

大型废旧产品回收网络的数学模型与算法研究^①

范体军¹, 常香云¹, 陈荣秋², 胡清淮³

(1. 华东理工大学商学院, 上海 200237; 2. 华中科技大学管理学院, 武汉 430074

3. 武汉工程大学, 武汉 430073)

摘要: 废旧产品的回收与循环利用是关系当前国家资源与环境保护以及可持续性发展的重要问题. 以废旧产品回收利用的社会效益和经济效益为目标, 深入研究了废旧产品回收网络系统的优化设计, 提出了优化设计的数学模型和计算方法, 即大型非线性整数目标规划数学模型和有界变量 Benders 分解算法. 应用示例的计算结果, 证明了提出的模型和算法的可行性.

关键词: 回收网络; 逆向物流; 非线性整数目标规划; Bender 分解算法; 有界变量

中图分类号: F205 F224.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2009)04-0094-09

0 引言

废旧产品的回收与循环利用, 是发展循环经济的重要环节, 是实现资源节约型、环境友好型社会的重要基础, 是使我国走向可持续性发展的重要保证. 废旧产品对环境的危害正引起社会和政府部门的高度关注. 例如废旧电子产品含有的镉、汞等重金属会严重污染生活水资源. 美国、西欧以及日本等国家地区都以法律形式规定, 生产制造商必须回收与循环利用它们自己生产的废旧产品^[1]. 当然就运作方式而言, 既可以自己回收利用和进行最终处理, 也可以由政府对这些生产制造商进行征税后, 再交由其他专业组织处理. 另一方面, 废旧产品也是一种有用资源, 可以回收利用. 实践证明科学地回收利用废旧产品, 既可以充分利用资源和保护环境, 同时还能降低生产企业的产品成本和增加回收的效益^[1]. 许多国家或地区早在上个世纪就高度关注这方面的研究和实践^[2,3].

就废旧产品回收系统看, 废旧产品的回收网络设计是废旧产品循环利用的重要内容, 也是最困难的环节. 只有把被淘汰的废旧产品通过一定的回收渠道集中起来, 才能够进行集中拆解与处

理, 进行综合利用.

Fleischmann^[4,5]综述了废旧产品逆向物流的研究, 认为该网络系统具有高复杂性、目标的多样性、天生的供需失衡性以及具有“从多到少 (many to few)”的特征, 这些特性导致逆向物流网络运作效率低. 周根贵和曹振宇^[6]在只考虑了配送中心或回收中心的情况下, 构建了逆向物流网络中的选址模型, 并基于遗传算法探讨了该模型的具体算法. 马祖军等^[7]考虑再制造物流系统中废旧产品回收量和再生产品需求量的不确定性, 研究了单产品、单周期、有能力限制的再制造物流网络稳健优化设计模型, 但只考虑了回收中心、再制造工厂和再分销中心的 3 种设施的数量和位置确定问题. 刘春林^[8]针对供应链物资需求的特点, 提出了多点协作供应的数学模型, 但给出的是“启发式”求解方法. 唐加福^[9]从物流网络系统的角度考虑全球制造环境下单产品在多个供应商和多个用户之间的联合物流决策问题, 但限于正向物流. Jayaraman^[10]和 Krikke^[11]基于混合整数规划研究了废旧产品逆向物流网络设计问题, 但没有考虑废旧产品回收的动态性特征. Carter^[12]和

① 收稿日期: 2007-11-20; 修订日期: 2008-11-13.

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目 (70332001); 国家自然科学基金资助项目 (70871038, 70472057); 上海市教育委员会科研创新重点资助项目 (09ZS65).

作者简介: 范体军 (1967—), 男, 湖北洪湖人, 博士, 教授. Email: Fantijun@yahoo.com.cn

Murthy^[13]则在研究中考虑了废旧产品回收的动态性、多周期、非线性和不确定性等特征,但求解困难,使模型的应用受到一定限制。Min等^[14]提出了多梯级的逆向物流网络,但采用遗传算法求解,且没有考虑回收量的最大化。

为此,作者在研究文献的基础上,基于Min的多梯级的逆向物流网络,构建了大型非线性整数目标规划数学模型,并结合研究有界变量Bender分解算法,以解决模型中非线性和多周期的大型问题。结合理论研究,对程序的运行控制以及加快求解收敛的实用性方面也作了深入研究,并以较大应用实例进行验证,结果表明提出的模型和算法具有可行性。

1 废旧产品逆向物流回收的网络结构形式

借鉴Min等提出的逆向物流网络,作者考虑的废旧产品逆向物流网络形式如图1所示。为方便顾客(废旧产品提供者)设立收集点,通过它将物流转运至初级回收点;通过初级回收点转运至中心回收站,形成一定的规模,通过中心回收站转运至废旧产品的处理工厂。

在这个梯级网络结构中,所有收集点(i)的物流单向地流入初级回收点(j),初级回收点的物流单向地流入中心回收站(k),同样地,所有中心回收站(k)的物流单向地流入废旧产品的处理工厂(p)。由于主要关注废旧产品的回收网络,并且废旧产品回收的利益主体与再制造回收处理工厂的利益主体往往不同,为此不考虑中心回收站与处理工厂的约束关系。

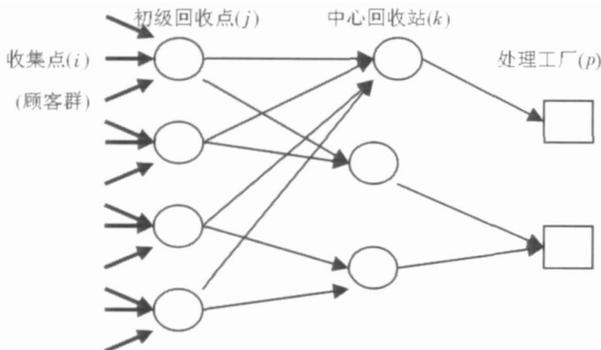


图 1 废旧产品回收逆向物流网络

Fig. 1 Network structure of reverse logistics for used products

2 废旧产品逆向物流回收网络设计的数学模型

2.1 符号与模型参数

λ —回收产品代号, $\lambda \in L$, 这里 L 为回收产品代号集合;

i —收集点代号, $i \in I$, 这里 I 为收集点代号集合;

j —初级回收点代号, $j \in J$, 这里 J 为初级回收点代号集合;

k —中心回收站代号, $k \in K$, 这里 K 为中心回收站代号集合;

E_i^j —初级回收点 j 可服务的收集点 i 的集合(由该两点可达距离(d_L)确定);

E_j^k —中心回收站 k 可服务的初级回收点 j 的集合(由该两点的运输费率(d_c)确定);

E_{jk}^λ —可从初级回收点 j 把废旧产品运送到中心回收站 k 的废旧产品种类集合, 即 λ 运送到中心回收站 k , 则有 $\lambda \in E_{jk}^\lambda$;

M —初级回收点可服务的最大收集点数;

N_λ —可回收废旧产品 λ 的中心回收站可服务的最大初级回收点数;

W —一年工作日数;

$r_{i\lambda}$ —收集点 i 的废旧产品 λ 的平均日收集量;

$a_{j\lambda}$ —收集点 i 运送至初级回收点 j 的废旧产品 λ 的单位回收成本;

$b_{j\lambda}$ —初级回收点 j 的废旧产品 λ 的单位回收处理成本, 包括分拣与搬运费;

$b_{j\lambda}^s$ —初级回收点 j 的废旧产品 λ 的单位存储费率;

$c_{jk\lambda}$ —从初级回收点 j 到中心回收站 k 的单位废旧产品 λ 的运输费率;

R_p —从初级回收点到中心回收站 1 次运出的出车费率;

p_j —初级回收点 j 的开办费(或租金);

q_k —中心回收站 k 的开办费(租金和设备费等);

$F_{j\lambda}$ —初级回收点 j 的日综合处理废旧产品 λ 的能力;

D_j —初级回收点 j 1 个周期的容许综合存储量;

$e_{j\lambda}$ —初级回收点 j 综合存储量废旧产品 λ 的折算系数;

$Q_{k\lambda}$ —中心回收站 k 的容许日综合处理废旧产品 λ 的能力.

2.2 决策变量

X_{jkl} —实数变量, 为从初级回收点 j 的回收周期内 1 次运输到中心回收站 k 的废旧产品 λ 的量, $j \in J, k \in K, \lambda \in E_j^k$;

T_j —整数变量, 为初级回收点 j 回收周期的天数 (一般均不多于 7 天), 视回收站 j 的回收量和容许存储量从模型计算得出, 即 $0 \leq T_j \leq 7$, 整数, $j \in J$;

y_{ij} —说明收集点 i 收集的废旧产品是否送到初级回收点 j 的 (0 1) 整数变量, 即如果是取 1 否则取 0 $i \in E_j^i, j \in J$;

$s_{j\lambda}$ —说明初级回收点 j 存储的废旧产品 λ 是否运输到中心回收站 k 的 (0 1) 整数变量, 即如果是取 1 否则取 0 $j \in E_j^k, k \in K, \lambda \in E_j^k$;

Z_j —说明是否开办初级回收点 j 的 (0 1) 整数变量, 即如果是取 1 否则取 0 $j \in J$;

G_k —说明是否开办中心回收站 k 的 (0 1) 整数变量, 即如果是取 1 否则取 0 $k \in K$.

2.3 基本数学模型

$$\max \left\{ \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{\lambda \in E_j^k} \frac{X_{jkl}}{T_j} \right\} \quad (1)$$

$$\min \left\{ W \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \left\{ \sum_{\lambda \in E_j^k} [a_{ij} X_{jkl} + (b_{jl} + \frac{b'_{j\lambda}}{2}) X_{jkl} + c_{jk} X_{jkl} J] \frac{1}{T_j} \right\} + R_p \frac{1}{T_j} + \sum_{j \in J} p_j Z_j + \sum_{k \in K} q_k G_k \right\} \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} s_{kl} = 1 \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall j \in J \quad (4)$$

$$\sum_{i \in E_j^i} y_{ij} \leq M Z_j \quad \forall j \in J \quad (5)$$

$$\sum_{j \in E_j^k} s_{kl} \leq N_l G_k \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{\lambda \in E_j^k} r_{ij} y_{ij} s_{kl} T_j = X_{jkl} \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall j \in E_j^k, k \in K \quad (7)$$

$$X_{jkl} \frac{1}{T_j} \leq F_{jl} Z_j \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall j \in E_j^k,$$

$$k \in K \quad (8)$$

$$\sum_{\lambda \in E_j^k} e_{j\lambda} X_{jkl} \leq D_j Z_j \quad \forall j \in J \quad k \in K \quad (9)$$

$$\sum_{j \in E_j^k} X_{jkl} \frac{1}{T_j} \leq Q_{kl} G_k \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall k \in K \quad (10)$$

$$y_{ij} = \{0, 1\} \quad s_{kl} = \{0, 1\} \quad T_j = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$i \in I, j \in J, k \in K, l \in L.$$

模型中式 (1) 表示回收区内年获取的综合回收废旧产品量为最大的第 1 级目标函数; 式 (2) 表示年总回收成本为最小的第 2 级目标函数, 其括号中第 2 项的 $(b'_{j\lambda}/2)$ 表示存储费用按 1 个周期的平均值计算. 注意式 (1) 中的 X_{jkl} 项和式 (2) 中的方括号中的求和式都只在 T_j 大于 0 时才存在. 式 (3) 表示从废旧产品综合收集点到初级回收点的网络梯级结构的约束条件, 式 (4) 则表示按废旧产品分类要求的从初级回收点到中心回收站的网络结构约束条件. 式 (5) 和式 (6) 分别表示初级回收点所服务的顾客群体数和中心回收站按废旧产品分类要求服务的初级回收点数的约束条件. 式 (7) 是决策变量 X_{jkl} 的数学表达式. 式 (8) 和式 (9) 分别是初级回收点 j 的日处理废旧产品 λ 的能力和 1 个周期综合存储废旧产品的能力约束条件, 式 (10) 则是中心回收站 k 的日处理废旧产品 λ 的能力约束条件. 注意上述式 (5) 和式 (7) 中的变量 y_{ij} 前面对下标 i 的求和域只是 E_j^i , 即初级回收点 j 对可与其相连的下标 i 的集合. 对下标 j 的求和域 E_j^k 的意义则是中心回收站 k 对可与其相连的下标 j 的集合. 而 $E_{j\lambda}^k$ 的意义则是中心回收站 k 对可提供 λ 类型废旧产品种与其相连的下标 j 的集合, 即有关系 $E_j^k \supset E_{j\lambda}^k$. 由于本文的数学模型为目标规划, 因此, 理论上一般不存在无解情况. 但如果计算结果的物理意义不可行的话, 往往可以对模型的相关参数进行适当调整, 重新运算该模型即可, 这样在算法设计中不需要增加多余的判断条件.

3 计算方法

尽管有学者针对上述的模型采用了遗传算法, 但根据 Radolph^[15], 一般的遗传算法不一定收敛, 只有每代保存了最优个体时才收敛. 即使遗传

算法收敛时, 求到的解通常只是所要解决问题的最优解的近似解. 除此之外, 实际应用遗传算法时往往出现早熟收敛和收敛性能差以及不容易编码等缺点. 因此, 针对上述缺点, 本文采用有界变量 Benders 分解算法. 这里的分解是把几种不同类型的整数变量进行分解, 用于处理这种非线性和多周期性难点, 为此把基本数学模型式首先进行相应的变换和化简.

3 1 模型的变换

用 y_{ij} 与 $s_{jk\lambda}$ 等变量直接取代 $X_{jkl\lambda}$ 变量, 并引进新的中间变量 $V_{ijk\lambda}, t_{ijk\lambda}, t'_{ijk\lambda}, T_{ijk\lambda}$ 因而写出目标规划的模型的数学式变为

$$\begin{aligned} \min P_1 \{ & W \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^k} \sum_{l \in E_l^k} - r_{il} t_{ijk} \} + \\ P_2 \{ & W \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^k} \sum_{l \in E_l^k} [r_{il} a_{ijl} + r_{il} (b_{jl} + \frac{b'_{jl}}{2}) + \\ & r_{il} G_{jk}] t_{ijk} + \sum_{j \in J} P_j Z_j + \sum_{k \in K} q_k G_k + \\ & \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} R_p \frac{W}{T_j} \} \end{aligned} \quad (11)$$

s t

$$\alpha_i: \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$\beta_{jl}: \sum_{k \in K} s_{jkl} = 1 \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall j \in J \quad (13)$$

$$\lambda_j: M Z_j \geq \sum_{i \in E_i^j} y_{ij} \quad \forall j \in J \quad (14)$$

$$\pi_{kl}: N_l G_k \geq \sum_{j \in E_j^k} s_{jkl} \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall k \in K \quad (15)$$

$$\omega_{jkl}: \sum_{i \in E_i^k} r_{il} t_{ijk} - F_{ij} Z_j \leq 0$$

$$\begin{aligned} P_t \min \sum_{i \in I} \alpha_i (1 - \sum_{j \in J} y_{ij}) + \sum_{j \in J} \sum_{i \in E_i^j} \beta_{jl} (1 - \sum_{k \in K} s_{jkl}) + \sum_{j \in J} \lambda_j (\sum_{k \in E_j^k} y_{ij}) + \sum_{k \in K} \sum_{i \in E_i^k} \pi_{kl} (\sum_{j \in E_j^k} s_{jkl}) + \\ \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^k} \sum_{l \in E_l^k} - \delta_{jkl} (y_{ij} + s_{jkl}) + \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^k} \sum_{l \in E_l^k} \gamma_{jkl} (y_{ij} + s_{jkl} - 1) \end{aligned} \quad (25)$$

这里有两点值得注意: 一是在问题 P 中除含 y_{ij} 与 s_{jkl} 项的约束条件外, 其他约束条件 (式 (16) — (18), 式 (21) — (23)) 的右边常数都为 0 因

$$\forall l \in E_{jl}^k \quad \forall j \in E_j^k \quad k \in K \quad (16)$$

$$\alpha_{kl}: \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^k} r_{il} t_{ijk} - Q_{kl} G_k \leq 0$$

$$\forall l \in E_{jl}^k \quad \forall k \in K \quad (17)$$

$$\varepsilon_{jkl}: \sum_{i \in E_i^k} \sum_{l \in E_l^k} q_{il} r_{il} T_{ijk} - D_j Z_j \leq 0$$

$$\forall j \in E_j^k \quad k \in K \quad (18)$$

$$\delta_{jkl}: 2V_{ijk} \leq y_{ij} + s_{jkl} \quad (V_{ijk} = y_{ij} s_{jkl}) \quad (19)$$

$$\gamma_{jkl}: V_{ijk} \geq y_{ij} + s_{jkl} - 1 \quad (20)$$

$$\xi_{jkl}: t_{ijk} - V_{ijk} \leq 0 \quad (t_{ijk} = V_{ijk} t'_{ijk}) \quad (21)$$

$$\rho_{jkl}: T_{ijk} - \gamma t_{ijk} \leq 0 \quad (T_{ijk} = T_j t_{ijk}) \quad (22)$$

$$\eta_{jkl}: t_{ijk} \geq 0 \quad \tau_{jkl}: V_{ijk} \geq 0 \quad \upsilon_{jkl}: T_{ijk} \geq 0 \quad (23)$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad s_{jkl} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad t'_{ijk} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$T_j = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7) \quad (24)$$

$i \in I, j \in J, k \in K, l \in L$

这里 P_1 和 P_2 是代表目标函数第 1 优先级和第 2 优先级的符号. 式 (19) — (22) 中括号中的表达式是说明变量 $V_{ijk}, t_{ijk}, T_{ijk}$ 的非线性表达式, 其左边的式子表示相应变量间的约束条件式, 其中引进变量 t'_{ijk} 的意义为, 当 $T_j > 0$ 时 $t'_{ijk} = 1$, 而当 $T_j = 0$ 时 $t'_{ijk} = 0$ 式 (19) 和 (20) 是变量 V_{ijk} 的等价表达式^[16]. 各约束条件式 (12) — (22) 最左边和式 (23) 中的希腊字母代表其后相应的对偶变量.

3 2 Benders 分解

把上节的变量分为两组: 变量 y_{ij} 与 s_{jkl} 为一组; 其他变量为另一组. 首先令第 1 组变量为未知数, 而把 $\alpha_i, \beta_{jl}, \lambda_j, \pi_{kl}$ 作为已知数, 按对偶原理写出问题 P_t 的目标函数

此在问题 P 的目标函数式 (25) 中不必列出; 二是由于目标函数中前两项是来自取等式的前两个约束条件, 它必为零值. 因此问题 P_t 等价于如下问题

$$\begin{aligned} P_t: \min \sum_{j \in J} \lambda_j (\sum_{i \in E_i^j} y_{ij}) + \sum_{k \in K} \sum_{i \in E_i^k} \pi_{kl} (\sum_{j \in E_j^k} s_{jkl}) + \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^k} \sum_{l \in E_l^k} - \delta_{jkl} (y_{ij} + s_{jkl}) + \\ \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^k} \sum_{l \in E_l^k} \gamma_{jkl} (y_{ij} + s_{jkl} - 1) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{s t} \quad \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad \sum_{k \in K} s_{jkl} = 1 \quad \forall l \in E_{jl}^k \quad \forall j \in J$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad s_{jkl} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad i \in I, j \in J, k \in K, \forall l \in L$$

该问题具两个优先级别目标函数,且由于集合 I 一般较大,问题是大型 (0 1) 整数目标规划问题.但鉴于该问题的系数矩阵是单位模的,可借用线性目标规划方法解此问题,得出的解自然

就是 (0 1) 整数解^[17].这时把问题 P_i 解算的结果视为已知,而以属于另一组的对偶变量 (式 (12) — (23) 中相应的对偶变量) 为未知数,构成相应的对偶问题为

$$\begin{aligned}
 D: \max & \sum_{j \in J} \lambda_j \left(\sum_{i \in E_i^j} y_{ij} \right) + \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \pi_{kl} \left(\sum_{l \in E_l^k} s_{kl} \right) + \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^j} \sum_{l \in E_l^k} -\delta_{ijkl} (y_{ij} + s_{kl}) + \\
 & \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^j} \sum_{l \in E_l^k} v_{ijkl} (y_{ij} + s_{kl} - 1) \\
 \text{s t} & -r_i \omega_{jkl} - r_l \sigma_{jk} + 7\rho_{jkl} - \xi_{jkl} + \eta_{jkl} = (-Wr_{ib} Wr_{il} (a_{ij} + b_j + \frac{b'_j}{2} + c_{jkl})) \\
 & \forall i \in E_i^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_l^k, \forall k \in K, v_{ijkl} = 1
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k \in K} (F_{jl} \omega_{jkl} + D_j \varepsilon_{jkl}) + M \lambda_j \leq (0 p_j) \quad \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_l^k \\
 & Q_{kl} \sigma_{jk} + N_l \pi_{kl} \leq (0 q_k) \quad \forall l \in E_l^k, \forall k \in K \\
 & \xi_{jkl} - 2\delta_{ijkl} + v_{ijkl} \leq (0 0) \quad \forall i \in E_i^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_l^k, \forall k \in K, v_{ijkl} = 1, t_{ijkl} = 1 \\
 & \rho_{ijkl} \geq (0 0) \quad \forall i \in E_i^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_l^k, \forall k \in K, v_{ijk} = 1, t_{ijk} = 1 \\
 & -2\delta_{ijkl} + v_{ijkl} \leq (0 0) \quad \forall i \in E_i^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_l^k, \forall k \in K, v_{ijk} = 1, t_{ijk} = 0 \\
 & \delta_{jkl} = 0, v_{jkl} = 0 \quad \forall i \in E_i^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_l^k, \forall k \in K, v_{ijk} = 0
 \end{aligned}$$

由于原问题是具有两个级别的目标函数的大型整数规划问题,对偶变量是双元素向量^[9],问题 D 的每个约束条件是双重的,而且约束条件

数很多,直接解这个问题极为不便.采用有界变量对偶单纯形法解此问题是比较理想的,因此写出近似对应问题 D 的原问题 D_1 为

$$\begin{aligned}
 \min P_1 \{ & W \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^j} \sum_{l \in E_l^k} -r_{il} t_{ijkl} \} + P_2 \{ W \sum_{k \in K} \sum_{j \in E_j^k} \sum_{i \in E_i^j} \sum_{l \in E_l^k} [r_{il} a_{ij} + r_{il} (b_{jl} + \frac{b'_j}{2}) + r_{il} c_{jkl}] t_{ijkl} + \\
 & \sum_{j \in J} p_j Z_j + \sum_{k \in K} q_k G_k + \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} R_p \frac{W}{T_j} \} \\
 \text{s t} & \\
 & M Z_j \geq \sum_{i \in E_i^j} y_{ij} \quad \forall j \in J \\
 & N_l G_k \geq \sum_{j \in E_j^k} s_{kl} \quad \forall l \in E_l^k, \forall k \in K \\
 & \sum_{i \in E_i^j} r_{il} t_{ijkl} - F_{jl} Z_j \leq 0 \quad \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_l^k, k \in K \\
 & \sum_{j \in E_j^k} \sum_{l \in E_l^k} r_{il} t_{ijkl} - Q_k G_k \leq 0 \quad \forall l \in E_l^k, \forall k \in K \\
 & \sum_{k \in E_{jk}^k} \sum_{l \in E_l^k} e_{jl} r_{il} T_{ijkl} - D_j Z_j \leq 0 \quad \forall j \in E_j^k, k \in K \\
 & T_{ijkl} - 7t_{ijkl} \leq 0 \quad (T_{ijkl} = T_j t_{ijkl}) \\
 & t_{ijkl} = \begin{cases} 1 & T_{ijkl} \geq 0 \\ 0 & T_j = (0 1 2 3 4 5 6 7) \end{cases} \\
 & i \in I, j \in J, \forall l \in L, k \in K
 \end{aligned} \tag{28}$$

由于解问题 P_i (即式 (26)) 后即可得出 $v_{ijkl} (= y_{ij} s_{kl})$. 由模型变换的式 (21) 和 (23), 认为变量 t_{ijkl} 即为 (0 1) 变量. 由于问题 D_1 中含有 (0 1) 整数变量 t_{ijkl}, Z_j, G_k 和一般整数变量 T_{ijkl} , 为简化运算, 把这两种变量和相应约束条件分解

成两部分 D_{11} 和 D_{1T} , 使前一部分为纯 (0 1) 整数规划问题, 后一部分为纯带有界变量的 $(0 \leq T_{ijkl} \leq 7t_{ijkl})$ 整数规划问题. 实际上可在解出前一部分问题因而得出 t_{ijkl} 后, 以其作为已知而直接代入后一部分问题, 即直接根据 $T_{ijkl} = T_j t_{ijkl} (0 \leq$

$T_j \leq 7$ (整数) 的关系从相应的约束条件和目标函数项 (见变换模型中式 (18)、(22) 和式 (11) 的相应项) 直接计算出 T_j 和式 (11) 的最后一项的目标函数值, 作为本次迭代的结果. 这样不但计算简便, 也避免了目标函数非线性的困扰. 在解算原问题 D_{1t} 各变量的同时也得出相应的对偶变量: 其中对偶变量 ξ_{jkl} 可从 t_{jkl} 的上界检验数得出 ($t_{jkl} \leq 1$). δ_{jkl} 和 v_{jkl} 则理论上可根据问题 (27) (即按计算式 (19) - (21) 的互余松弛条件) 计算, 但实际上由于这些条件的不足, δ_{jkl} 和 v_{jkl} 的计算只是近似的, 并且还引进问题 (26) 的对偶变量一起构成如下方程组进行近似计算

对情形 $V_{ijkl} = 1$ 和 $t_{ijkl} = 1$

$$\begin{aligned} \forall i \in E_b^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_{j_b}^k, \forall k \in K \\ \delta_{jkl} - v_{jkl} + \alpha_i - \lambda_j - \mu_{ij} \leq (0, 0) \\ \delta_{jkl} - v_{jkl} + \beta_j - \pi_{kl} - v_{jkl} \leq (0, 0) \\ \xi_{jkl} - 2\delta_{jkl} + v_{jkl} \leq (0, 0) \end{aligned} \quad (29, 1)$$

对情形 $V_{ijkl} = 1$ 和 $t_{ijkl} = 0$

$$\begin{aligned} \forall i \in E_b^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_{j_b}^k, \forall k \in K \\ \delta_{jkl} - v_{jkl} + \alpha_i - \lambda_j - \mu_{ij} \leq (0, 0) \\ \delta_{jkl} - v_{jkl} + \beta_j - \pi_{kl} - v_{jkl} \leq (0, 0) \\ -2\delta_{jkl} + v_{jkl} \leq (0, 0) \end{aligned} \quad (29, 2)$$

对情形 $V_{ijkl} = 0$

$$\begin{aligned} \forall i \in E_b^j, \forall j \in E_j^k, \forall l \in E_{j_b}^k, \forall k \in K \\ \delta_{jkl} - v_{jkl} + \alpha_i - \lambda_j + \mu'_{ij} \leq (0, 0) \\ \delta_{jkl} - v_{jkl} + \beta_j - \pi_{kl} + v'_{jkl} \leq (0, 0) \end{aligned} \quad (29, 3)$$

式中 μ_{ij} 与 v_{jkl} 为问题 (26) 中相应 $y_{ij} = 1$ 和 $s_{jkl} = 1$ 的对偶变量, μ'_{ij} 与 v'_{jkl} 则为相应 $y_{ij} = 0$ 和 $s_{jkl} = 0$ 的对偶变量, 它们都可从相应原变量的检验数得出. 注意式 (29, 3) 的第 2 方程对应 $s_{jkl} = 1$ 的情形则把 $(-v_{jkl})$ 取代变量 v'_{jkl} . 把这些对偶变量 (包括 $\lambda_j, \pi_{kl}, \xi_{jkl}, \delta_{jkl}, v_{jkl}$) 作为参数在下一迭代送入问题 P_t 框, 以再次构成新 P_t 问题. 反复构成新的 P_t 问题和 D_1 问题和反复迭代, 最后使问题的解逼近于一个稳定的最优或近似最优的整数解.

3.3 求解算法

求解算法按如下步骤运行:

(1) 计算开始时设所有对偶变量 $\lambda_j, \pi_{kl}, \delta_{jkl}, v_{jkl}$ 的初值 0

(2) 以对偶变量 $\lambda_j, \pi_{kl}, \delta_{jkl}, v_{jkl}$ 为目标函数中的已知系数值构成问题 P_b , 用改进线性目标规划法求解变量 y_{ij} 与 s_{jkl} , 从而得出 (0, 1) 形式的 y_{ij} 与

s_{jkl} 值, 据此计算 V_{ijkl} 值 ($i \in I, j \in J, \lambda \in L, k \in K$);

(3) 构成问题 D_1 , 把该问题分为 D_{1t} 和 D_{1T} 两部分考虑. 对问题 D_{1t} 用改进有界变量目标规划对偶单纯形法按纯 (0, 1) 整数规划问题求解 t_{jkl}, Z_j, G_b , 从而得出相应各约束条件的对偶变量 $\lambda_j, \pi_{kl}, \xi_{jkl}, \delta_{jkl}, v_{jkl}$. 按问题 D_{1T} 部分的结果直接解整数规划问题 D_{1T} , 计算 T_j 和目标函数值;

(4) 判断问题 P_b 和 D_1 前后两次迭代是否有效和收敛, 如果是即得出计算结果; 否则以获取的对偶变量 $\lambda_j, \pi_{kl}, \xi_{jkl}, \delta_{jkl}, v_{jkl}$ 为已知, 转向步骤 (2) 进行下一次迭代运算.

实际运算表明, 判断问题 P_b 和 D_1 是否有效和收敛, 即运算结束准则归结如下:

(1) 最大回收准则, 即问题 D_1 中涉及的所有变量 $t_{jkl} = 1$ 说明所有收集点都达到有效;

(2) 可行性准则, 即问题 P_b 和 D_1 的最终解都为完全整数解;

(3) P_t 和 D_1 分别连续两个解的目标函数逼近, 差值在限差以内.

实际运算也进一步表明了模型和算法具有如下明显优点:

(1) 有效解决了问题中的非线性与多周期问题;

(2) 用有界变量 Bender 分解算法构成 P_t 的单位模问题和 D_{1t} 的 (0, 1) 整数规划问题, 使问题最困难部分的解得到简化和加快.

考虑多回收产品的综合回收情况, 由于问题中考虑的回收产品 (λ) 数与收集点 (i) 数一般都比较, 因而问题的变量和约束条件数比较多, 使问题变得较大或很大. 实际运算也进一步表明, 为了加快运算, 使问题尽快获得最优、满意或实用解, 除算法外, 结合算法的实际编程技术也具有极为重要的作用. 例如借助于“运行导向”技术, 使运算法能更快收敛而得出最终结果.

4 算例研究

以两个应用算例来说明: 一个是中型问题 (问题 A), 具有 3 种类型的 8 种回收废旧产品、171 个收集点、33 个待选初级回收站和 16 个待选中心回收站; 另一个是较大型问题 (问题 B), 同样具有 3 种类型的 8 种回收产品, 但有 688 个收集

点、101个待选初级回收站和 36个待选中心回收站。由于问题模型以及计算过程中所涉及的参数量、数据量和信息量都较多，不便于在文中列出。表 1和表 2是分别列出模型规模和模型运行时自动生成的运算信息。表 1的计算是从待选初级回收站和中心回收站最优地选择可用者。结果的第 1行是对问题 A的结果，它表明对问题 A 选用了初级回收站 25个(表中括号中的数字)，而未被选用的有 8个，其编号分别为 7、10、12、14、15、16、17、20、21。对问题 A 选用了中心回收站 15个(表中括号中的数字)，而未被选用的只有 1个，其编号为 10。第 2行是对问题 B的相应结果。表 2是分别对这两个问题(A与 B)列出的 P_{it}问题和 D_{1t}问题的变量数与约束条件数，这些问题模型都是自动生成的。该表中还列出了相应的运算信息。这里补充说明，表 2中只列出子问题 D_{1t}的相关信息，而不是整个问题 D₁的信息，其原因在前面 3.2 节中已作说明。

息，而不是整个问题 D₁的信息，其原因在前面 3.2 节中已作说明。

该两应用实例问题的相应计算设计网络按坐标位置分别展示于图 2和图 3 图中的小圆代表收集点(即顾客群)，小三角形代表初级回收站，小正方形代表中心回收站。须注意收集点(小圆)与初级回收站(小三角形)的连接关系除受两者间距离短的影响外，还受到初级回收站的可服务收集点数与其能力、存储容量以及其本身的开办费用等因素的影响。而对中心回收站来说，这里每个中心回收站只收集 1种类型的废旧产品，以便于处理。因此对具有 3种类型的废旧产品来说，1个初级回收站必须分别有选择地与 3个中心回收站连接。这些情况在图中都得到了明晰的反映。分析这些计算结果充分表明，提出的数学模型和算法是可靠的、实用的，具有一定的可行性。

表 1 模型规模

Table 1 Size of model

	收集点数	待选初级回收站数	待选中心回收站数	回收废旧产品数	废旧产品分类数
问题 A	171	33(25)	16(15)	8	3
问题 B	688	101(90)	36(23)	8	3

表 2 模型生成与运算信息

Table 2 Information of model generating and operating

	P _{it} 问题(自动生成)		D _{1t} 问题(自动生成)		运算时间	计算机型号
	变量数	约束条件数	(Q 1)变量数	约束条件数		
问题 A	1454	270	562	265	45 秒	IBM T42
问题 B	4526	991	2 201	893	265 秒	IBM T42

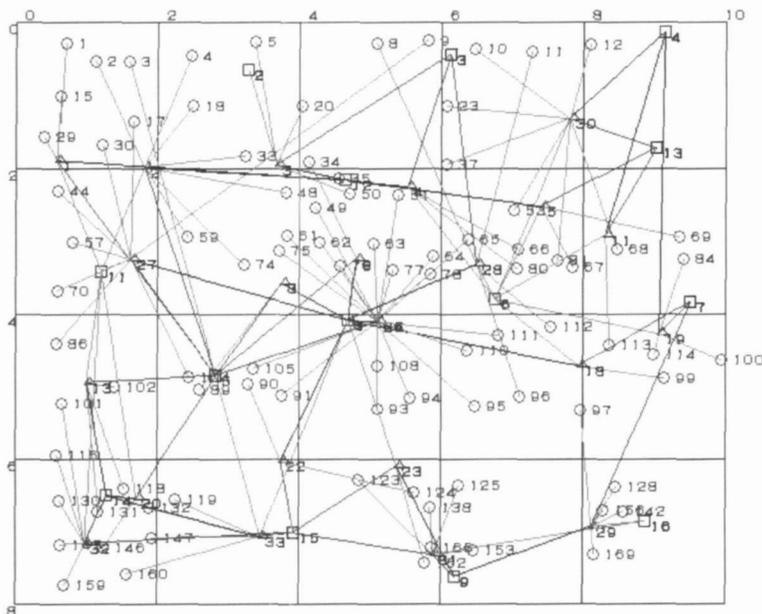


图 2 废旧产品逆向物流回收网络(问题 A)

Fig. 2 Reverse logistics network for used products (Problem A)

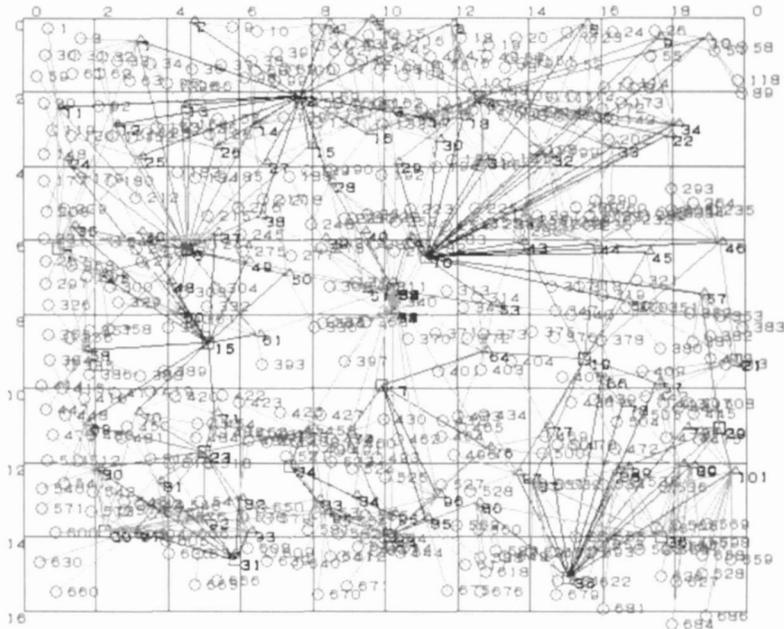


图 3 废旧产品逆向物流回收网络 (问题 B)

Fig. 3 Reverse logistics network for used products (Problem B)

5 结束语

废旧产品的回收与循环利用, 是关系当前国家资源与环境保护以及可持续性发展的重要问题. 本文在借鉴国内外研究者们对逆向物流回收

网络设计的思想、方法和条件分析的基础上, 对废旧产品的大型综合回收网络系统作了进一步的深入研究. 提出了大型非线性整数目标规划数学模型, 和有界变量 Benders 分解算法, 以解决模型中非线性、多周期和大型问题. 应用实例证实了提出的模型和算法是可行的.

参考文献:

- [1] Manbir S S, Bryan R. Models for recycling end-of-life products [J]. *OR Spektrum*, 2001, 23(1): 07—115
- [2] Flipper S D P. Logistic Aspects of Reuse: An Review [C]. *Proceedings of the First International Working Seminar on Reuse*. Eindhoven, The Netherlands, 1996, 109—118
- [3] Kriv et A, Susan an E, Seliger G. Systematic integration of design for recycling into product design [J]. *International Journal of Production Economics*, 1995, 38(1): 15—22
- [4] Fleischmann M, Jacqueline M, et al. Quantitative models for reverse logistics: A review [J]. *European Journal of Operational Research* 1997, 103(1): 1—17.
- [5] Fleischmann M, Krikke H R, et al. A characterization of logistics networks for product recovery [J]. *Omega*, 2000, 28(1): 53—66
- [6] 周根贵, 曹振宇. 遗传算法在逆向物流网络选址问题中的应用研究 [J]. *中国管理科学*, 2005, 13(1): 42—47
Zhou Genji, Cao Zhenyu. A genetic algorithm approach to location-allocation problem in reverse logistic network [J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2005, 13(1): 42—47. (in Chinese)
- [7] 马祖军, 代颖, 刘飞. 再制造物流网络的稳健优化设计 [J]. *系统工程*, 2005, 23(1): 74—78
Ma Zujun, Dai Ying, Liu Fei. Robust optimal design of remanufacturing logistics networks [J]. *Systems Engineering*, 2005, 23(1): 74—78. (in Chinese)
- [8] 刘春林. 基于协作的供应链优化模型 [J]. *管理科学学报*, 2004, 7(4): 9—13

- (4): 9—13 (in Chinese)
- [9]唐加福, Yung Kai-leung 刘士新. 单产品物流网络系统的联合决策模型[J]. 管理科学学报, 2005, 8(2): 54—60
Tang Jiafu, Yung Kai-leung, Liu Shixin. Joint decisions model for logistic network system with single product[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(2): 54—60 (in Chinese)
- [10] Jayaraman V, Patterson R A, Rolland E. The design of reverse distribution networks: Models and solution procedures[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 150(2): 28—49.
- [11] Krkka H R, Kooi E J, Schurr P C. Networks Design in Reverse Logistics[M]. Berlin: Springer, 1999
- [12] Carter C R, Ellram L M. Reverse logistics: A review of the literature and framework for future investigation[J]. Journal of Business Logistics, 1998, 19(1): 85—102
- [13] Murthy D N P, Ma L. MRP with uncertainty: A review and some extensions[J]. International Journal of Production Economics, 1991, 25(1): 51—64.
- [14] Min H, Koh J, Ko C S. A genetic algorithm approach to developing the multi echelon reverse logistics network for product returns[J]. Omega, 2006, 34(1): 56—69.
- [15] Radolph G. Convergence analysis of canonical genetic algorithms[J]. IEEE Transactions on Neural Network, 1994, 5(1): 96—101.
- [16] Taha H. Integer Programming, Theory, Applications and Computations[M]. New York: Academic Press, 1975
- [17] 成思危, 胡清淮. 大型线性目标规划及其应用[M]. 郑州: 河南科技出版社, 2000
Chen Siwei, Hu Qinghuai. Large Linear Goal Programming and Its Applications[M]. Zhengzhou: Henan Press of Science and Technology, 2000 (in Chinese)

Research on mathematical model and algorithm for large composite recovery network of used products

FAN Ti-jun¹, CHANG Xiang-yun¹, CHEN Rong-qiu², HU Qing-huai³

1. School of Business, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China

2. College of Management, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China

3. Wuhan Engineering University, Wuhan 430073, China

Abstract The recovery and circulating reutilization of used products are of vital importance for both resource and environment protections and sustained development. This paper presents an intensive study on the optimized design for large composite recovery network of used products with the objective of maximizing both the social and economical profits from the recovery and reutilization of used products. The mathematical model and algorithm are proposed for designing the recovery network of the reverse logistics, that is, the large scale non-linear integer goal programming model and the Bender decomposition algorithm with bounded variables. The relatively larger application examples are calculated which manifests the availability of the model and algorithm proposed.

Key words recovery network; reverse logistics; large scale non-linear integer goal programming; bender decomposition algorithm; bounded variables