基于目标的风险度量方法①

周春阳, 吴冲锋
(上海交通大学金融工程研究中心, 上海 200052)

摘要: VaR和 CVaR在国内外风险管理实践中得到了普遍应用, 但监管者以概率置信水平作为其监管目标的方法对于实际投资者的风险度量而言并不是很直观, 投资者更加关心的是资产目标价值能否实现的风险. 将资产的目标价值以直观的方式加入到风险的定义中, 提出了广义一致风险测度公理假设, 并证明了广义一致风险测度也具有很好的性质. 此外, 看跌期权作为测度风险的有效方法, 具有直观的经济含义, 可以证明它满足广义一致风险测度公理假设. 最后建立了看跌期权费风险测度和 E-VaR /E-CVaR之间的数量关系.

关键词: 看跌期权费; 目标; 一致风险测度; 广义一致风险测度
中图分类号: F830.9　　文献标识码: A　　文章编号: 1007-9807(2009)06-0083-09

0 引 言

VaR和 CVaR在风险管理实践中得到了普遍应用(见文献[1-4]等), 但以概率置信水平作为风险管理目标的方法对于实际中的投资者而言并不是很直观. 例如假设某资产在期初的价值为 100万元, 若它在 99%置信水平下 VaR为 10万元, 则表明该资产在期末的价值达到 90万元的可能性为 99%, 或要使得未来资产价值为 100万元的可能性为 99%, 投资者额外需要投入的资金量为 10万元.

事实上, 投资者更加关心的是资产的价值目标能否实现的风险. 文献[5]通过实际调查指出, 风险是和投资者的投资目标联系在一起的, 投资者往往把位于投资目标以下的损失当作风险. 文献[6]提出的展望理论认为个体会针对某一参考点定义自己的损失和盈利, 并且他们并不是那么讨厌不确定性, 他们讨厌的是损失. 在他们的研究工作启发下, 文献[7-9]提出下偏矩风险测度, 将投资目标价值加入到风险测度的定义中.

看跌期权费作为另一种基于目标的风险测度, 具有直观的经济含义: 资产的风险可以直观定义为使资产在未来的价值达到给定目标所需要的保险费用, 它等于以该资产为标的资产, 以给定目标为执行价格的看跌期权费用. 文献[10]指出公司为避免破产的保险费用等于以公司净资产为标的资产, 执行价为 0的看跌期权费, 因此他利用该看跌期权费作为风险测度来度量公司的破产风险. 文献[11]指出同仅仅度量市场风险的 VaR等风险测度或者仅仅度量信用风险的违约概率相比, 看跌期权费风险测度是量化整体风险的风险度量方法. 例如当人们购买花旗银行的债券, 债券价格会同时受到利率市场风险以及花旗银行信用风险的影响. 在市场有效的情况下, 以花旗银行债券为标的资产的看跌期权价格会同时反映市场风险和信用风险的整体风险大小, 同时看跌期权也为人们提供了管理风险的手段. 文献[12]介绍了采用蒙特卡罗方法度量上述花旗银行债券整体风险的方法.

由于看跌期权费不满足文献[13]提出的一

① 收稿日期: 2007-11-06; 修订日期: 2008-04-28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70331001).
作者简介: 周春阳(1980—), 男, 山东荣成人, 博士. Email: zcymagic@sjtu.edu.cn

致风险测度公理假设,文献[10]提出了看跌期权费满足的保险风险测度公理假设,但文献[10]并没有考虑将资产目标价值加入到风险测度的定义中. 文献[14]通过求解跨期均衡个体的最优保险策略问题指出个体的最优保险策略相当于购买以持有资产为标的资产,适当执行价格的看跌期权,因此相应的看跌期权费可以看作是合理的风险测度. 本文在文献[10,13]工作的基础上,在第1部分提出新的基于目标的广义一致风险测度公理假设,并研究了广义一致风险测度的性质. 第2部分证明了看跌期权费是一种广义一致风险测度,第3部分则建立了看跌期权费风险测度和E-VaR/E-CVaR风险测度之间的数量联系,并给出了计算实例. 最后第4部分总结全文.

1 广义一致风险测度公理假设

假设仅考虑两期模型,即0时刻和T时刻. 投资者持有资产在T时刻价值

$$X_i, i = 1,\cdots,N$$

是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,τ_i是第i个资产的目标价值. 令

$$\mathcal{G} = \{(X_i,\tau_i), i = 1,\cdots,N\}$$

表示投资者持有资产的集合,其中(X_i,τ_i)表示第i个资产. 任两个资产(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)构成的投资组合,其T时刻价值为$X_1 + X_2$,投资目标为$\tau_1 + \tau_2$.

定义1 ρ称为广义一致风险测度,如果ρ满足以下公理假设M1 ~ M5:

公理M1 对任意的

$$(X,\tau) \in \mathcal{G}, \tau_f \in R$$

有

$$\rho(X + \tau_f, \tau + \tau_f) = \rho(X,\tau)$$

公理M2 若$(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in \mathcal{G}$,则

$$\rho(X_1 + X_2, \tau_1 + \tau_2) \leqslant \rho(X_1,\tau_1) + \rho(X_2,\tau_2)$$

公理M3 对任意的$\lambda \geqslant 0,(X,\tau) \in \mathcal{G}$,有

$$\rho(\lambda X, \lambda\tau) = \lambda\rho(X,\tau)$$

公理M4 若$X_1 \geqslant X_2$, a.s., $\tau_1 \leqslant \tau_2$,则有

$$\rho(X_1,\tau_1) \leqslant \rho(X_2,\tau_2)$$

公理M5 对任意的$(X,\tau) \in \mathcal{G}$,若$X \leqslant \tau$且$X \neq \tau$, s.a.,则

$$\rho(X,\tau) > 0$$

公理M1表明增加无风险资产并不会改变原来资产的风险度量. 公理M2表明两个资产组合起来的风险小于这两个资产分散风险的和. 公理M3表明相同资产构成的组合无法对风险进行分散. 公理M4表明更容易达到投资目标的资产风险更低. 公理M5表明如果资产无法实现投资目标,那么这个资产的风险测度大于0.

风险测度应能够反映风险管理者的风险偏好,文献[13]提出采用资产可接受集A来反映风险偏好:若某一资产的风险暴露属于风险管理者的资产可接受集合A,则风险管理者认为该资产的风险暴露是可以接受的,否则,如果资产的风险暴露不属于风险管理者的资产可接受集合,那么他认为该资产当前的风险暴露是不可接受的.

本节给出广义一致风险测度所对应的资产可接受集公理假设. 本文采用文献[15]定义标准风险集的方法,资产$(X,\tau) \in \mathcal{G}$的标准化风险定义为$Y = X - \tau$,并令

$$L_+ = \{Y \mid Y = X - \tau \geqslant 0, \text{a.s.}, (X,\tau) \in \mathcal{G}\}$$

$$L_- = \{Y \mid Y = X - \tau \leqslant 0, \text{a.s.}, (X,\tau) \in \mathcal{G}\}$$

资产(X,τ)是可接受的,如果相应的标准化风险$Y = X - \tau$满足$Y \in A$,其中A满足:

公理G1 $L_+ \subseteq A$

公理G2 $A \cap L_- = \{0\}$

公理G3 A为凸集

公理G4 A为一次齐次锥

定义2 资产可接受集A生成的风险测度定义为

$$\rho_A(X,\tau) = \inf\{m \mid m + X - \tau \in A\}$$

风险测度ρ生成的资产可接受集定义为

$$A_\rho = \{Y = X - \tau \mid (X,\tau) \in \mathcal{G}, \rho(X,\tau) \leqslant 0\}$$

文献[13]在命题2.1和2.2中证明了在一致风险测度和相应的可接受集之间存在一致对应关系. 按照定义2,可以得到类似的结论.

命题1 若β满足公理G1 ~ G4,则风险测度ρ_β是广义一致风险测度,且$A_{\rho\beta} = \bar{\beta}$.

命题2 ρ 为广义一致风险侧度,则资产可接受集 A_ρ 是闭集,满足公理 G1 ~ G4,且 ρ 和 ρ_{A_ρ} 生成的资产可接受集相同.

命题1和命题2的证明见附录. 由于资产可接受集反映了投资者的风险偏好,因此由命题1和命题2可知广义一致风险测度同投资者的风险偏好存在一致对应关系.

2 看跌期权费和广义一致风险测度

为量化个体对不同资产的偏好,文献[16]提出了著名的期望效用函数理论. 然而著名的 Allias 悖论和 Ellsberg 悖论的提出,使得期望效用方法受到了有力的挑战. 为了弥补这个问题,文献[17 - 18]在一系列公理假设下提出了反映个体偏好的鲁棒效用函数,即

$$U(X) = \inf_{P \in Q} E_P[u(X)]$$

其中$\mathcal{Q}$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度集合,u 是一个递增的凹函数.

如果考虑的是下端风险而不是上端收益,在引入目标 τ 的情况下,根据文献[15]的做法,可以定义鲁棒的个体偏好风险测度为

$$\begin{aligned}\rho(X,\tau) &= -U(X-\tau)\\ &= \sup_{P \in Q} E_P[-u(X-\tau)]\\ &= \sup_{P \in Q} E_P[v(\tau - X)]\end{aligned}$$

其中 $v(x) = -u(-x)$. 容易证明 $v(x)$ 是 x 的递增凸函数.

命题3 若 $v(x)$ 满足:(i) $v(x)$ 是 x 的递增凸函数;(ii) 当 $x > 0$ 时有 $v(x) > 0$;(iii) $v(x)$ 满足一次齐次性假设,则由式(1)定义的 $\rho(X,\tau)$ 是广义一致风险测度.

容易证明上述命题成立,故证明略. 命题3的证明除了需要 $v(x)$ 满足它是一个递增凸函数以外,还需要假设它满足条件(ii)和条件(iii). 条件(ii)的限制并不是非常苛刻,而采用条件(iii)的限制是为了保证风险测度和货币单位无关. 如果不施加条件(iii)的限制,可以在文献[19]工作基础上定义具有目标的广义凸风险测度.

当概率测度集$\mathcal{Q}$仅仅包含一个风险中性测度 Q,即$\mathcal{Q} = \{Q\}$,且 $v(x) = x^+$ 时,可以得到看跌期权费风险测度 $\rho(X,\tau) = E^Q(\tau - X)^+$,在不引起混淆的情况下,简记为 $\rho(X,\tau) = E^Q(\tau - X)^+$. 显然 $v(x) = x^+$ 满足命题3,故看跌期权费属于广义一致风险测度.

3 看跌期权费同 E-VaR/E-CVaR 间的关系

文献[20]指出,传统的 VaR 方法采用统计概率测度计算某一置信水平下的损失值,这种方法没有考虑到不同的经济个体由于财务状况差别等原因,对同样的损失有不同的风险感受. 风险中性测度包含了个体对风险的态度、时间的偏好等信息,因此文献[20]根据状态价格函数从经济定价的角度来测度风险,提出了风险中性测度下的 VaR,即 E-VaR. 另一方面由于衍生产品市场的价格发现功能,在期权市场有效的情况下,期权价格能够反映未来市场基础资产价格的波动性. 文献[21]通过实证研究指出对货币期货而言,期权隐含的波动包括时间序列模型所包含的所有信息,文献[3]建议采用期权隐含波动率计算 VaR,即采用 E-VaR 来测度风险.

为了比较看跌期权费和 VaR/CVaR 之间的关系,首先需要定义引入目标价值的 VaR 和 CVaR. 按照文献[20]的做法,在计算风险测度时采用风险中性测度,即本文计算的 VaR 和 CVaR 分别是 E-VaR 和 E-CVaR 的缩写. 为简单起见,假设资产价值 X 在风险中性测度下的分布函数为连续函数 $F(x)$.

定义4 资产 (X,τ) 的风险测度 $\mathrm{VaR}_\alpha(X,\tau)$ 和 $\mathrm{CVaR}_\alpha(X,\tau)$ 分别定义为

$$P(X + \mathrm{VaR}_\alpha(X,\tau) \leqslant \tau) = \alpha$$

和

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X,\tau) = E(\tau - X \mid X \leqslant \tau - \mathrm{VaR}_\alpha(X,\tau))$$

上述定义中,$\mathrm{VaR}_\alpha(X,\tau)$ 的直观含义是为使资产未来价值小于投资目标 τ 的概率等于 α 所需要额外加入的资金数量,$\mathrm{CVaR}_\alpha(X,\tau)$ 的直观含义是为使资产未来价值小于目标 τ 的概率等于 α 所需要额外加入资金的平均值.

命题4 给定资产 (X,τ),对任意的 τ',风险

测度 $VaR_\alpha(X,\tau)$ 和 $CVaR_\alpha(X,\tau)$ 满足

$$VaR_\alpha(X,\tau) = VaR_\alpha(X,\tau') + \tau - \tau',$$

$$CVaR_\alpha(X,\tau) = CVaR_\alpha(X,\tau') + \tau - \tau',$$

容易证明上述命题成立, 证明略. 命题 5建立了各个风险测度之间的联系.

命题 5

$$E(\tau - X)^+ = \int_0^{F(\tau)} VaR_u(X,\tau)\,du = F(\tau)\,CVaR_{F(\tau)}(X,\tau)$$

命题 5的证明见附录. 由于

$$VaR_\alpha(X,\tau) = -F^{-1}(\alpha) + \tau$$

为 α 的非增函数, 以及

$$CVaR_\alpha(X,\tau) = E[\tau - X \mid X \leqslant \tau - VaR_\alpha(X,\tau)] \leqslant VaR_\alpha(X,\tau)$$

故有

$$E(\tau - X)^+ \leqslant \int_0^{F(\tau)} VaR_0(X,\tau)\,du \leqslant CVaR_0(X,\tau) \leqslant CVaR_0(X,\tau) \qquad (2)$$

由 $F(\tau) \leqslant 1$ 和命题 5知, 对任意的 τ

$$E(\tau - X)^+ \leqslant CVaR_{F(\tau)}(X,\tau)$$

都成立.

为保证资产在 T 时刻价值不低于目标 τ, 投资者可以购买以资产 X 为标的资产, 以目标价值 τ 为执行价格, 到期时间为 T 的看跌期权, 相应的看跌期权费用为 $E(\tau - X)^+$. 由式 (2) 可知, 若投资者尝试自己控制风险, 为了使得他在 T 时刻的财富值不低于 τ, 他所需要的额外资金准备 $VaR_0(X,\tau)$ 或 $CVaR_0(X,\tau)$ 将不低于购买期权的费用 $E(\tau - X)^+$. 同 VaR和 CVaR相比, 看跌期权费更便宜的原因是期权反映了整个市场对冲风险的成本, 而 VaR和 CVaR则反映了经风险态度、时间偏好调整后的经济个体持有风险的成本. 因此, 将风险市场化, 让风险在市场上进行交易, 在一定程度上有利于减少控制风险的经济成本.

以下给出当股票价格服从几何布朗运动时如何利用期权价格计算股票的 E-VaR 和 E-CVaR. 以武钢认购权证作为例子, 武钢权证为欧式看涨权证, 在 2008年 3月 26日, 武钢股份的交易价格为 16.47元, 对应的武钢权证的每股交易价格为 6.864元, 执行价格为 9.91元, 距到期日剩余时间为 386天, 无风险利率设置为 1年期存款利率 4%. 由 B-S公式, 可以求得期权隐含波动率为 240%②. 在股票价格服从几何布朗运动的假设下, 即若 $dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t^Q$, 容易求得 S_t 对应的累积分布函数为

$$F(x) = N(d_1(x)) \qquad (3)$$

其中 $N(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数

$$d_1(x) = -\frac{\ln(S_0/x) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

应用式 (3) 和命题 5, 可以求得不同概率置信水平和目标价值下的 VaR值和 CVaR值. 例如若假设 $\alpha = 0.05$, $\tau = 16.47$, $t = 30$, 由式 (3) 得

$$d_1(x) = N^{-1}(\alpha) = -1.6449$$

进一步可得 $x = 4.16$, 故有

$$VaR_\alpha(X,\tau) = -F^{-1}(\alpha) + \tau = -4.16 + 16.47 = 12.31$$

不同的经济个体由于财务状况差别等原因, 对同样的损失有不同的风险感受, 因此上述计算结果表明, 为保证亏损的概率小于 5%, 经风险态度、时间偏好调整后的个体需要额外投入的资金数量为 12.31元. 由命题 5可得

$$CVaR_{0.05}(X, 4.16) = 20 \times E(4.16 - X)^+ = 20 \times 0.0475 = 0.95$$

其中期权价格是以 30天为到期时间计算的, 由命题 4得

$$CVaR_{0.05}(X, 16.47) = 0.95 + 16.47 - 4.16 = 13.26$$

故为使亏损概率小于 5%, 经过风险态度、时间偏好调整后的个体所需要额外加入资金的平均值为 13.26元. 同时容易计算以 $\tau = 16.47$ 为执行价格, 到期时间为 30天的看跌期权理论价格为 $E(\tau - X)^+ = 4.43$ 元, 即在完备无摩擦的市场条件下, 为保证不亏损个体将风险转移除去所需要支付的成本为 4.43元.

② 当同一股票有不同执行价格的期权在交易时, 由于期权波动微笑, 不同执行价格下期权的隐含波动率不尽相同. 文献 [22] 指出同其他加权方法相比, 仅采用平价期权价格能更好得预测波动率. 文献 [11] 根据文献 [23] 提出的可违约股票的期权定价公式, 利用所有的期权交易价格求解得到股票的隐含波动特征以及公司的破产概率信息.

4 结 论

VaR和 CVaR在风险管理实践中得到了普遍应用,但是监管者以概率置信水平作为其监管目标的方法对于实际中的投资者而言并不是很直观,投资者更加关心的是资产的目标价值.本文尝试将投资者的投资目标价值以直观的方式加入到风险的定义中去,提出了广义一致风险测度公理假设,并且证明了广义一致风险测度公理假设同风险管理者的风险偏好是一致的.

看跌期权费作为经济直观的风险度量方法,不满足文献[13]提出的一致风险测度的公理假设,但容易证明看跌期权费风险测度满足广义一致风险测度的公理假设.本文在风险中性测度条件下,对看跌期权费风险测度和 VaR/CVaR进行了比较,并建立了它们之间的数量关系.可以证明为完全规避风险,看跌期权费比 VaR/CVaR更加便宜,这是因为看跌期权费反映了整个市场对冲这种不利风险的成本,而 VaR和 CVaR则反映了经过对风险态度、时间偏好调整后的经济个体持有该不利风险的经济成本.因此,将风险市场化,让风险在市场上进行交易,在一定程度上有利于减少控制风险的成本.衍生产品市场的迅猛发展,使得风险更多的是在市场上交易,而不是由个体自己承担,这样有利于节省控制风险的经济成本.

参考文献:

[1]王春峰. 金融市场风险管理[M]. 天津: 天津大学出版社, 2001.
Wang Chun-feng. Management of Financial Market Risk[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2001. (in Chinese)
[2]余素红, 张世英, 宋 军. 基于 GARCH模型和 SV模型的 VaR比较[J]. 管理科学学报, 2004, 7(5): 61—66.
Yu Su-hong, Zhang Shi-ying, Song Jun. Comparison of VaR based on GARCH and SV models[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(5): 61—66. (in Chinese)
[3] Jorion P. Value at Risk[M]. New York: McGraw-Hill, 2001.
[4] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk[J]. Journal of Risk, 2000, 2(3): 21—41.
[5] Mao J C T. Survey of capital budgeting: Theory and practice[J]. Journal of Finance, 1970, 25(2): 349—360.
[6] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263—292.
[7] Bawa V S. Optimal rules for ordering uncertain prospects[J]. Journal of Financial Economics Letters, 1975, 2(1): 95—121.
[8] Bawa V, Lindenberg E B. Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 189—200.
[9] Fishburn P C. Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns[J]. The American Economic Review, 1977, 67(2): 116—126.
[10] Jarrow R. Put option premiums and coherent risk measures[J]. Mathematical Finance, 2002, 12(2): 135—142.
[11] Deventer V D R. Asset and Liability Management in Enterprise Wide Risk Management Perspective[M]. In: Ong M K (ed.) Risk management: A modern perspective. London: Elsevier Academic Press, 2006.
[12] Deventer V R D, Imai K, Mesler M. Advanced Financial Risk Management: Tools and Techniques for Integrated Credit Risk and Interest Rate Risk Management[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2004.
[13] Artzner P, Delbaen F, Eber J M, *et al*. Coherent measures of risk[J]. Mathematical Finance, 1999, 9(3): 203—228.
[14] Zhou C, Wu C, Zhang S, *et al*. An optimal insurance strategy for an individual under an intertemporal equilibrium[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(1): 255—260.
[15] Jia J, Dyer J S. A standard measure of risk and risk-value models[J]. Management Science, 1996, 42(12): 1691—1705.
[16] Von Neumann J, Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior[M]. Princeton: Princeton University Press, 1944.
[17] Gilboa I. Expected utility with purely subjective non-additive probabilities[J]. Journal of Mathematical Economics, 1987,

16(1): 65—88.

[18] Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with non-unique prior[J]. Journal of Mathematical Economics, 1989, 18(2): 141—153.

[19] Follmer H, Schied A. Convex measures of risk and trading constraints[J]. Finance and Stochastics, 2002, 6(4): 429—447.

[20] Aït-Sahalia Y, Lo A. Nonparametric risk management and implied risk aversion[J]. Journal of Econometrics, 2000, 94(1—2): 9—51.

[21] Jorion P. Predicting volatility in the foreign exchange market[J]. Journal of Finance, 1995, 50(2): 507—528.

[22] Beckers S. Standard deviations implied in option prices as predictors of future stock price variability[J]. Journal of Banking and Finance, 1981, 5(3): 363—381.

[23] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1—2): 125—144

Target-based risk measuring method

ZHOU Chun-yang, WU Chong-feng

Financial Engineering Research Center, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract From an investor's view, risk is closely related to his investment target. In this paper we take the investment target into the risk definition, and propose a new axiomatic framework for the class of generalized coherent risk measures. It proves that the class of generalized risk measure is consistent with the individual's risk preference. The put option premium is an intuitive risk measure, and also is a generalized coherent risk measure. Connections between the put option premium and other risk measures such as E-VaR and E-CVaR are also built in this paper.

Keywords put option premium; target-based risk measure; coherent risk measure; generalized coherent risk measures

附录

命题 1的证明

(i) 公理 G2和 G3保证 ρ_β 有限.

(ii) 由定义 2有

$$\rho_\beta(X, \tau) = \inf\{m \mid m + X - \tau \in \beta\}$$
$$= \inf\{n + \tau \mid n + X \in \beta\}$$
$$= \rho_\beta(X, 0) + \tau \quad (4)$$

由于 β满足文献[13]的公理假设 A1 - A4,因此由式(4)可知,当 $\tau = 0$时, $\rho_\beta(X, 0)$ 为一致风险测度. 由文献[13]的命题 2.1可得, $\rho_\beta(X, 0)$ 满足一致性公理假设, 故

$$\begin{aligned}
\rho_\beta(X + \tau_f, \tau + \tau_f) &= \rho_\beta(X + \tau_f, 0) + (\tau + \tau_f) \\
&= \rho_\beta(X, 0) - \tau_f + (\tau + \tau_f) \\
&= \rho_\beta(X, 0) + \tau \\
&= \rho_\beta(X, \tau)
\end{aligned}$$

(iii) 由式(4)知, 对任意的 $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2) \in \mathcal{G}$, 有

$$\begin{aligned}
\rho_\beta(X_1 + X_1, \tau_1 + \tau_2) &= \rho_\beta(X_1 + X_2, 0) + (\tau_1 + \tau_2) \\
&\leqslant \rho_\beta(X_1, 0) + \rho_\beta(X_2, 0) + (\tau_1 + \tau_2) \\
&= \rho_\beta(X_1, \tau_1) + \rho_\beta(X_2, \tau_2)
\end{aligned}$$

(iv) 由式(4)知, 对于任意的 $\lambda \geqslant 0$, $(X, \tau) \in \mathcal{G}$, 有

$$\begin{aligned}
\rho_\beta(\lambda X, \lambda\tau) &= \rho_\beta(\lambda X, 0) + \lambda\tau \\
&= \lambda\rho_\beta(X, 0) + \lambda\tau \\
&= \lambda\rho_\beta(X, \tau)
\end{aligned}$$

(v) 由式(4)知, 若 $X_1 \geqslant X_2$, a.s, $\tau_1 \leqslant \tau_2$, 则有

$$\begin{aligned}
\rho_\beta(X_1, \tau_1) &= \rho_\beta(X_1, 0) + \tau_1 \\
&\leqslant \rho_\beta(X_2, 0) + \tau_2 \\
&= \rho_\beta(X_2, \tau_2)
\end{aligned}$$

(vi) 假设当 $X < \tau$, a.s时, 成立

$$\rho_\beta(X_1, \tau_1) = \inf\{m \mid m + X - \tau \in \beta\} \leqslant 0$$

则有

$$\rho_\beta(X, \tau) + X - \tau < 0, \text{ a.s}$$

由于 $\rho_\beta(X, \tau) + X - \tau \in \beta$与 $\beta \cap L_- = \{0\}$矛盾, 故此时必有 $\rho_\beta(X, \tau) > 0$.

(vii) 对任意的 $(X,\tau)\in\mathcal{G}$, 若 $Y=X-\tau\in\mathcal{B}$, 则有 $\rho_{\mathcal{B}}(Y)\leqslant 0$, 故 $Y\in A_{\rho_{\mathcal{B}}}$. 上述推理倒推也成立, 同时由命题2可得 A_ρ 是闭集, 故 $A_{\rho_{\mathcal{B}}}=\bar{\mathcal{B}}$. 证毕.

命题 **2**的证明

(i) 由公理 M1可得

$$\rho(X,\tau)=\rho(X-\tau+\tau,\tau)$$
$$=\rho(X-\tau,0)\equiv\rho(Y)$$

即风险测度仅仅是标准风险 $Y=X-\tau$的函数.

(ii) 对任意的 $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)\in\mathcal{G}$及 $\lambda\geqslant 0$, 令 $Y_1=X_1-\tau_1$, $Y_2=X_2-\tau_2$, 则有

$$\begin{aligned}\rho(Y_1+Y_2)&=\rho(X_1+X_2-\tau_1-\tau_2)\\&=\rho(X_1+X_2-\tau_1-\tau_2,0)\\&=\rho(X_1+X_2,\tau_1+\tau_2)\\&\leqslant\rho(X_1,\tau_1)+\rho(X_2,\tau_2)\\&=\rho(Y_1)+\rho(Y_2)\end{aligned}\qquad(5)$$

及

$$\begin{aligned}\rho(\lambda Y_1)&=\rho(\lambda X_1-\lambda\tau_1)\\&=\rho(\lambda X_1-\lambda\tau_1,0)\\&=\rho(\lambda X_1,\lambda\tau_1)=\lambda\rho(X_1,\tau_1)\\&=\lambda\rho(X_1-\tau_1)=\lambda\rho(Y_1)\end{aligned}\qquad(6)$$

上述证明过程用到了公理假设 M1 – M3. 因此由式(5)和式(6)知 $\rho(Y)$满足次可加性和一次齐次性. 故可推出

$$A_\rho=\{Y=X-\tau\mid(X,\tau)\in\mathcal{G},\rho(X,\tau)\leqslant 0\}$$
$$=\{Y\mid\rho(Y)\leqslant 0\}$$

为闭凸集, 且是一次齐次锥.

(iii) 对于任意的 $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)\in\mathcal{G}$令

$$Y_1=X_1-\tau_1,\ Y_2=X_2-\tau_2$$

以下证明若 $Y_1\geqslant Y_2$, 则必有 $\rho(Y_1)\leqslant\rho(Y_2)$, 即 ρ满足单调性.

由 $Y_1\geqslant Y_2$得 $X_1-\tau_1\geqslant X_2-\tau_2$, 或 $X_1-\tau_1+\tau_2\geqslant X_2$, 故由公理 M4可得

$$\rho(X_1-\tau_1)+\tau_2,\tau_2\leqslant\rho(X_2,\tau_2)$$

即

$$\rho(Y_1)=\rho(X_1-\tau_1)\leqslant\rho(X_2-\tau_2)$$
$$=\rho(Y_2)\qquad(7)$$

(iv) 对任意的 $(X,t)\in\mathcal{G}$, 令 $Y=X-\tau$, 若 $Y=X-\tau<0$ a.s., 则必有 $X<\tau$, a.s., 故由 M5可得

$$\rho(Y)=\rho(X-\tau)=\rho(X,\tau)>0\qquad(8)$$

(v) 由 ρ满足一次齐次性知 $\rho(0)=0$. 由式(7)和(8)得, 若 $Y=X-\tau\geqslant 0$, 则 $\rho(Y)\leqslant 0$; 若 $Y<0$, a.s., 则 $\rho(Y)>0$. 故由 $A_\rho=\{Y\mid\rho(Y)\leqslant 0\}$, 有 $L_+\subseteq A_\rho$和 $A_\rho\cap L_-=\{0\}$.

(iv) 由

$$\rho(X,\tau)\leqslant 0\Leftrightarrow X-\tau\in A_\rho$$
$$\Leftrightarrow\rho_{A_\rho}(X,\tau)\leqslant 0$$

可得 ρ和 ρ_{A_ρ}生成的可接受集相同. 证毕.

命题 **5**的证明

设 U服从[0, 1]均匀分布, 令 $Z=q_U(X)$, 其中 $q_U(X)$为 X的下 U分位数, 即 $P(X\leqslant q_U)=U$, 容易证明 Z同 X具有相同的分布. 设 $\alpha=F(\tau)$, 故有 $\tau=q_\alpha(X)$.

由 $q_U(X)$是 U的非减函数, 且

$$\mathrm{VaR}_U(X,0)=-q_U(X)$$

故

$$\begin{aligned}E(\tau-X)^+&=E[(\tau-X)I_{\{\tau\geqslant X\}}]\\&=E[(\tau-q_U(X))I_{\{q_\alpha\geqslant q_U(X)\}}]\\&=E[(\tau+\mathrm{VaR}_U(X,0))I_{\{\alpha\geqslant U\}}]\\&=\int_0^\alpha\mathrm{VaR}_u(X,\tau)\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{F(\tau)}\mathrm{VaR}_u(X,\tau)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}E(\tau-X)^+&=E(\tau-X\mid X\leqslant\tau)P(X\leqslant\tau)\\&=[\tau+E(-X\mid X\leqslant-\mathrm{VaR}_{F(\tau)}(X,0))]\times F(\tau)\\&=[\tau+\mathrm{CVaR}_{F(\tau)}(X,0)]F(\tau)\\&=F(\tau)\mathrm{CVaR}_{F(\tau)}(X,\tau)\end{aligned}$$

故命题 5成立. 证毕.