408.

[7]李星梅, 乞建勋. 基于时差分析的时标网络图研究[J]. 运筹与管理, 2006, 15(6): 28—33.

Li Xing-mei, Qi Jian-xun. Study on time-scaled network diagram based on the analysis of activity floats[J]. Operations Research and Management Science, 2006, 15(6): 28—33. (in Chinese)

[8]李星梅, 乞建勋, 苏志雄. 基于时差分析的资源均衡问题探究[J]. 中国管理科学, 2007, 15(1): 47—54.

Li Xing-mei, Qi Jian-xun, Su Zhi-xiong. The research on resource leveling based on the analysis of activity floats[J]. Chinese Journal of Management Science, 2007, 15(1): 47—54. (in Chinese)

[9]Michael D J, Kamburowski, Stallmann M. On minimum dummy arc problem[J]. Operations Research, 1993, 27(2): 153—168.

[10]Demeulemeester E L, Herroelen W S. Project Scheduling[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002. 17—48.

[11]Elmaghraby S E, Kamburowski. On project representation and activity floats[J]. Arabian Journal of Science and Engineering, 1990, 15: 627—637.

[12]王淑云, 朱祥松, 李 洁. 基于资源约束的扩张关键路径法研究[J]. 管理工程学报, 2006, 20(1): 109—111.

Wang Shu-yun, Zhu Xiang-song, Li Jie. Research of a step-by-step CPM base on resource-constrained[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2006, 20(1): 109—111. (in Chinese)

[13]张静文, 徐 渝, 何正文, 等. 项目调度中的时间–费用权衡问题研究综述[J]. 管理工程学报, 2007, 1(21): 92—97.

Zhang Jing-wen, Xu Yu, He Zheng-wen, *et al*. A review on the time/cost trade-offs problem in project scheduling[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2007, 1(21): 92—97. (in Chinese)

[14]张静文, 徐 渝, 何正文. 具有时间转换约束的离散时间–费用均衡问题研究[J]. 中国管理科学, 2006, 2(14): 58—64.

Zhang Jing-wen, Xu Yu, He Zheng-wen. Discrete time/cost trade-offs in project scheduling with time-switch constraints[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 2(14): 58—64. (in Chinese)

Free float theorem and algorithm of seeking the k-th order critical path

LI Xing-mei, QI Jian-xun, SU Zhi-xiong

School of Business Administration, North China Electric Power University, Beijing 102206, China

Abstract: To Solve problems such as how to seek any k-th order path in CPM network in project scheduling, some new conceptions: The k-th order normal activity, the k-th order eigenvalue and the k-th order normal path, are given. The free float theorem and eigenvalue theorem are deduced by analyzing these conceptions and the characteristics of free float. Then, an algorithm of seeking the k-th order critical path—the smallest eigenvalue algorithm whose complexity is $O(n^2)$, is proposed according to these conceptions and theorems, and correctness of the algorithm is analyzed. It is proved that the algorithm could achieve whole optimum by partial optimization. Finally, some properties and scope of this method are given by an example.

Key words: CPM network planning; the k-th order critical path; the smallest eigenvalue algorithm; free float