考虑不可对冲收入的最优消费 - 投资选择①

杨科威
(复旦大学, 上海 200433)

摘要: 基金分离定理说明投资者应当选择相同的投资组合, 这于行业界普遍针对投资者年龄、收入等个体因素推荐策略的做法相悖. 为了解决这样的问题, 将劳动收入引入最优消费 - 投资选择模型将有助于解释这一困惑. 但是理论的发展并没有很好的解决这一模型, 特别是当不可对冲劳动收入风险引入了市场不完备性时, 这使得模型的解难以得到. 将考察 CRRA 效用下不可对冲收入风险的一般模型, 采用对偶的方法将约束最优化问题转化为无约束的虚拟问题, 进而得到状态依赖的最优风险价格, 进而刻画出值函数以及最优投资和消费策略.

关键词: 最优投资 - 消费选择; 不完备市场; 等价鞅测度
中图分类号: F830.9 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2009)05-0078-10

0 引 言

研究最优投资消费选择的文章源于 Samuelson[1], 该方面的研究经过 Merton的进一步推广, 相关的研究和方法的发展均与对“投资机会”的假设相应, 但是该系列的研究始终假设投资者持有的财富只有易于交易的金融资产, 这对机构投资者和已经退休的个人来说是比较合理的, 然而对于正在工作并且在为退休而储蓄的个人来说, 这不是个贴近现实的假设. 这是因为在他们全部的财富中不仅包括金融资产, 还包括一种重要的但是不易交换的资产 - 人力财富 (human wealth), 简单的看的话也就是预期未来劳动收入的折现值. 因此自然的假设就是引入一个外生的正的随机禀赋 (可以是劳动收入或者更广泛的禀赋的概念), 这样的推广不仅符合现实的要求, 对理论来说也十分有意思. 首先外生收入的存在, 就可以用来解释年轻人可以更多投资风险资产的问题. 因为年轻时参与风险资产的投资, 即便损失也有足够的时间用将来收入来填补, 而老年人 (或退休人员)则没有同样的机会, 因此必须相应减少风险资产的头寸. 另外一个有意思的问题就是, 每个个体的劳动收入特征都有很大的不同, 在这样的框架下, 理论就能解释从事不同行业的投资者的消费 - 投资组合选择的差异.

从金融经济学的角度看, 个人劳动收入可以看作实际持有人力财富而获得的“股息”. 早期的研究假设劳动收入是确定的, Merton[2]给出了确定性收入情况下的最优投资消费策略, 该策略等同于将未来收入折现后加入初始财富然后进行最优消费投资决策. Bodie等[3]将此结果推广到引入随机收入的动态完备市场模型, 也就是说劳动收入的风险可以由金融资产所对冲. Svensson等[4]综述了这些早期的完备市场模型. 其后一些学者试图去掉市场完备的条件, 但是迄今没有很好的结果. 文献 [5~8]考察了 CRRA 效用下股票回报不确定性与劳动收入不确定性不完全相关的模型, 只得到了 PDE粘性解意义下的存在性和唯一性, 以及值函数或最优控制策略的相应性质. Cuoco[9]推广了不完备市场的结果, 通过原问题证明了解的存在性. Cvitanic等[10]考察了终端财富最优化的半鞅金融市场问题, 建立了对偶方法的

① 收稿日期: 2006-12-18; 修订日期: 2009-06-30.
作者简介: 杨科威 (1980—), 男, 江苏无锡人, 博士. Email: david_ykw80@yahoo.com.cn

相应结果. Karatzas等[11]将对偶方法的结果扩展到了跨期消费的模型. 在完备市场情况下, 随机收入可以由可控的交易资产的组合进行复制, 等价鞅测度在几乎处处意义下是唯一的, 因此最优消费投资问题就等价于无随机收入但是对初始财富适当增加的新问题[12]. 然而在不完备市场情况下, 一般来讲这样的变换并不可行, 因为等价鞅测度不再是唯一的, 甚至可以是无限多个, 因此预算约束在任意一个等价鞅测度意义下都需要成立. 并且即便投资机会集是常数, 风险价格也不再是常数, 而是循序可测的随机过程. Karatzas等[12]、Plisaka[13]对相关不完备市场的研究做了总结归纳, 他们主要采用的是凸对偶方法②. Chan等③通过对预算约束和一阶条件采取对数线性近似的方法得到了不完备市场情况下的近似解. Henderson[14]在 CARA效用下得到了期望终端财富最优化模型的显式解. Schwartz等④最近的一片工作论文得到了该类一般问题的序列展开解, 也是首个解析解. 其他一些近期文献都采用各种数值或模拟的方法来分析这类问题. 其中较为普遍采用的是对 PDE的有限差分或有限元的处理[15,16], 特殊的线性化方法[17], 马尔可夫链的蒙特卡罗模拟[8], 还有基于 Longstaff[18]用于美式期权定价的最小二乘方法的模拟方法[19]. 但是不论何种方法达到较粗略的精度已经相当耗时, 而结果不稳健也很大程度上限制了对此类问题实证研究的可靠性.

在类似动态效用最优化资产定价框架下, 国内近年来也涌现出一系列研究. 秦学志等[20]等在离散时间多期框架下, 采用同样的对偶原理和鞅理论讨论了现金借贷限制和证券卖空限制情况下期权的买方和卖方套利价格. 徐绪松等[21]在连续时间框架下采用随机动态规划方法对原问题的 HJB方程的一阶最优条件加以讨论, 从对习惯形成型效用假设下的资产定价模型 (habit model)进行了一系列探讨. 陈金龙等[22]讨论了金融市场不完备情况下的衍生证券定价, 文中采用二次效用函数并得到将定价问题与向量空间投影联系起来, 最后对原问题的 HJB方程进行求解. 李仲飞等[23]讨论了离散时间框架下比例交易费用导致的市场不完备情况下的定价问题, 给出了最优策略的存在性. 郭文旌等[24]在带停时的离散时间的均值 – 方差模型框架下以随机动态规划方法得到最优策略及有效边界的解析形式. 杨招军等[25]在幂效用的连续时间模型框架下运用随机动态规划通过试探求解得到最优策略的显式解.

本文将基于 CRRA效用函数形式考察存在不可对冲劳动收入风险 (不完备市场)的一般模型. 由于完备市场存在唯一的等价鞅测度, 问题的解决相对要容易一些, 但是假设劳动收入风险可以由金融市场完全对冲显得与实际不符, 因此对不可对冲收入的探讨将有助于加深对含劳动收入问题的理解. 文中既不采用序列展开后待定系数的方法来得到 Schwartz和 Tebaldi式的解, 也不需要采用上述数值方法, 而采用对偶方法得到模型的解, 通过显式解可以有助于更进一步的研究不可对冲劳动收入风险对投资 – 消费选择的影响. 并且文章的结果可以直接推广到跨期消费问题和纯投资问题.

1 模型设定

1) 信息结构: 假设 $(B_1(t), B_2(t))$ 为 R^2 上二维布朗运动, 定义在概率空间 (Ω, F, P), 信息结构是由该布朗运动确定的.

2) 消费过程 $c(t) \geqslant 0$.

3) 证券价格系统: 假设证券系统只存在一个无风险证券 $S_0(t)$ 和一个风险证券 $S_1(t)$, 并且假设投资机会集恒定, 但是从后文可以看出, 本文的结论可以直接推广到多个风险证券的价格系统. 为了讨论不可对冲的劳动力风险, 在这里还假设了一个“虚拟”证券 $S_2(t)$, 从而使得扩展后的价格系统动态完备.

$dS_0(t) = S_0(t)r\,dt$, r为无风险资产的回报率

$dS_1(t) = S_1(t)[\mu_1 dt + \sigma_1 dB_1(t)]$, μ_1 和 σ_1 为真实风险资产的期望增长率和波动率

$dS_2(t) = S_2(t)[\mu_2 dt + \sigma_2 dB_2(t)]$, μ_2 和 σ_2

② 本文也采用此方法, 但是他们的书中并没有讨论含外生随机禀赋的约束问题, 这一问题 Cuoco[9]的工作加以了讨论.

③ Chan and Viceira. Asset allocation with endogenous labor income: the case of incomplete markets. working paper, 2000.

④ Schwartz and Tebaldi. Illiquid assets and optimal portfolio choice. working paper, 2006

为虚拟风险资产的期望增长率和波动率 $corr(dB_1(t), dB_2(t)) = 0$

4) 随机劳动力收入禀赋: $dy(t) = y(t)\left[\mu_y\, dt + \rho\sigma_y\, dB_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_y\, dB_2(t)\right]$,

ρ为收入和真实金融资产的相关系数, μ_y 和 σ_y 为收入的期望增长率和波动率

5) 效用函数: $u(c) = \dfrac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma > 0$为风险厌恶系数, 且该效用形式为 CRRA 类型

6) 个人消费问题: 有限生命周期效用最大化

$$\sup_{(c,\pi)} E_t\left(\int_t^T e^{-\beta(s-t)} u(c_s)\, ds + e^{-\beta(T-t)} u(W_T)\right)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad dW_t &= \pi_t \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} + (W_t - \pi_t)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + y_t\, dt - c_t\, dt \\ &= (rW_t + \pi_t(\mu_1 - r) + y_t - c_t)\, dt + \pi_t \sigma_1\, dB_1(t) \end{aligned} \tag{1}$$

π_t 为风险资产 S_1 在 t时刻的投资金额; W_t 为 t时刻的金融财富量; β 反映的是时间折现因子, 通常大于零, 即反映了将来的消费的效用要比现在消费的效用来得小.

为了保证模型及解的定义, 对各过程及相应参数需要加以限定, 本文的限定与一般的文献相同, 此处略去, 可参见文献[26].

从上述的模型设定可以看出, 在 t时刻拥有财富量 W_t 投资者通过在 $[t, T]$ 时间内的消费和投资决策 $\{c_s, \pi_s\}_t^T$ 来实现其生命周期内总效用的最大化目标.

2 原最优化问题

根据模型的设定, 可以定义该最优化问题的值函数如下:

$$J(W_t, y_t, t) = \max_{(c,\pi)} E_t\left(\int_t^T e^{-\beta(s-t)} u(c_s)\, ds + e^{-\beta(T-t)} u(W_T)\right)$$

从而可以得到 HJB方程

$$\max_{\substack{\{c_t,\pi_t\}\\ c_t \geq 0}} \left\{ \begin{aligned} & u(c_t) + J_t + J_W(rW_t + \pi_t(\mu_1 - r) + \\ & y_t - c_t) + J_y \mu_y y_t + \frac{1}{2} J_{yy}(\sigma_y y_t)^2 + \\ & \frac{1}{2} J_{WW}(\pi_t \sigma_1)^2 + J_{Wy}\pi_t \sigma_1 \rho\sigma_y y_t \end{aligned} \right\} = 0 \tag{2}$$

根据一阶条件, 可知最优消费和最优配置策略为

$$c^* = (J_W)^{-\frac{1}{\gamma}},$$

$$\pi^* = -\frac{J_W \dfrac{(\mu_1 - r)}{\sigma_1}}{J_{WW}\sigma_1} - \frac{J_{Wy}\rho\sigma_y y}{J_{WW}\sigma_1} \tag{3}$$

从最优消费策略可以看出, 在本模型设定下最优消费带来的效用恰恰等于财富的边际效用, 这与经济学通常的效用最优化的结果是一致的. 从最优投资策略的形式可以看出, 投资组合策略 π 的第一部分从形式上看正是 Merton模型的解, 即反映了短视的投资组合; 而第二部分就是由于劳动收入与风险证券的相关引起的对冲需求.

3 虚拟无约束对偶问题

考虑到现实中劳动收入的风险并不能完全由金融资产来进行对冲, 因此这种情况导致的市场不完备(不可完全对冲的劳动力风险)并不能直接的通过原问题的 HJB方程导出 PDE进行求解, 在这里需要通过一些概念的辅助以便引入对偶问题.

首先, 根据凸对偶理论定义凸集、支撑函数和有效域. 定义这些概念的核心思想就是将原问题的约束转化为对偶问题的约束. 需要注意的是, 根据对偶的原则, 原问题的约束越多, 对偶问题的约束就越少.

其次, 由于在前面的模型设定中已经假定了一个虚拟的证券以使得劳动收入可以完全由金融资产对冲, 即整个资产市场是动态完备的, 因此最终的目标是在最优策略的情况下, 投资者将不选择投资该虚拟证券. 从而虚拟证券仅作为一个辅助的工具帮助求解, 而这样定义的问题的解与原先关注的问题的解是一致的.

最后, 为了得到这样的虚拟证券动态, 其核心就是得到虚拟证券最优的风险价格因子.

下面将通过数学模型逐步展开.

凸集:

$$K = \left\{\pi \overset{\text{def}}{=} (\pi_0, \pi_1, \pi_2)' \in \boldsymbol{R}^3, \pi_2 = 0\right\} \tag{4a}$$

支撑函数:

$$\delta(\boldsymbol{v}) = \sup_{\pi\in K}\{-\pi'\boldsymbol{v}\},\ \boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} (v_0,\ v_1,\ v_2)' \tag{4b}$$

有效域:

$$K \overset{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{R}^3;\ \delta(\boldsymbol{v}) < \infty\} = \{\boldsymbol{v};\ v_0 = v_1 = 0,\ v_2 \in \boldsymbol{R}\} \tag{4c}$$

根据已定义的定义凸集、支撑函数和有效域, 可以得到如下过程:

$$\beta_v(t) = \exp\left\{-\int_0^t [r + v_0]\,\mathrm{d}\tau\right\} = \exp\left\{-\int_0^t \mathrm{d}\tau\right\} \tag{5a}$$

$$\kappa_v(t) = -\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2 + \dfrac{v_2 - v_0}{\sigma_2}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2^v\end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1},\ \lambda_2 = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \tag{5b}$$

$$\xi(t) = \exp\left\{-\int_0^t \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2^v\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\mathrm{d}W_1(\tau)\\ \mathrm{d}W_2(\tau)\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2^v\end{matrix}\right|^2 \mathrm{d}\tau\right\} \tag{5c}$$

其中 ξ 可以解释为 P 的某个等价概率测度 Q_v 的密度过程, 即 $\dfrac{\mathrm{d}Q_v}{\mathrm{d}P} = \xi$.

因此, 也可定义得到 $H_v(t) = \beta_v(t)\xi(t)$, 并且 v 满足一定条件下, $\xi(t)$ 是个严格正的局部鞅. 令 N^* 代表满足 $\xi(t)$ 为鞅的 $\boldsymbol{v}$ 的集合, 也就意味着虚拟完备市场中的唯一等价鞅测度的全体.

Cuoco[9] (定理 1) 指出消费计划 $c\in C_+^*$ 可行当且仅当

$$E^{Q_v}\left[\int_0^T \beta_v(t)(c(t) - y(t))\,\mathrm{d}t\right] \leqslant y_0 + E^{Q_v}\left[\int_0^T \beta_v(t)\,\delta(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t\right],\ \forall \boldsymbol{v}\in N^* \tag{6}$$

根据前面对于 $\delta(\boldsymbol{v})$ 的定义, 不难看出在本文的模型设定下 $\delta(\boldsymbol{v}) \equiv 0$ 因此上式表明未来的 (不确定) 消费流必须可以由 (不确定) 收入流和初始财富禀赋所支撑. 而连续时间金融经济学理论和 Cuoco的工作表明, 原问题的财富动态约束和这里的静态约束是等价的. 也就是说通过连续时间动态交易策略实现的消费过程与静态预算约束的消费过程是等价的.

所以原来的最优化问题可以写成如下形式:

$$\sup_{(c,W_T)} E_0\left(\int_0^T e^{-\beta(s-t)} u(c_s)\,\mathrm{d}s + e^{-\beta(T-t)} u(W_T)\right)$$

$$\text{s.t.}\ \frac{1}{\beta_v(t)} E_t^{Q_v}\left[\int_t^T \beta_v(u)(c(u) - y(u))\,\mathrm{d}u + \beta_v(T)W(T)\right] \leqslant W_t,\ \forall \boldsymbol{v}\in N^* \tag{7}$$

为了求解最优的风险价格, 下面运用 Lagrange法进行分析, z 为 Lagrange乘子:

$$\begin{aligned} L(z_t,\ \boldsymbol{v}) &= \sup_{(c,W_T)} \ell(c,\ W_T;\ z_t,\ \boldsymbol{v}) \\ &= \sup_{(c,W_T)}\left\{E_t\left(\int_t^T e^{-\beta(u-t)} u(c_u)\,\mathrm{d}u + e^{-\beta(T-t)} \times u(W_T)\right) + z_t\left[W_t - E_t\left[\int_t^T \frac{H_v(u)}{H_v(t)} \times (c(u) - y(u))\,\mathrm{d}u + \frac{H_v(T)}{H_v(T)} W_T\right]\right]\right\} \\ &= \sup_{(c,W_T)}\left\{E_t\left(\int_t^T \left[e^{-\beta(u-t)} u(c_u) - z_t\frac{H_v(u)}{H_v(t)} c_u\right]\mathrm{d}u\right) + E_t\left(e^{-\beta(T-t)} u(W_T) - z_t\frac{H_v(T)}{H_v(t)} W_T\right) + z_t\left[w_t + E_t \times \left[\int_t^T \frac{H_v(u)}{H_v(t)} y(u)\,\mathrm{d}u\right]\right]\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

根据最优条件, 可以得到该虚拟问题的最优消费和最优遗赠

$$c_u^* = e^{-\frac{\beta}{\gamma}(u-t)}\left(z_t\frac{H_v(u)}{H_v(t)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}},$$

$$W_T^* = e^{-\frac{\beta}{\gamma}(T-t)}\left(z_t\frac{H_v(T)}{H_v(t)}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{9}$$

4　最优风险价格和值函数

将最优控制代入可得

$$L(z_t,\ \boldsymbol{v}) = \sup_{z_t, v}\left\{E_t\left(\int_t^T \left[\frac{\gamma}{1-\gamma} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(u-t)}\left(z_t\frac{H_v(u)}{H_v(t)}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]\mathrm{d}u\right) + E_t\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} e^{-\frac{\beta}{\gamma}(T-t)}\left(z_t\frac{H_v(T)}{H_v(t)}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right) + z_t\left[W_t + E_t\left[\int_t^T \frac{H_v(u)}{H_v(t)} y(u)\,\mathrm{d}u\right]\right]\right\} \tag{10a}$$

$$L(z_t,\ \lambda_2^v) = \sup_{z_t,\ \lambda_2^v}\left\{z_t^{1-\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{1-\gamma} \times \left[\int_t^T e^{-\int_t^u\left[\frac{\rho}{\gamma} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\gamma + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\lambda_1^2}{2\gamma}\right]\mathrm{d}\tau - \int_t^u\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\lambda_2^{v2}}{2\gamma}\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}u + \right.\right.$$

$$e^{-\int_t^T\left[\frac{\rho}{\gamma}+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\gamma+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\lambda_1^2}{2\gamma}\right]d\tau-\int_t^T\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\lambda_2^{v2}}{2\gamma}d\tau}\Big] +$$

$$z_t\Big[W_t + y_t\int_t^T e^{\int_t^u\left[\mu_y-\gamma-\lambda_1\rho\sigma_y-\lambda_2^v\sqrt{1-\rho^2}\sigma_y\right)d\tau}du\Big]\Big\} \tag{10b}$$

根据约束最优化理论, 该约束最优化问题的值函数也就是虚拟的无约束最优化问题对应值函数的最小的那个. 对偶问题也满足同样的最优化条件.

根据前面的介绍, 可以知道最终的关键就是确定最优风险价格 $\lambda_2^{v^*}(t)$. 由最优性的一阶条件可以得到关于最优风险价格 $\lambda_2^{v^*}(t)$ 的定点问题

$$\lambda_2^{v^*}(t)=\frac{\left[\dfrac{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)e^{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}+e^{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))^2}\right]\left[\dfrac{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}+e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]y_t}{\left[\dfrac{(f_1(\lambda_2^{v^*}(t))^2+(f_1(\lambda_2^{v^*}(t)))(T-t)e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}+e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))^2}\right]\left[W_t+y_t\dfrac{e^{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]}\times$$

$$\gamma\sqrt{1-\rho^2}\sigma_y \text{⑤} \tag{11a}$$

其中

$$f_1(\lambda_2)=-\frac{\rho}{\gamma}-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\left(r+\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{2\gamma}\right),$$

$$f_2(\lambda_2)=\mu_y-r-\lambda_1\rho\sigma_y-\lambda_2\sqrt{1-\rho^2}\sigma_y \tag{11b}$$

此外

$$z_t=\left(\frac{\left[W_t+y_t\dfrac{e^{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]}{\left[\dfrac{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}+e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]}\right)^{-\gamma} \tag{11c}$$

所以

$$c_t^*=z_t^{-\frac{1}{\gamma}}=\frac{\left[W_t+y_t\dfrac{e^{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]}{\left[\dfrac{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}+e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]} \tag{11d}$$

因此

$$J(W_t, y_t, t)=L(z_t^*, \lambda_2^{v^*})$$

$$=\frac{1}{1-\gamma}\left[W_t+y_t\frac{e^{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_2(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]^{1-\gamma}\times$$

$$\left[\frac{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}+e^{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))(T-t)}-1}{f_1(\lambda_2^{v^*}(t))}\right]^{\gamma} \tag{12}$$

由 $\lambda_2^{v^*}(t)$ 的定点问题可以看出 $\lambda_2^{v^*}(t)\overset{\text{def}}{=}\varphi\left(\frac{W_t}{y_t}, T-t\right)$

所以

$$J(W_t, y_t, t)=\frac{1}{1-\gamma}\times$$

$$\left[W_t+y_t\frac{e^{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t}, T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t}, T-t\right)\right)}\right]^{1-\gamma}\times$$

$$\left[\frac{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t}, T-t\right)\right)e^{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t}, T-t\right)\right)(T-t)}+e^{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t}, T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t}, T-t\right)\right)}\right]^{\gamma}\text{⑥}, \tag{13}$$

且 $J(W_t, y_t, t)=\frac{1}{1-\gamma}y_t^{1-\gamma}\times$

⑤该定点问题在任何软件上都可即刻求解. 例如, 可以使用 Matlab的方程求解函数计算, 或者取 $\gamma\sqrt{1-\rho^2}\sigma_y$ 为初值然后进行迭代计算.

⑥ 最优策略可以解析给出, 但是结果较为复杂. 考虑到采用数值微分完全可以得到精确的最优策略, 因此建议使用时, 根据值函数采取数值方法给出最优策略.

$$\left[\frac{W_t}{y_t}+\frac{e^{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)}\right]^{1-\gamma}\times$$

$$\left[\frac{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)e^{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}+e^{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)}\right]^{\gamma},$$

即值函数关于 y 是 $1-\gamma$阶齐次的.

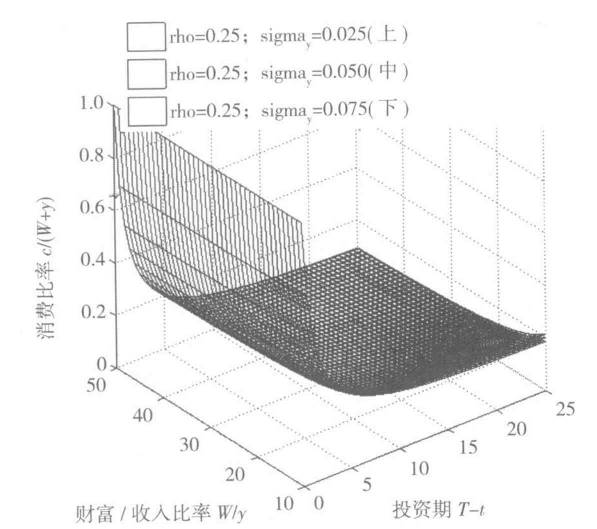
并且当市场完备, 即 $|\rho|=1$时, 解的表达式可以显式给出, 这与 Bodie等人的结果一致.

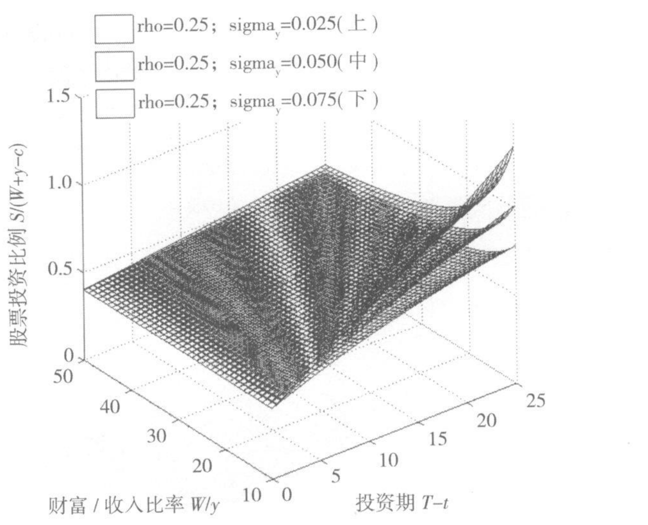
该值函数 $J(W_t, y_t, t)$ 指出的是在 t时刻, 投资者拥有 W_t 的金融财富, 收入率为 y_t 的情况下, 所能实现的最佳跨期消费的总效用. 对比 Merton 问题的解可以看出, $1-\gamma$ 次幂括号中的因子 $\frac{e^{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)}$, 反映的是未来劳动收入的现值乘子. 也就是说 $y_t\frac{e^{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)}$ 是未来随机劳动收入流现值的加总, 即潜在的资产持有量. 若投资者在当前将所有资产 (金融资产和潜在的劳动收入资产) 均用于消费, 那么所能得到的总效用就是值函数的前一部分 $\frac{1}{1-\gamma}\left[W_t+y_t\frac{e^{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_2\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)}\right]^{1-\gamma}$. 但是由于通过跨期的配置, 投资者可以提高总效用, 而这一乘子即由后一部分 $\left[\frac{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)e^{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}+e^{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)(T-t)}-1}{f_1\left(\varphi\left(\frac{W_t}{y_t},T-t\right)\right)}\right]^{\gamma}$ 体现.

值得注意的是, 在Merton的问题中或劳动收入可对冲情况下, 前面的收入乘子和后面的总效用乘子只与投资期限 $T-t$ 有关, 而在不可对冲劳动收入的情况下, 这两个乘子都是状态依赖的, 即还与 $\frac{W_t}{y_t}$ 有关.

5 实例分析

根据上述结论, 在此实例演示, 参数采用 Lehman Brothers《流动市场研究季报, 2005年 10月》中美国市场的基准数据 ($\mu_S=4\%$、$\sigma_S=10\%$; $\mu_y=1.5\%$; $r_f=2\%$; $\gamma=5$; $e^{-\beta}=0.9$). 图 1和图 2考察了收入波动与相关程度对不同风险厌恶投资者最优策略的影响.





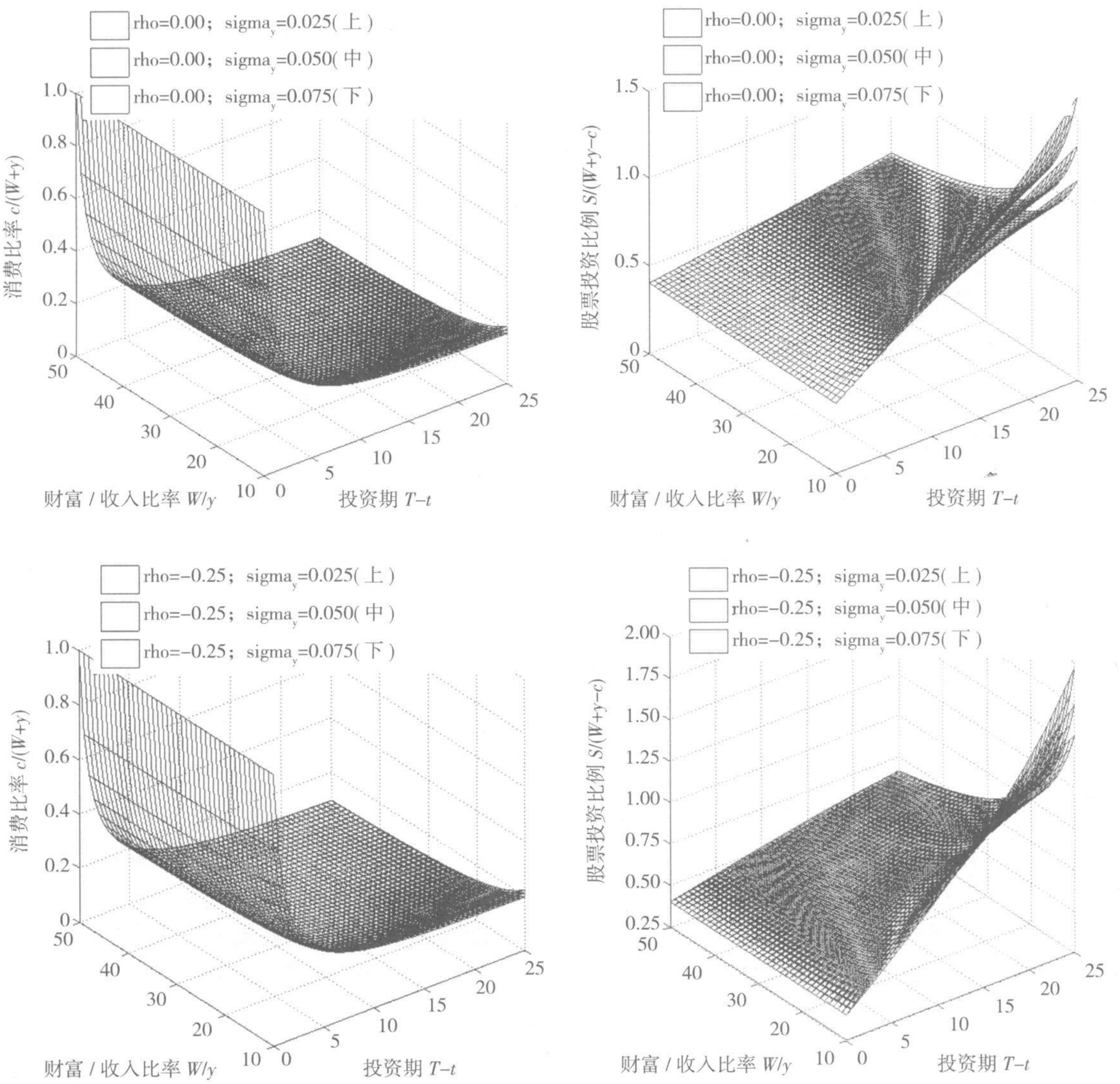
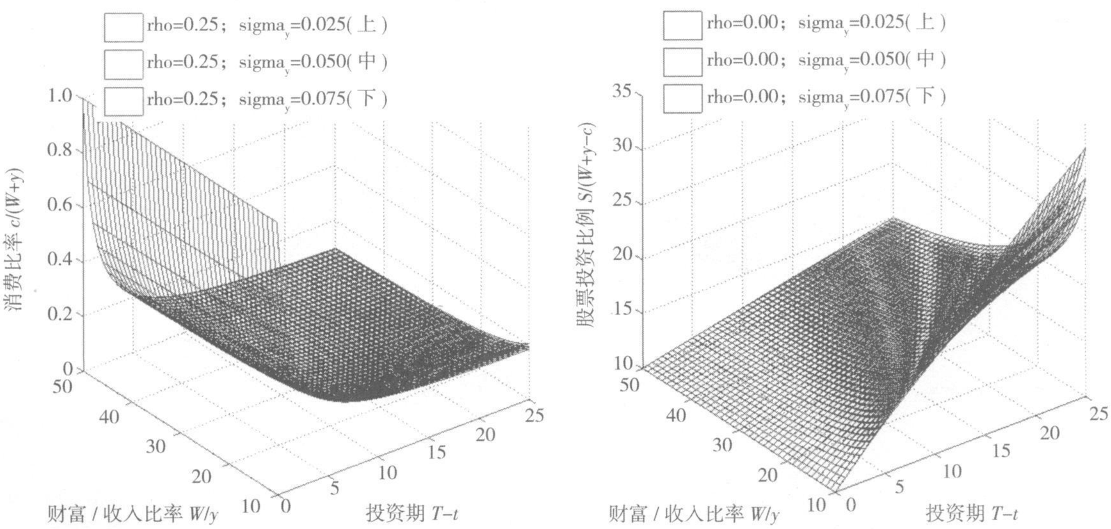


图1　最优消费 – 投资策略($\gamma = 5$)

Fig. 1 Optimal consumption and portfolio choice ($\gamma = 5$)



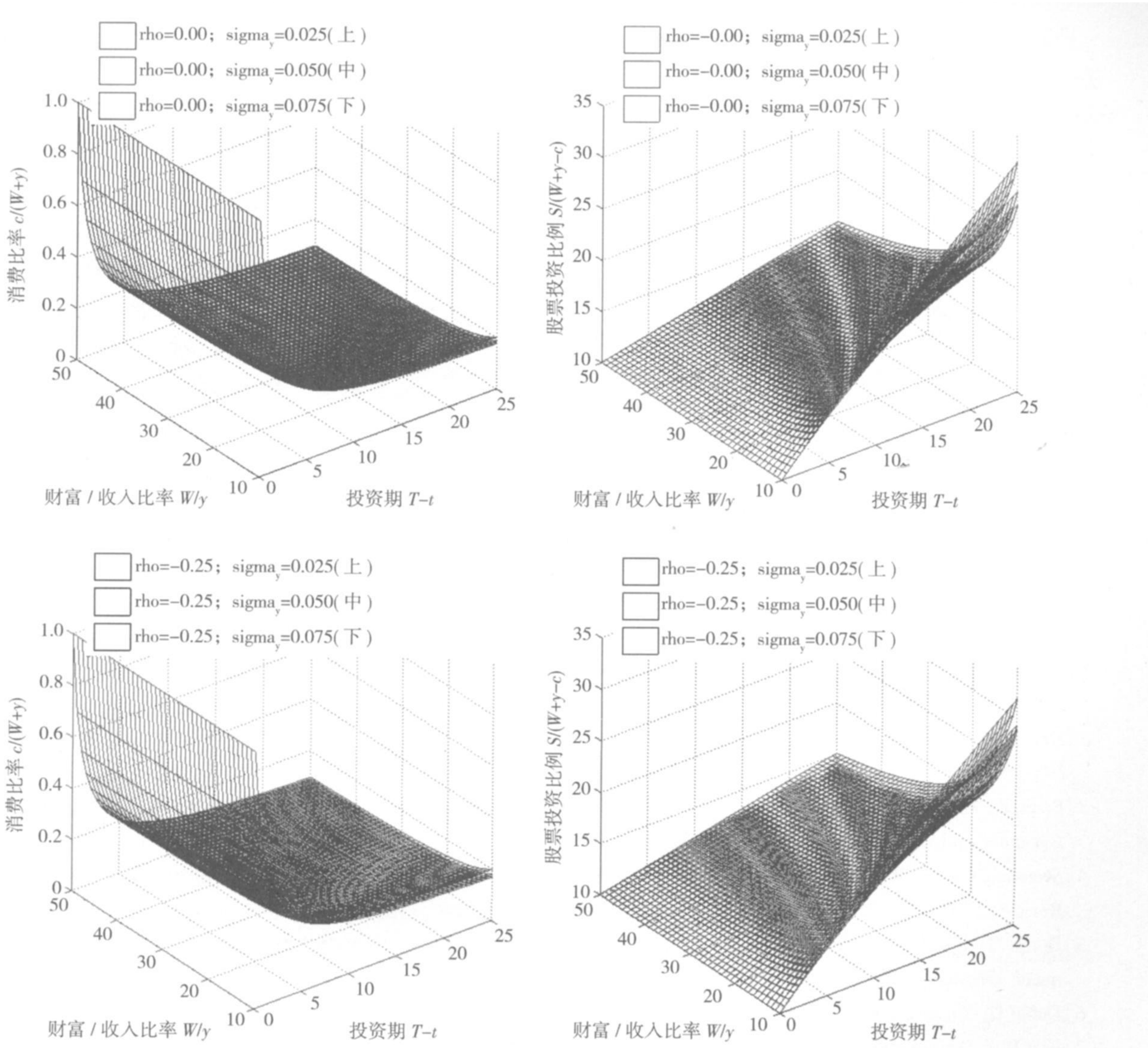


图 **2**　最优消费 – 投资策略 (γ = 0.2)

Fig. 2　Optimal consumption and portfolio choice (γ = 0.2)

根据上面的一系列演示图, 可以看出, 投资者的最优消费和最优投资策略并不像可对冲收入风险模型那样与劳动收入不确定性有一致的关系, 而是与投资期限和财富状态有密切的关联. 也就是说消费和投资策略与劳动收入的波动率以及相关性并不存在完备情况下一致的单调关系, 而是取决于时间 $T-t$和状态$\frac{W_t}{y_t}$. 不过从图中可以看出, 所得到的结果与直觉还是一致的:

1) 对于年轻高收入 ($T-t$大、$\frac{W_t}{y_t}$小) 者来说, 收入不确定性越高, 投资者将减少消费、增加储蓄.

2) 随着临近退休 ($T-t$小), 投资者将逐渐增加消费、减少储蓄. 这也反映出为了退休养老进行储蓄的现实经济行为. 但是对于具有稳定高收入的年轻投资者 ($T-t$大、$\frac{W_t}{y_t}$小), 高消费也是合理的, 因为其有长期稳定的丰厚收入作为将来消费的保障, 所以这类投资者可以在年轻时大量消费, 相比其他投资者来说可以更晚一些为退休而进行储蓄.

2) 高收入者 ($\frac{W_t}{y_t}$小) 更加可以承受风险, 因此会将更多比例的资金投资于股票; 而随着逐渐年长 ($T-t$减小), 投资者会逐渐减少对风险资产的需求. 此外对于较年轻的投资者 ($T-t$大), 收入不确定性的增加将减少其对风险资产的投资比例.

3) 若劳动收入增长率与风险资产回报正相关, 意味着劳动收入某种意义上是对风险资产的潜在持有, 因此随着相关程度减弱进而变为负相关, 投资者对风险资产的投资比例将逐渐增加.

4) 随着风险厌恶程度的增加, 投资者会减少对风险资产的投资比例.

6 结 论

为了解决基金分离定理的困惑, 学者们将劳动收入引入最优投资 - 消费模型. 但是理论的发展并没有很好的解决这一模型, 特别是当不可对冲劳动收入风险引入了市场不完备性时, 这使得模型的解难以得到. 通过 PDE 的粘性解理论, Duffie等人建立了该类问题解的存在性, 其他学者也通过其他方式得到类似的进展. 因此为了分析不可对冲劳动收入风险的影响, 大量学者不得不采纳了各种方法来试图得到近似解或者数值解, 但是得到的结果有些一致、也存在矛盾. 这主要就是因为很难保证数值方法的稳定性、可靠性和收敛速度. 因此, 本文采取对偶的方法将无穷多个预算约束下的约束最优化问题转化为从无穷多个单一预算约束下的无约束虚拟问题中选取最优虚拟问题的新模型, 进而得到状态依赖的最优风险价格, 进而可以完全刻画出值函数以及最优投资和消费策略.

参 考 文 献:

[1] Samuelson P. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming[J]. Review of Economics and Statistics, 1969, 51: 239—246.

[2] Merton R. Optimal consumption and portfolio rules in continuous-time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 373—413.

[3] Bodie Z, Merton R, Samuelson P. Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1992, 16: 427—449.

[4] Svensson L E O, Werner I M. Nontraded assets in incomplete markets: Pricing and portfolio choice[J]. European Economic Review, 1993, 37: 1149—1168.

[5] Duffie D, Fleming W, Soner H M, Zariphopoulou T. Hedging in incomplete market with HARA utility[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997, 21: 753—782.

[6] Duffie D, Zariphopoulou T. Optimal investment with undiversifiable income[J]. Mathematical Finance, 1993, 3: 135—148.

[7] Koo H K. Consumption and portfolio selection with labor income: A continuous time approach[J]. Mathematical Finance, 1998, 8: 49—65.

[8] Munk C. Optimal Consumption/investment policies with undiversifiable income risk and liquidity constraints[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2000, 24: 1315—1343.

[9] Cuoco D. Optimal consumption and equilibrium prices with portfolio constraints and stochastic income[J]. Journal of Economic Theory, 1997, 72: 33—73.

[10] Cvitanic J, Schachermayer W, Wang H. Utility maximization in incomplete market with random endow[J]. Finance and Stochastics, 2003, 5: 259—272.

[11] Karatzas I, Zitkovic G. Optimal consumption from investment and random endowment in incomplete semimartingale markets[J]. Annals of Probability, 2002, 31: 1821—1858.

[12] Karatzas I, Shreve S E. Method of Mathematical Finance[M]. Springer-Verlag: New York, 1998.

[13] Pliska S R. Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models[M]. Oxford: Blackwell Publishers, 1997.

[14] Henderson V. Valuation of claims on nontraded assets using utility maximization[J]. Mathematical Finance, 2003, 12: 351—373.

[15] Cocco J, Gomes F, Maenhout P. Consumption and portfolio choice over the life-cycle[J]. Review of Financial Studies, 2005, 18: 491—533.

[16] Heaton J, Lucas D. Market frictions, savings behavior, and portfolio choice[J]. Macroeconomic Dynamics, 1997, 1: 76—101.

[17] Viceira L M. Portfolio choice for long-horizon investors with nontradable labor income[J]. Journal of Finance, 2001, 56: 433—470.

[18] Longstaff F, Schwartz E. Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach[J]. Review of Financial Studies, 2001, 14: 113—147.

[19] Brandt M W, Goyal A, Santa-Clara P, Stroud J R. A simulation approach to dynamic portfolio choice with an application to learning about return predictability[J]. Review of Financial Studies, 2005, 18: 831—873.

[20] 秦学志, 吴冲锋. 或有要求权的定价方法及无套利价格区间[J]. 系统工程学报, 2003, 18(2): 159—162.
Qin Xuezhi, Wu Chongfeng. Pricing method and arbitrage-free price interval for contingent claims[J]. Journal of Systems Engineering, 2003, 18(2): 159—162. (in Chinese)

[21] 徐绪松, 陈彦斌. 基于相对财富和习惯形成的资本资产定价模型[J]. 管理科学学报, 2004, 7(3): 1—6.
Xu Xusong, Chen Yanbin. CAPM based on relative wealth and habit formation[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(3): 1—6. (in Chinese)

[22] 陈金龙, 张 维. 非完全市场衍生资产的相关定价法研究[J]. 管理科学学报, 2004, 19(3): 278—283.
Chen Jinlong, Zhang Wei. Study on correlation pricing formula for derivative assets in incomplete markets[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 19(3): 278—283. (in Chinese)

[23] 李仲飞, 汪寿阳. 摩擦市场的最优消费 – 投资组合选择[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(3): 406—416.
Li Zhongfei, Wang Shouyang. Optimal consumption-portfolio selection in frictional markets[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2004, 24(3): 406—416. (in Chinese)

[24] 郭文旌, 胡奇英. 不确定终止时间的多阶段最优组合[J]. 管理科学学报, 2005, 8(2): 13—19.
Guo Wenjing, Hu Qiying. Multi-period portfolio optimization when exit time is uncertain[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(2): 13—19. (in Chinese)

[25] 杨招军, 黄立宏. 不同存贷利率下极大化中值时刻期望效用[J]. 管理科学学报, 2005, 8(5): 50—54.
Yang Zhaojun, Huang Lihong. Maximizing expected utility from terminal wealth under case of different rates between borrowing and saving[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(5): 50—54. (in Chinese)

[26] El Karoui N, Jeanblanc M. Optimization of consumption with labor income[J]. Finance and Stochastics, 1998, 2: 409—440.

[27] Brennan M, Xia Y H. Dynamic asset allocation under inflation[J]. Journal of Finance, 2002, 57: 1201—1238.

[28] Cox J, Huang C F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 49: 33—83.

[29] Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1996.

[30] He H, Pages H F. Labor income, borrowing constraints, and equilibrium asset prices: A duality approach[J]. Journal of Economic Theory, 1993, 3: 663—696.

[31] Liu J. Portfolio selection in stochastic environments[J]. The Review of Financial Studies, 2007, 20: 1—39.

[32] Merton R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. Review of Economics and Statistics, 1969, 51: 247—257.

[33] Merton R. An intertemporal capital market asset pricing model[J]. Econometrica, 1973, 41: 867—887.

[34] Merton R. Continuous-time Finance[M]. Oxford and Cambridge: Basil Blackwell, 1997.

Optimal consumption-portfolio choice with unhedgeable income

YANG Kewei
Fudan University, Shanghai 200433, China

Abstract Mutual fund separation theorem suggests all investors should hold the same risky portfolio, while advisors always recommend different portfolio for different kind of investor. In order to characterize this puzzle, one possible way is to include the labor income, but the academy haven't solve such a model, especially with unhedgeable income. Such kind of incomplete market makes trouble. Here we'll resolve this problem with CRRA utility by means of duality to transform the constrained problem into unconstrained auxiliary problem. Finally, the optimal price of risk is achieved analytically, as well as value function and policies.

Key words optimal consumption-portfolio choice; incomplete market; equivalent martingale measure