

考虑随机且可控提前期的时基补货发货策略^①

杜少甫¹, 梁 1, 董骏峰¹, 邱 昊²

(1 中国科学技术大学管理学院, 合肥 230026 2 中国建设银行安徽省分行, 合肥 230001)

摘要: 研究了随机且可控提前期情况下“库存补货与运输排程”(SRSS)的时基补货发货策略, 在“允许缺货, 缺货不补”的传统假设基础上, 结合使用随机过程更新理论和优化方法, 建立了扩展模型; 使用仿真方法跟踪了优化策略的长期执行效果, 以验证模型有效性。

关键词: 库存补货与运输排程 (SRSS); Poisson 过程; 更新理论; 仿真

中图分类号: F253 4; F224 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2009)06-0034-11

0 引言

供应商管理库存 (VMI vendor-managed inventory) 是供应链协调与集成的新思路。许多文献^[1-3]中所讨论的“寄售 (consignment)”是种非常典型的 VMI 库存管理模式。在 VMI 寄售模式下, 上游成员 (寄售方) 将商品寄放在直接下游成员 (受寄方) 供使用或销售; 在使用或销售完成之后再向寄售方支付货款。VMI 的主要思想在于: 供应方额外承担起维护订货方库存的责任^[1-3], 并根据共享的需求预测信息制订合适的持续补货计划 (CRP, continuous replenishment plan)。VMI 不仅是个全新的库存管理思想, 更为重要的是, 它营造了一种相互信任、合作共赢的集成环境。在一个 VMI 系统中, 供应方并不是简单地执行订单, 而是拥有了下游再供应决策权。这就为库存和运输的同步决策提供了平台^[4]。Higginson 和 Bookbinder^[5] 研究显示: 在 VMI 系统中, 通过将运输整合 (shipment consolidation) 与库存补货决策有效结合起来可以明显节约成本。

在 VMI 被提出之前, 运输整合问题就已倍受关注 (如文献 [5, 6])。所谓“运输整合”就是将多个较小规模订单整合到较大批量以实现运输规模经济的决策。也就是说, 需求不是即到即满足, 而是

按照整合批量配送^[4]。Higginson 和 Bookbinder^[5] 将运输整合策略分为两类: 量基策略 (quantity-based) 和时基策略 (time-based)。前者指只要累积需求量达到某一预定批量发货; 后者则是每隔固定的时间发一次货。Çetinkaya 和 Lee^[4] 最早开始研究 VMI 环境下库存补货与运输整合的联合决策问题, 即 SRSS 问题。在“补货提前期可忽略”这一理想假设下, 她们建立了随机需求下的时基补货发货集成模型。此模型重在解决如何确定订至点 Q 与计划发货期 T 的最优组合以最小化期望长期平均成本。Çetinkaya 和 Bookbinder^[7] 分别讨论了在私人运输和公共运输方式下的时基和量基模型。Ching 和 Tai^[8] 则结合时基策略和量基策略的特点, 分析了 VMI 系统下的补货发货混合策略。杜少甫等^[9] 将产品变质因素纳入考虑, 建立了相应的混合补货发货策略模型。Chen 等^[10] 从成本效益观点对时基、量基和混合策略进行了比较, 结果显示量基策略优于时基策略, 而混合策略则介于二者之间。然而, Jackson^[11] 的调查研究却发现, 在现实生活中时基策略的采用率要高得多。Çetinkaya 和 Lee^[4] 对此现象的解释是: 出于一些战略考虑, 如客户满意度 (CS)、快速响应 (QR) 以及有效客户响应 (ECR) 等, 时基策略要优于量基

① 收稿日期: 2007-12-11; 修订日期: 2008-08-04

基金项目: 国家自然科学基金杰出青年基金资助项目 (70525001); 国家自然科学基金资助项目 (70871105)。

作者简介: 杜少甫 (1980-), 男, 安徽霍山人, 博士, 讲师。Email: dsf@ustc.edu.cn

策略. 正因为这样, 供应链成员越来越倾向于将服务时间承诺 (DTG) 作为吸引客户的市场策略^[12-13].

上述 SRSS 相关研究均建立在零提前期基础之上. 在此情况下, 供应商的再订货点必然为 0 Tersine^[14]认为补货提前期主要由订货准备、订单传达、供应商提前期、配送时间和/或安装时间等构成. 大多库存相关研究都会在分析前针对“提前期”作出假设: 固定 (如 Rabnowitz 等^[15]) 或随机 (如文献 [16~20]). 相对于固定提前期假设, 随机提前期则更为一般、更贴近实际^[21]. Bookbinder 和 Çakanyildirim^[16]认为随机提前期库存研究是供应链管理中的重要领域. 因此在 SRSS 问题中考虑随机提前期是必要的. Çetinkaya 和 Lee^[4]在她们文章的结论部分也重点声明了“考虑补货提前期不可忽略的情况”是必要的. 近年来, “提前期可控”观点常见于库存相关研究中, 如文献 [22~27]. 提前期的某些构成成分往往可

通过追加额外的赶工成本 (crashing cost) 而缩短^[24-25]. 本文将考虑补货提前期随机且可控情况下的 SRSS 问题, 以丰富现有的 SRSS 研究.

1 问题描述及假设参数

SRSS 问题所考虑的典型 VM I 系统由 1 个制造商 M、1 个供应商 V 和广泛分布于不同地区的订货商 R 构成^[4, 7, 8, 10], 见图 1. 这些零售商的订货需求是随机的, 供应商不会在需求到达时就立即配送, 而是根据某种发货策略, 在需求累积到一定程度后再批量发货, 因为这样才能实现运输规模经济. 这样, 供应商的库存决策必然与它所采用的发货策略有着紧密联系, 因此, 供应商必须将库存补货和运输排程两者综合考虑才能做出最有效的决策. 也就是说, SRSS 问题所关注的就是如何将集成库存补货决策和运输整合决策以提高成本效益.

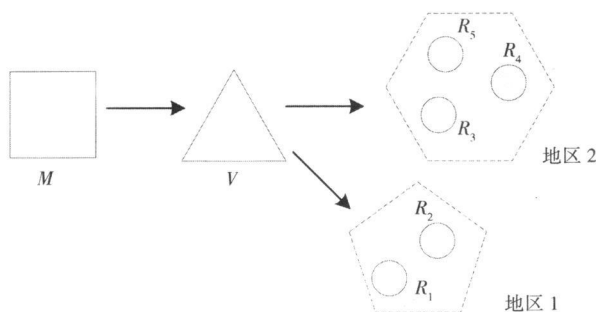


图 1 SRSS 问题所考虑的典型 VM I 系统 (源自 Çetinkaya 和 Lee^[4])

Fig 1 Consolidation in VM I (Source Çetinkaya & Lee^[4])

本文将经典 SRSS 研究推进到最为一般的情形, 即: 补货提前期随机且可缩短. 与 Çetinkaya 和 Lee^[4] 中的策略形式 (Q, T) 不同, 考虑到提前期的存在, 须将时基补货发货策略形式化为 3 元组 (S, s, T) 的形式, $S, s \in (0, T) > Q \geq s$ 其中 S 为订至点 (order-up-to point), s 为再订货点 (reorder point), T 为发货期 (dispatching period). 这里, 子元组 (S, s) 正反映了供应商所采用的库存补货策略, 而 T 则反映了所采用的运输整合策略. 本文继承 Çetinkaya 和 Lee^[4] 中所考虑的 Poisson 需求, 这可简化本文的问题而又不失代表性^[15, 28].

1.1 前提假设

1) 需求累积过程是个典型的 Poisson 过程, 即: 任何时间间隔 Δt 内的累积需求量只与时长 Δt

有关, 且服从均值为 $\lambda \Delta t$ 的 Poisson 分布, 而与开始时刻无关;

2) 允许缺货, 缺货要补;

3) 在无人控制情况下, 补货提前期随机, 其概率质量函数 (p d f) 用 $\phi(\cdot)$ 表示;

4) 通过追加额外的赶工成本, 提前期是可被缩短的. 不失一般性, 本文考虑线性赶工成本.

1.2 策略实施

本文考虑供应商实施策略如下:

1) 供应商每隔 T 单位时间作出一次发货决策;

2) 供应商只须在每次作出发货决策前, 即在 $t = T, 2T, \dots$ 等时刻盘点库存. 当在库存水平降至或低于再订货点 ($I(t) \leq s$) 时才作出补货决

策. 这意味着当前补货周期结束, 新的补货周期开始. 补货量为 $S - I(t)$ 以使库存水平重新回到订至点 S . 因而 $\{I(t) : t \geq 0\}$ 事实上就是由独立同分布 (i i d) 的诸多补货周期所构成的周而复始的过程, 这是典型的更新过程 (renewal process), 补货周期正是所谓的更新周期.

3) 若提前期长于整合发货期 (也就是说, 若无人干预, 在补货周期内首次发货前补货不能到货), 供应商将追加额外的赶工成本以将提前期缩短至 T 以确保原定策略的实施. 值得一提的是: 供应商不会将提前期缩短至 T 以内, 因为提前期被缩短越多, 就需要支付越多越工成本和额外的库存持有成本.

1.3 参数符号

本文所涉及的主要参数符号如下 (其中 A_R, c_R, h, A_D, c_D, w 是继承 Çetinkaya 和 Lee 中的符号):

- A_R — 每次补货的固定成本;
- c_R — 单位补货成本;
- h — 单位时间单位库存的持有成本;
- A_D — 每次发货的固定成本;
- c_D — 单位运输成本;
- w — 单位时间单位需求的客户等待成本;
- c_S — 单位缺货罚成本;
- c_{cr} — 单位补货单位时间赶工成本;

(S, s, T) — 补货发货策略, S, s, T 分别为订至点、再订货点和整合发货期, $S, s \in (0, T > 0, S \geq s$

τ — 补货提前期, 概率质量函数为 $\phi(\bullet)$;

K — 1个补货周期内的发货次数, 整数随机变量;

$I(t)$ — 供应商在库存货时变函数. 为方便起见, 将 $t = iT (i = 0, 1, \dots, K)$ 时的库存简记为 I_i , 即第 i 次发货后的库存水平. I_0 和 I_K 就分别表示补货周期内期初和期末库存;

$N(\Delta t)$ — 时间间隔 Δt 内的累积需求量. 这是个离散随机变量, 服从参数为 $\lambda\Delta t$ 的 Poisson 分布. 用 N_i 表示第 i 个发货期的累积需求; 若无须区别, 则进一步简写为 N . 它们独立同分布, 服从参数为 λT 的 Poisson 分布, $N_i \sim P(\lambda T)$;

δ — 补货期期末缺货. 显然 δ 和 k 中至少有一个为 0.

T_{RC} — 补货周期时长, $T_{RC} = KT$;

C_{RC} — 1个补货周期内的总成本, 包括: 总库存持有成本 H_{RC} 、总补货成本 R_{RC} 、总发货成本 D_{RC} 、总客户等待成本 W_{RC} 、总缺货罚成本 P_{RC} 以及总赶工成本 CR_{RC} ;

$C(S, s, T)$ — 策略 (S, s, T) 下的期望长期平均成本.

2 扩展离散更新方程

2.1 更新过程符号体系

有关更新过程的符号体系为: $g(\bullet)$ 和 $G(\bullet)$ 分别表示参数为 λT 的 Poisson 分布的概率质量函数 (p m f) 和累积分布函数 (c d f), $g^{(k)}(\bullet)$ 和 $G^{(k)}(\bullet)$ 则分别是它们的 k 重卷积. $m_g(\bullet)$ 则为对应的更新密度函数. 考虑 Poisson 分布的定义及可加性, 有

$$g(i) = \frac{(\lambda T)^i e^{-\lambda T}}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (1)$$

$$g^{(k)}(i) = \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2)$$

$$G(X) = \sum_{i=0}^X g(i) = \sum_{i=0}^X \frac{(\lambda T)^i e^{-\lambda T}}{i!}, \quad X = 0, 1, \dots \quad (3)$$

$$G^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^X g^{(k)}(i) = \sum_{i=0}^X \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!}, \quad X = 0, 1, \dots \quad (4)$$

$$m_g(i) = \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\lambda T)^i e^{-k\lambda T}}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (5)$$

2.2 离散更新方程

在建模之前, 有必要介绍一下更新理论中更新方程求解定理^[29-33]: 传统的离散更新方程形如

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=0}^x u(x-i)g(i) \quad (6)$$

其中 $x \in (0, v(\bullet), g(\bullet))$ 已知, $u(\bullet)$ 是待求解的未知方程. 此方程具有惟一解如下:

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=0}^x v(x-i)m_g(i) \quad (7)$$

将上述传统更新方程推广到如下形式:

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=0}^{x-x_0} u(x-i)g(i) \quad (8)$$

其中 $x_0 \in (0, x > x_0)$. 可以证明以下定理成立 (参

见附录 1).

定理 1 形如式 (8) 的扩展离散更新方程具有惟一解如下:

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=0}^{x-x_0} v(x-i)m_g(i) \quad (9)$$

3 分析模型

3.1 补货(更新)周期内的库存变动

图 2 和图 3 分别显示了 $\tau \leq T$ 和 $\tau > T$ 两种情况下 1 个更新周期内的库存变动. 每个新周期的期初库存也就是上一周期的期末库存. 不妨令当前周期的起始时刻为 0 当 $\tau \leq T$ 时, 补货会在首次发货前到货. 在 $t = \tau$ 时刻, 库存水平恢复到 S . 式 (10) 为此情况下的库存水平分段函数.

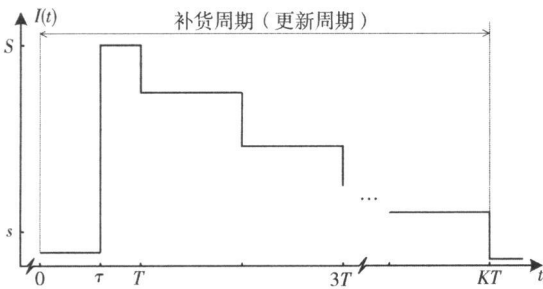


图 2 $\tau < T$ 时的库存水平变动

Fig. 2 Inventory time varying curve for the case $\tau < T$

$$I(t) = \begin{cases} I_0, & \text{若 } 0 \leq t < \tau \\ S, & \text{若 } \tau \leq t < T; \\ S - N_b, & \text{若 } T \leq t < 2T; \\ \dots\dots \\ S - \sum_{i=1}^{K-1} N_b, & \text{若 } (K-1)T \leq t < KT; \\ \max\{0, S - \sum_{i=1}^K N_i\}, & \text{若 } t = KT. \end{cases} \quad (10)$$

当 $\tau > T$ 时, 在无人为调控的情况下补货不能在首次发货前到货. 这就需要追加额外的赶工成本使提前期缩短至 T 以确保策略实施. 这种情况下的库存函数与式 (10) 的区别只在 $[0, T]$ 时段, 见式 (11).

$$I(t) = \begin{cases} I_0, & \text{若 } 0 \leq t < T \\ S, & \text{若 } t = T. \end{cases} \quad (11)$$

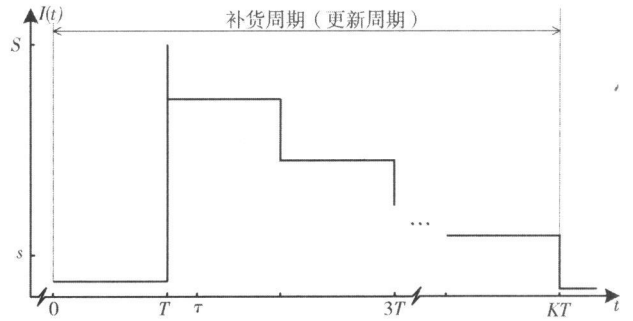


图 3 $\tau \geq T$ 时的库存水平变化

Fig. 3 Inventory time varying curve for the case $\tau \geq T$

3.2 补货周期内的期望发货次数

补货周期内发货次数 K 是个整数随机变量. 当前周期的最后一次发货发生在 $t = KT$ 时刻. 记 KT^- 为最后一次发货前的临界时刻, 那么从式 (10) 和式 (11) 可知

$$I(KT^-) = S - \sum_{i=1}^{K-1} N_i > s$$

$$I(KT) = \max\{0, S - \sum_{i=1}^K N_i\} \leq s \quad (12)$$

无论 τ 与 T 的大小关系如何, 式 (12) 均意味着

$$K = \inf\{k: \sum_{i=1}^k N_i \geq S - s, k \in (9^+)\} \quad (13)$$

从前文所述的策略实施过程, 可得关于 K 的如下递推关系, 其中 N_1 是首个发货期内的累积需求量, $N_1 \sim P(X)$

$$K(S, s, T) | N_1 = i = \begin{cases} 1 & \text{若 } i \geq S - s \\ 1 + K(S - i, s, T) & \text{若 } i < S - s \end{cases} \quad (14)$$

对式 (14) 求期望可得

$$E[K | (S, s, T)] = 1 + \sum_{i=0}^{S-s-1} E[K | S - i, s, T] g(i) \quad (15)$$

形如式 (8), 式 (15) 是关于 $E[K]$ 的扩展离散更新方程, 运用本文提出的定理 1 得

$$E(K) = 1 + \sum_{i=0}^{S-s-1} m_g(i) \quad (16)$$

值得一提的是, Çetinkaya 和 Lee^[4] 在她们所考虑的情况下关于期望发货次数的推导存在不严谨之处, 这一部分的推导方法与过程有助于修正此问题.

3.3 期望期初/期末库存

既然 1 个补货周期的期末库存就是下一周期

的期初库存,那么显然有 $E[I_0] = E[I_k]$. 不妨用符号 μ 来表示这个共同的期望值. 从前文所述的策略实施过程可得关于 I_k 的递推式如下

$$I_k(S, s, T | N_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{if } i > S; \\ S - i & \text{if } S - s \leq i \leq S; \\ I_k(S - i, s, T), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

则有

$$\mu(S, s, T) = \alpha(S, s) + \sum_{i=0}^{S-s-1} \mu(S - i, s, T)g(i) \quad (18)$$

其中 $\alpha(S, s)$ 被定义为

$$\alpha(S, s) = \sum_{j=S-s}^{S-1} (S - j)g(j) \quad (19)$$

运用定理 1 可得

$$\mu(S, s, T) = \alpha(S, s) + \sum_{i=0}^{S-s-1} \alpha(S - i, s) m_g(i) \quad (20)$$

3.4 成本分析

既然供应商库存的时变过程是个典型的更新过程,那么更新理论就适用于此分析. 根据更新报酬定理 (renewal reward theorem) 可知

$$C(S, s, T) = \frac{E[C_{RC}]}{E[T_{RC}]} = \frac{E[H_{RC} + R_{RC} + D_{RC} + W_{RC} + P_{RC} + CR_{RC}]}{E[T_{RC}]} \quad (21)$$

1) 期望补货周期时长 已经知道 $T_{RC} = KT$, 则易知

$$E[T_{RC}] = TE[K] \quad (22)$$

2) 期望库存持有成本 一个补货周期内的总期望库存持有成本为

$$E[H_{RC}] = hE \left[\int_0^{KT} I(t) dt \right] \quad (23)$$

图 2和图 3显示在 $[0, T]$ 时段内库存曲线会从较低水平跃变至 S . 引入参考的时变函数 $\Pi(t)$, 此函数与 $I(t)$ 的唯一区别在于假设 $[0, T]$ 时段的库存水平为 S . 即

$$\Pi(t) = \begin{cases} S & \text{若 } 0 \leq t < T; \\ I(t), & \text{否则.} \end{cases} \quad (24)$$

为便于推导,不妨引入符号

$$\Omega(S, s, T) = \int_0^{KT} \Pi(t) dt \quad \omega = E[\Omega]$$

易知 Ω 满足如下递推关系

$$\Omega(S; s, T | N_1 = i) = \begin{cases} ST, & \text{若 } i \geq S - s \\ ST + \Omega(S - i, s, T), & \text{若 } i < S - s \end{cases} \quad (25)$$

对上式求期望可得关于 ω 的离散更新方程如下

$$\omega(S, s, T) = ST + \sum_{i=0}^{S-s-1} \omega(S - i, s, T)g(i) \quad (26)$$

运用定理 1 得

$$\omega(S, s, T) = ST + \sum_{i=0}^{S-s-1} (S - i)T \cdot m_g(i) \quad (27)$$

由于 $I(t)$ 仅在 $[0, \tau]$ 时段 ($\tau < T$ 时) 或 $[0, T]$ 时段 ($\tau \geq T$ 时) 有别于 $\Pi(t)$, 因此易知

$$\int_0^{\tau} I(t) dt = \begin{cases} \Omega - \tau(S - I_0), & \text{若 } \tau < T; \\ \Omega - T(S - I_0), & \text{若 } \tau \geq T. \end{cases} \quad (28)$$

因此

$$E[H_{RC}] = hE \left[\int_0^{KT} I(t) dt \right] = h \int_0^T [\omega - (S - \mu)\tau] \phi(\tau) d\tau + \int_T^{\infty} [\omega - (S - \mu)T] \phi(\tau) d\tau = h\omega - h(S - \mu)[E\tau - \Upsilon(T)] \quad (29)$$

其中

$$\Upsilon(T) = \int_T^{\infty} (\tau - T) \phi(\tau) d\tau \quad (30)$$

3) 期望补货成本

在 1 个补货周期内,补货决策只会发生在期末发生 1 次,补货量是 $(S - I_k)$, 因此

$$E[R_{RC}] = A_R + c_R E[S - I_k] = A_R + c_R (S - \mu) \quad (31)$$

4) 期望发货成本

一个补货周期内的总发货次数为 K , 并且总发货量必然为 $(S - I_k)$, 因此

$$E[D_{RC}] = A_D E[K] + c_D E[S - I_k] = A_D E[K] + c_D (S - \mu) \quad (31)$$

5) 期望缺货罚成本

在补货周期期末,若在库存货不足以满足累积需求时就会发生缺货,显然

$$\begin{aligned} \delta &= \max\left\{0, \sum_{i=1}^K N_i - S\right\} \\ &\equiv -\min\left\{0, S - \sum_{i=1}^K N_i\right\} \end{aligned} \quad (32)$$

式 (10) 和式 (11) 显示

$$I_K = \max\left\{0, S - \sum_{i=1}^K N_i\right\} \quad (33)$$

从而必然有

$$\begin{aligned} I_K - \delta &= \max\left\{0, S - \sum_{i=1}^K N_i\right\} + \\ &\quad \min\left\{0, S - \sum_{i=1}^K N_i\right\} \\ &= S - \sum_{i=1}^K N_i \end{aligned} \quad (34)$$

因此

$$E[\delta] = E\left[\sum_{i=1}^K N_i\right] - S + \mu \quad (35)$$

更新理论中的 Wald 公式 (参见 Ross^[29], 38 页, 定理 3.6) 表明

$$E\left[\sum_{i=1}^K N_i\right] = E[K]E[N] = \lambda E[K] \quad (36)$$

则有

$$E[\delta] = \lambda E[K] - (S - \mu) \quad (37)$$

进而得期望缺货罚成本为

$$\begin{aligned} E[P_{RC}] &= c_s E[\delta] \\ &= c_s (\lambda E[K] - S + \mu) \end{aligned} \quad (38)$$

6) 期望客户等待成本

在允许缺货情况下, “客户等待时间” 须重新定义为: 订货方用于等待供货方作出明确的供货或缺货决策的时间. 在考虑缺货不补的情况下, Çetinkaya 和 Lee 关于客户等待成本的分析与结论在此处仍然适用, 参见文献 [4] 中式 (14)、(15) 和 (27), 在此不作赘述. 即

$$E[W_{RC}] = w \lambda^2 E[K] / 2 \quad (39)$$

7) 期望赶工成本

在 $\tau > T$ 情况下, 供应商通过追加额外的赶工成本将补货提前期缩短至 T , 则提前期被缩短 $\max\{0, \tau - T\}$ 单位. 本文考虑线性赶工成本, 补货量为 $(S - I_0)$, 则有

$$CR_{RC} = c_{cr}(S - I_0) \cdot \max\{0, \tau - T\} \quad (40)$$

从而

$$\begin{aligned} E[CR_{RC}] &= c_{cr}(S - \mu) \int_T^\infty (\tau - T) \phi(\tau) d\tau \\ &= c_{cr}(S - \mu) \Upsilon(T) \end{aligned} \quad (41)$$

8) 期望长期平均成本

将式 (22)、(29)、(31)、(38)、(39)、(41)、代入到式 (21) 中, 整理可得

$$\begin{aligned} C(S, s, T) &= c_s \lambda + \frac{A_D}{T} + \frac{\omega \lambda T}{2} + \frac{h\omega + A_R}{TE[K]} + \\ &\quad \frac{S - \mu}{TE[K]} [c_R + c_0 - c_s - hE\tau + (h + c_{cr})\Upsilon(T)] \end{aligned} \quad (42)$$

若考虑补货提前期 τ 服从参数为 λ_τ 的负指数分布 (这在现实生活中较有代表性), 即有 $\phi(\tau) = \lambda_\tau e^{-\lambda_\tau \tau}$, $\tau \geq 0$ 那么

$$E\tau = \lambda_\tau^{-1}; \quad \Upsilon(T) = \lambda_\tau^{-1} e^{-\lambda_\tau T} \quad (43)$$

这样, 就能得到期望长期平均成本的显式表达式如下

$$\begin{aligned} C(S, s, T) &= c_s \lambda + \frac{A_D}{T} + \frac{w \lambda T}{2} + \frac{h\omega + A_R}{TE[K]} + \\ &\quad \frac{S - \mu}{TE[K]} [c_R + c_0 - c_s - h\lambda_\tau^{-1} + (h + c_{cr})\lambda_\tau^{-1} e^{-\lambda_\tau T}] \end{aligned} \quad (44)$$

其中 $E[K]$ 、 $\mu(S, s, T)$ 、 $\omega(S, s, T)$ 分别由式 (16)、(20)、(27) 给出.

3.5 优化策略

有了上述成本分析, 优化问题就转化为如下混合整数规划的求解问题

$$\begin{aligned} \min C(S, s, T) \quad \text{s.t.} \quad & S \geq s, T > 0 \\ & S, s \in (9) \end{aligned} \quad (45)$$

通过求解此规划就可得到优化策略 (S^*, s^*, T^*) . 然而, 基于一阶条件的传统极值求解方法并不适用于此, 必须借助于计算机辅助求解工具. 不过在此之前, 必须解决如何计算 $m_g(i)$ 的问题, 因为 $m_g(i)$ 是个无穷级数且难以化简, 计算机无法进行无限求和运算. Çetinkaya 和 Lee^[4] 曾给出了如下近似

$$m_g(i) \approx 1 / (\lambda T)$$

但无论是数学推导还是数值验证都显示这个近似是不够精确的, 某些具体数值代入所产生的误差甚至是不合理的^[34], 因此舍弃这种近似. 本文将根据一定的预设精度要求以此级数的前项和来近似, 可用类 C 语言描述如下

```
function  $m_g(i)$  {
    precision =  $1 \times 10^{-n}$ ; // n 是足够大的正整数
    middleVal = 0
    for ( $k = 0$ ;  $g^{(k)}(i) = \frac{(k \lambda T)^k e^{-k \lambda T}}{k!} >$ 
```

```
precision; k++)
    middleVal += g(k)(i);
    return(middleVal);
}
```

有了上述精度可设的近似算法, 计算机辅助求解就可行了. 上述规划问题只涉及 3 个决策变量 S 、 s 和 T , 其他均为外生变量, 问题规模较小且固定. 可从某个可行初始策略出发, 通过调用启发式搜索引擎 (如 EXCEL、MATLAB、LINGO 等所提供的辅助求解工具, 或用 GA 算法编写) 就可找到局部最优解. 理论上说, 局部最优解中目标函数值最小值即为全局最优. 基于此, 提出如下寻求全局拟优策略方法:

步骤 1 按均匀分布随机产生足够多初始策略, 形成初始启发集 P ;

步骤 2 针对初始策略集 P 中的每个策略, 调用计算机辅助求解工具来启发式搜索局部优化策略 (注: 有些初始策略可能会得到相同的局部优化解);

步骤 3 比较期望长期平均成本, 满足 $C(S^*, s^*, T^*) = \min_{(S, s, T) \in P} C(S, s, T)$ 的策略即可视为全局拟优解.

3.6 进一步讨论

注意到通过式 (42) 和 (44) 可得出如下两个结论, 这可在一定程度上简化本文的问题.

定理 2 可行策略 (S, s, T) 劣于策略 $(S - s, 0, T)$ 的充分 (但非必要) 条件是

$$\Upsilon(T) \geq \frac{hE\tau + c_s - c_R - c_D}{h + c_{cr}} \quad (46)$$

对于负指数分布提前期, 此条件即为

$$e^{-\lambda\tau} \geq \frac{h + (c_s - c_R - c_D)\lambda\tau}{h + c_{cr}} \quad (47)$$

证明: 见附录 2

定理 2 所提出的条件涉及决策变量 T , 因此无

表 2 全局拟优结果与中间参数值

Table 2 Quasi optimal results and values of the middle parameters

拟优结果	中间参数					
(S^*, s^*, T^*)	$E[H_{RC}]$	$E[R_{RC}]$	$E[D_{RC}]$	$E[P_{RC}]$	$E[W_{RC}]$	$E[CR_{RC}]$
(20 2 0 837)	151.665	223.164	230.455	75.379	92.679	9.203
$C(S^*, s^*, T^*)$	$E[K]$	$E[T_{RC}]$	ω	$\Upsilon(T)$	μ	
353.366	2.646	2.215	29.642	0.094	0.367	

法用来在规划求解之前就断言 $s^* = 0$ 不过, 显然有 $\Upsilon(T) > 0$ $e^{-\lambda\tau} > 0$ 若用 0 来替换式 (46) 和 (47) 的左边部分, 就可得到更方便使用的较强条件 (见定理 3 证明略), 因为这样的充分条件与任何决策变量均无关.

定理 3 可行策略 (S, s, T) 劣于策略 $(S - s, 0, T)$ 的充分 (但非必要) 条件是

$$E\tau \leq \frac{c_R + c_D - c_S}{h} \quad (48)$$

对于负指数分布提前期, 此条件即为

$$\lambda\tau \geq \frac{h}{c_R + c_D - c_S} > 0 \quad (49)$$

定理 3 意味着, 若上述条件得以满足, 则任何 $s > 0$ 的策略 (S, s, T) 均不是最优的, 此时的最优再订货点必为 0 这样, 规划问题就简化为只含两个决策变量的 $\{ \min C(S, 0, T) \mid S \in (0^+; T > 0) \}$, 降低了求解复杂度. 另外, 若 $s = 0$ 则必有 $\mu = 0$ 那么通过舍弃含有 μ 的项, 目标函数会进一步简化.

4 算 例

这一部分将提供一个典型算例以说明本文模型的应用. 算例中考虑负指数分布提前期. 继承 Çetinkaya 和 Lee^[4] 的算例参数值, 并也给未赋值参数一个基值 (见表 1).

表 1 模型参数基值

Table 1 Base values of the model parameters

λ	$\lambda\tau$	h	A_D	c_D	A_R	c_R	c_S	w	c_{cr}
10	2	7	50	5	125	5	30	10	5

按照前面提出的求解方法, 本文随机生成了 100 个初始策略, 并将 $m_g(i)$ 的精度控制在 1×10^{-20} . 从这些初始策略出发启发式搜索出全局拟优策略 (见表 2).

5 模型仿真

为了验证本文分析模型的有效性, 在 MATLAB(版本: 7.1.0.246) 语言环境下开发了专用的仿真程序 `policy_simulator(params, policy, simuCycles)`, 其中参数 `params` 反映如表 1 所示的模型外部参数值, 参数 `policy` 为将被仿真的时基策略, 而 `simuCycles` 则反映单次仿真所追踪的补货周期数, 此参数越大, 越能反映策略长期实施效果 (源代码见 <http://staff.ustc.edu.cn/~dsoft/glkxb/sim.htm>). 值得一提的是: `policy_simulator` 仿真程序直接建立在基本前提和策略实施方法之上, 与分析模型本身无关, 它可用

于仿真任何策略任何模型参数的长期实施效果. 此仿真程序的主要作用在于验证上述分析模型的有效性, 将通过分析模型得到的全局拟优策略作为参数来调用此仿真程序可模拟出相应的策略实施效果, 包括中间参数、长期平均成本及其走势图. 比较模型优化结果和仿真结果, 若差距很小甚至可以忽略, 则本文模型的有效性就得到验证.

将 `policy_simulator` 应用于算例所示情形: 拟优策略 (20 2 0 837) 被独立仿真 10 次, 每次跟踪 2 000 个补货周期, 即在 MATLAB 环境下 10 次执行 `policy_simulator([10 2 7 50 5 125 5 30 10 5], [20 2 0 837], 2000)`. 表 3 和图 4 分别反映了对应的平均结果和走势图.

表 3 策略 (20 2 0 837) 下 10 次独立仿真的平均结果 (每次 2 000 个补货周期)

Table 3 Average results through 10 independent simulations under policy (20 2 0 837), (2 000 replenishment cycles tracked for each)

N_a	\overline{H}_{RC}	\overline{R}_{RC}	\overline{D}_{RC}	\overline{P}_{RC}	\overline{W}_{RC}	\overline{CR}_{RC}	\overline{T}_{RC}	\overline{K}	$\overline{C(S, T)}$
1	152.337 1	223.187 5	230.112 5	75.255 0	92.515 6	8.272 4	2.208 4	2.638 5	353.953 7
2	150.984 6	223.140 0	229.890 0	73.275 0	92.164 7	9.833 4	2.205 5	2.635 0	353.339 1
3	151.577 4	223.035 0	229.285 0	72.225 0	92.684 4	8.402 2	2.197 1	2.625 0	353.739 1
4	150.938 6	223.107 5	229.532 5	72.705 0	92.238 5	10.066 4	2.200 1	2.628 5	353.895 1
5	151.131 1	223.232 5	229.907 5	76.785 0	92.962 8	9.144 1	2.204 2	2.633 5	355.298 5
6	151.953 8	223.125 0	230.125 0	74.565 0	92.657 5	9.717 2	2.209 7	2.640 0	353.962 3
7	151.289 6	223.230 0	230.305 0	75.270 0	92.666 7	9.769 7	2.210 9	2.641 5	353.936 6
8	152.972 4	223.230 0	230.980 0	76.110 0	92.839 7	8.823 8	2.222 2	2.655 0	353.228 1
9	152.936 5	223.237 5	231.462 5	77.670 0	93.118 8	9.435 0	2.230 2	2.664 5	353.271 1
10	151.606 7	223.152 5	230.377 5	76.260 0	92.329 3	9.291 4	2.213 4	2.644 5	353.754 8

对表 2 中的优化结果和表 3 中的仿真结果进行比较可以发现, 它们高度吻合, 从而本文分析模型得以验证. 有必要说明: 优化和仿真间的差异是不可避免的, 因为仿真结果并非数学期望而是有限次补货周期的平均结果. 如前所述, `simuCycles` 设置越大, 仿真平均结果就越趋于期望值. 图 4 中的走势图还显示: 平均成本在前期波动明显, 而随着时间推进逐渐平稳向期望值收敛.

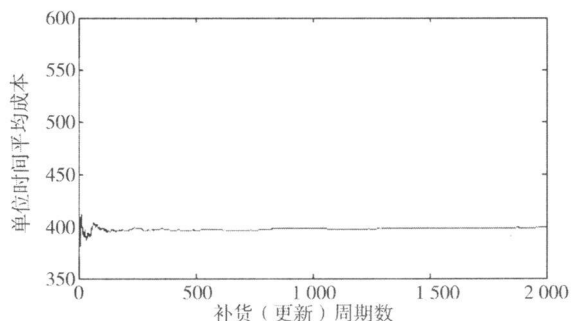


图 4 策略 (20 2 0 837) 下单位时间平均成本走势图

Fig. 4 Trend lines of average cost per unit time under policy (20 2 0 837), (2 000 replenishment cycles tracked)

6 结束语

本文考虑 VMI 系统下带提前期的 SRSS 问题, 允许缺货, 缺货不补. 在正常情况下补货提前期是随机的, 不过额外追加赶工成本可缩短提前期. 本文假设 Poisson 需求过程以及线性赶工成本, 这可简化问题又不失代表性. 在此情况下, Çetinkaya 和 Lee^[4] 的经典 SRSS 模型被拓展到更

为一般的情形. 本文应用更新理论建立了相应的时基模型, 通过求解混合整数规划得到拟优策略. 长期实施此策略将最小化长期平均成本. 此外, 本文还提供了专门的仿真程序用于验证模型有效性.

本文的研究是在 SRSS 问题中首次考虑随机补货提前期情况, 有助于丰富 SRSS 理论. 后续研究将关注更为一般的“允许缺货, 缺货要补”情形.

参 考 文 献:

- [1] Fagel A J. Selling on consignment Another tool in the credit arsenal[J]. *Business Credit* 1996, 98(9): 6—8
- [2] Dong Y, Xu K. A supply chain model of vendor managed inventory[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2002, 38(2): 75—95
- [3] Aviv Y, Federgruen A. The Operational Benefits of Information Sharing and Vendor Managed Inventory (VMI) Programs[Z]. Working Paper, Washington University, 1998
- [4] Çetinkaya S, Lee C-Y. Stock replenishment and shipment scheduling for vendor managed inventory systems[J]. *Management Science* 2000, 46(2): 217—232
- [5] Higgins JK, Bookbinder JH. Markovian decision processes in shipment consolidation[J]. *Transportation Science* 1995, 29(3): 242—255
- [6] Hall R W. Consolidation strategy Inventory vehicles and terminals[J]. *Journal of Business Logistics* 1987, 8(2): 57—73
- [7] Çetinkaya S, Bookbinder JH. Stochastic models for the dispatch of consolidated shipments[J]. *Transportation Research Part B Methodological* 2003, 37(8): 747—768
- [8] Ching W K, Tai A H. A quantity-time-based dispatching policy for a VMI system[A]. In *Computational Science and Its Applications - ICCSA 2005*[C]. 2005, Springer Berlin / Heidelberg 342—349
- [9] 杜少甫, 梁 樑, 张靖江, 等. 考虑产品变质的 VMI 混合补货发货策略及优化仿真[J]. *中国管理科学*, 2007, 15(2): 64—69
Du Shaofu, Liang Liang, Zhang Jingjiang *et al* Hybrid replenishment and dispatching policy with deteriorating item for VMI Analytical model optimization and simulation[J]. *Chinese Journal of Management Science* 2007, 15(2): 64—69 (in Chinese)
- [10] Chen F Y, Wang T, Xu T Z. Integrated inventory replenishment and temporal shipment consolidation: A comparison of quantity-based and time-based models[J]. *Annals of Operations Research* 2005, 135(1): 197—210
- [11] Jackson G C. A survey of freight consolidation practices[J]. *Journal of Business Logistics* 1985, 6(1): 13—34
- [12] Ching W K. Optimal (s, S) policies with delivery time guarantees for manufacturing systems with early set-up[J]. *Computers and Industrial Engineering* 2001, 40(3): 249—257
- [13] So K C, Song J-S. Price delivery time guarantees and capacity selection[J]. *European Journal of Operational Research* 1998, 111(1): 28—49
- [14] Tersine R J. Principles of Inventory and Materials Management[M]. New York: North-Holland, 1982
- [15] Rabinowitz G, Mehrez A, Chu C-W, *et al*. A partial backorder control for continuous review (r, Q) inventory system with poisson demand and constant lead time[J]. *Computers and Operations Research* 1995, 22(7): 689—700
- [16] Bookbinder JH, Cakanyilmaz M. Random lead times and expedited orders in (Q, r) inventory system[J]. *European Journal of Operational Research* 1999, 115(2): 300—313
- [17] Sheu S-H, Chien Y-H. Optimal age-replacement policy of a system subject to shocks with random lead time[J].

- European Journal of Operational Research, 2004, 159(1): 132–144
- [18] Mohebbi E. Supply interruptions in a lost sales inventory system with random lead time [J]. Computers and Operations Research, 2003, 30(3): 411–426
- [19] Çakanyıldırım M, Bookbinder JH, Gerchak Y. Continuous review inventory models where random lead time depends on lot size and reserved capacity [J]. International Journal of Production Economics, 2000, 68(3): 217–228
- [20] 王迎军, 高峻峻. 供应链分销系统优化及仿真 [J]. 管理科学学报, 2002, 5(5): 79–84
Wang Yingjun, Gao Junjun. Optimization and simulation of distribute systems in a supply chain [J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(5): 79–84 (in Chinese)
- [21] Heijlen M, Diks E, Kok T. Inventory control in multiechelon divergent systems with random lead times [J]. OR Spectrum, 1999, 21(3): 331–359
- [22] Pan C H, J Yang J S. A study of an integrated inventory with controllable lead time [J]. International Journal of Production Research, 2002, 40(5): 1263–1273
- [23] Pan C H, J Lo M C, Hsiao Y C. Optimal reorder point inventory models with variable lead time and backorder discount [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 158(2): 488–505
- [24] Ouyang L-Y, Wu K-S, Ho C-H. The integrated inventory models with defective items and controllable lead time [J]. Production Planning & Control, 2003, 14(7): 562–578
- [25] Ouyang L-Y, Wu K-S, Ho C-H. Integrated vendor-buyer cooperative models with stochastic demand in controllable lead time [J]. International Journal of Production Economics, 2004, 92(3): 255–266
- [26] Rezaei J. Economic order quantity model with backorder for imperfect quality items [A]. In: IEEE International Engineering Management Conference [C]. 2005
- [27] 达庆利, 张钦, 沈厚才. 供应链中牛鞭效应问题研究 [J]. 管理科学学报, 2003, 6(3): 86–93
Da Qingli, Zhang Qin, Shen Hourcai. Study on bullwhip effect in supply chain [J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(3): 86–93 (in Chinese)
- [28] Axäter S. Exact analysis of continuous review (R, Q) policies in two-echelon inventory systems with compound poisson demand [J]. Operation Research, 2000, 48(5): 686–696
- [29] Ross S M. Applied Probability Models with Optimization Applications [M]. San Francisco: Holden-Day, 1970
- [30] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications [M]. New York: John Wiley & Sons, 1971
- [31] Kebir Y. Laplace Transforms and the Renewal Equation [J]. Journal of Applied Probability, 1997, 34(2): 395–403
- [32] Tijms H C. Stochastic Models: An Algorithmic Approach [M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1994
- [33] Tijms H C. A First Course in Stochastic Models [M]. New York: John Wiley & Sons, 2003
- [34] Axäter S. A note on stock replenishment and shipment scheduling for vendor-managed inventory systems [J]. Management Science, 2001, 47(9): 1306–1310

Time-based replenishment and dispatching policy with stochastic but controllable lead time

DU Shao-fu¹, LIANG Liang¹, DONG Jun-feng¹, QIU Hao²

1. School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

2. Anhui Branch, China Construction Bank, Hefei 230001, China

Abstract This paper focuses on a time-based replenishment and dispatching policy for Stock Replenishment and Shipment Scheduling (SRSS) with stochastic and controllable lead time. Shortage is allowed but not backlogged. Utilizing the renewal theory, the extended analytical model is proposed through cost analysis. Besides, a simulating program is developed to track the long-run implementing

effect of the optimal policy so as to validate the proposed model

Key words stock replenishment and shipment scheduling (SRSS); poisson process renewal theory; simulation

附 录

1. 定理 1证明

令 $y \equiv x - x_0$ 即 $x \equiv y + x_0$, 并代入到式 (8) 中, 得到

$$u(y + x_0) = v(y + x_0) + \sum_{i=0}^y u(y + x_0 - i)g(i) \quad (*)$$

若对任意 $y \in (9)^+$ 定义

$$U(y) \equiv u(y + x_0),$$

$$V(y) \equiv v(y + x_0)$$

也即 $U(\bullet)$ 和 $V(\bullet)$ 分别是由 $u(\bullet)$ 和 $v(\bullet)$ 向右平移 x_0 单位而来. 易知

$$u(y + x_0 - i) = U(y - i),$$

$$v(y + x_0 - i) = V(y - i)$$

这样, 式 (*) 即等价于

$$U(y) = V(y) + \sum_{i=0}^y U(y - i)g(i) \quad (**)$$

式 (**) 是个传统离散更新方程, 应用传统求解定理可得

$$U(y) = V(y) + \sum_{i=0}^y V(y - i)m_g(i) \quad (***)$$

将

$$U(y) \equiv u(y + x_0),$$

$$V(y) \equiv v(y + x_0),$$

$$V(y - i) = v(y + x_0 - i)$$

代入到式 (***) 可得

$$u(y + x_0) = v(y + x_0) +$$

$$\sum_{i=0}^y v(y + x_0 - i)m_g(i) \quad (****)$$

既然 $y \equiv x - x_0$, 那么式 (****) 也就等价于

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=0}^{x-x_0} v(x - i)m_g(i) \quad \text{证毕.}$$

2 定理 2证明

由式 (16) 得

$$E[K | (S, s, T)] = E[K | (S - s, 0, T)]$$

式 (19) 说明对于任意非负 S 均有 $\alpha(S, 0) = 0$ 根据式 (20) 可知 $\mu(S - s, 0, T) = 0$ 因此

$$\begin{aligned} s - \Delta\mu &= s - [\mu(S, s, T) - \mu(S - s, 0, T)] \\ &= s - \mu(S, s, T) \geq 0 \end{aligned}$$

由式 (27) 得

$$\Delta\omega = \omega(S, s, T) - \omega(S - s, 0, T) > 0$$

根据式 (42) 知

$$\Delta C = C(S, s, T) - C(S - s, 0, T)$$

$$= \frac{h\Delta\omega + [c_R + c_D - c_S - hE\Upsilon + (h + c_\alpha)\Upsilon(T)](s - \Delta\mu)}{TE[K]}$$

因此, 若

$$\Upsilon(T) \geq \frac{hE\Upsilon + c_S - c_R - c_D}{h + c_\alpha}$$

$$C(S - s, 0, T) \text{ 必小于 } C(S, s, T) \quad \text{证毕.}$$