第 12卷第 6期
2009年 12月
管 理 科 学 学 报
JOURNAL OF MANAGEMENT SCIENCES IN CHINA
Vol 12 No 6
Dec 2009

流动性风险、投资者流动性需求与资产定价①

邹小芃[1], 黄 峰[2], 杨朝军[3]
(1. 浙江大学经济学院, 杭州 310027; 2. 浙商银行风险管理部, 杭州 310006;
3. 上海交通大学安泰经济与管理学院, 上海 200052)

摘要: 依据证券市场的交易特点把投资者面临的市场流动性风险分解为外生和内生流动性风险, 并引入流动性需求状态变量随机化了的投资者对证券的持有期限, 得出基于流动性风险调整的资产定价模型. 模型能够解释实证研究发现的投资者对流动性风险中不可分散的系统性部分要求相应的风险补偿现象. 而且模型揭示出, 流动性水平和市场流动性风险的补偿要求是投资者的流动性需求紧张程度的增函数, 解释了流动性风险溢价的时变性现象.

关键词: 流动性风险; 流动性需求; 资产定价
中图分类号: F830.91 文献标识码: A 文章编号: 1007-9807(2009)06-0139-11

0 引 言

流动性是资产在短期内以合理价格完成市场交易的能力, 资产的流动性好, 则买卖容易, 价格稳定, 投资者的交易成本低. 并且流动性因存在不可预测的变化而具有不确定性, 我们称之为流动性风险. 对投资者来说, 现实并不存在像经典的资产定价均衡模型所假设的交易无需成本、或无需交易就已形成均衡价格的市场. 因此, 流动性和它的风险问题应该考虑进资产定价理论模型中.

但一直以来, 流动性风险对资产定价的理论意义被忽视了, 即使把流动性水平和资产定价联系在一起亦是从 Amihud和 Mendelson[1] 等为代表的市场微观结构理论开始的. 国内学者在流动性与资产定价领域也做出了一定的贡献 (如苏冬蔚和麦元勋[2] 等). 不过, 市场微观结构理论尽管肯定了流动性水平对股票回报率的显著影响, 对流动性风险的研究却进展缓慢. 其原因是, 传统的市场微观结构理论的研究对象是单个证券, 在分析流动性和交易成本时很少着眼于流动性的系统性质. 而在研究风险对定价的作用时, 却离不开对系统性和个别性的区别, 因为经典金融学表明只有不可分散的系统性风险才会影响资产价格. 改变这一局面的是 Chordia 等[3], Hasbrouck 和 Seppi[4], 以及 Huberman和 Halka[5] 对股票流动性存在市场共性 (即系统性) 的实证研究. 他们使学界对流动性研究的重心由个体流动性及其经济含义开始转到流动性的系统性质及其经济含义上来, 这包括了不少学者随后通过实证研究发现流动性风险与资产定价之间的显著关系.

不过从理论模型给出解释的文献很少, Acharya和 Pedersen[6] 为填补这个空白而发展了外生流动性风险调整的 CAPM. 可是他们忽视了市场流动性风险中的一个重要构成: 内生流动性风险②, 而且也解释不了流动性风险溢价的时变

① 收稿日期: 2006-11-21; 修订日期: 2008-05-28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70373053).
作者简介: 邹小芃 (1957—), 男, 浙江杭州人, 副教授. Email: zxp_hz@163.com

② 这个概念首先由 Bangia, Diebold, Schuermann和 Stroughair[7] 提出. 他们认为传统的风险管理工具 VaR没有考虑到实际变现时市场流动性风险的影响, 因而提出流动性风险调整的 VaR. 他们认为投资者面对的市场流动性风险由外生流动性风险和内生流动性风险组成. 外生流动性风险指由市场因素所引起的每个交易者同等面对的交易成本的不确定性. 所谓内生流动性风险是指投资者未来交易时的成本和交易头寸的大小相关, 因为交易头寸越大往往可能越难交易. 所以, 这里的内生流动性风险概念是对交易者自己而言的, 和有些文献所讨论的市场流动性的内生性有区别. 本文沿用他们对市场流动性风险的分解方法.

性现象. 鉴于此, 本文依据证券交易市场普遍存在交易成本和交易头寸大小直接相关的特点, 引入内生流动性风险, 发展新的基于流动性风险调整的资产定价模型. 模型还引入了投资者的流动性需求状态变量. 流动性需求紧张与否直接影响投资者对资产流动性的偏好程度, 亦会体现在投资者补偿流动性风险的要求回报率上. 这可以解释流动性风险溢价的时变性.

本文后面的内容安排如下: 第 1节流动性风险与资产定价研究文献的回顾, 指出目前理论研究的概况和不足. 第 2节描述模型的经济条件, 推演出 Breeden-Lucas意义下的流动性风险调整的资产定价形式. 第 3节进一步发展出流动性风险调整的 CAPM, 讨论其含义, 并对模型实证含义进行比较分析. 第 4节结论.

1 文献回顾与讨论

Chordia等[3]断言, 如果市场中的流动性冲击(liquidity shock)不能够被分散化, 那么可以推测, 对市场总体流动性越敏感的股票, 会要求它有越高的预期回报率. Pastor和 Stambaugh[8]首先从实证角度给出正面回应. 他们把个股回报率对市场组合的流动性扰动的敏感度大小表示为流动性 β. 通过检验 1966年到 1999年美国股市数据发现, 在控制了 Fama-French三因子和惯性因子后, 流动性 β最高的股票组合比流动性 β最低的股票组合平均年收益率仍高出 7.5个百分点. Eckbo和 Norli[9], Wang[10], Sadka[11] 以及 Acharya和 Pedersen[6]等也得到类似的股票横截面实证结果, 例如 Acharya 和 Pedersen[6]对美国 1963—1999年 NYSE和 AMEX市场的实证结果显示, 流动性风险调整后的 CAPM 的数据拟合度 R^2 明显高过经典 CAPM 的 R^2 值, 依据调整后的 CAPM 而市场 β和 3个流动性 β加总后得到的净 β显著地存在溢价. Avramov等[12]发现, 引入流动性作为风险因子后找到的市场组合要比不引入流动性因子的市场组合更接近于 Merton的 ICAPM 意义下的多因子均方差有效前沿, 因此考虑流动性风险能减小定价误差.

国内学者在近几年也开始了相应的实证研究. 罗登跃等[13]借鉴 Gibson和 Mougeot[14]的实证方法, 从市场整体的角度对我国股市流动性风险与资产定价的关系进行了时间序列分析. 他们的流动性风险包括用协方差度量的市场收益对市场组合流动性的敏感性风险和用方差度量的市场组合流动性的波动率. 发现我国股市同样存在显著的流动性风险溢价, 而流动性风险中市场收益对市场组合流动性的敏感性风险对资产定价的影响更为显著.

为解释实证研究发现的流动性风险溢价现象, Acharya和 Pedersen[6]构建了流动性风险调整的资产定价模型, 分析流动性风险在资产定价中的作用机制. 在二期叠代经济模型中, 他们假设投资者具有绝对风险厌恶系数为常数的负指数效用函数, 股利和交易成本分别服从一阶自回归条件正态分布. 模型显示, 表现为 3个协方差形式的市场流动性风险的不可分散部分, 即市场流动性系统风险, 影响投资者对资产的预期回报率, 这 3个协方差分别是: 1)证券的流动性与市场组合流动性之间的共性, 即 $\mathrm{cov}(c^i, c^M)$; 2) 证券回报率和市场组合流动性之间的共变性, 即 $\mathrm{cov}(r^i, c^M)$; 3) 证券的流动性和市场组合回报率之间的共变性, 即 $\mathrm{cov}(c^i, r^M)$. 该定价模型肯定了 Chordia等[3]关于流动性共性的实证意义, 解释了 Pastor和 Stambaugh[8] 等学者关于回报率对流动性的敏感度被显著定价的实证结果, 使人们对市场流动性风险的定价机制有了比较统一的认识.

但本文认为, Acharya和 Pedersen[6] 忽略了两个重要问题. 第 1个问题是交易中的内生流动性风险. 他们在假设股票的交易成本服从一阶自回归过程时, 完全把每单位证券的交易成本处理成外生的, 与交易者的头寸大小无关. 这显然与实际不符. 无论是在报价驱动市场还是在指令驱动市场, 交易者要卖出的头寸越大, 就越不容易出手, 平均到单位的交易成本也越高. 所以, 理性投资者在决定购买证券资产之前, 必然要把购买量对将来变现的影响考虑进投资决策和对证券的定

价中. 例如在我国的指令驱动市场, 市场没有专门提供流动性服务的做市商, 交易者向市场递交的买卖指令通过自动撮合而成交, 一笔较大的委托量可能就要在几个价位上才能完成③. 这使投资者不得不关心持有量的大小问题, 特别是机构投资者④.

现有文献亦说明, 单位交易成本与交易头寸正相关是个不容忽视的现实问题. 例如, 国内学者仲黎明等[15]在研究了机构投资者最优变现策略后指出, 投资者在构造投资组合时应该考虑未来变现时与委托量相关的执行成本问题. 黄峰和杨朝军[16]用 1995年到 2005年的我国沪深股市的股票交易数据进行横截面实证分析, 发现我国股票定价中所包含的流动性风险溢价显著地出现在价格冲击弹性较高或者说单位交易成本对交易头寸更敏感的股票上, 这说明实证结果支持内生流动性风险影响资产定价.

Acharya和 Pedersen[6]忽略的第 2个问题是内生持有期限. 他们假设投资者在第 1期购买, 并在第 2期把持有的证券一次性卖出. 持有期限外生化的处理会高估流动性交易成本对投资者的影响. 因为, 投资者完全有可能避开流动性较差的时期进行交易, 或减少交易频率, 或耐心地逐渐售出所持有的证券而尽量降低流动性所带来的负面影响. 当然, 并非说投资者可以丝毫不受市场流动性的影响, 因为投资者一般都会遇到借贷能力有限或财富波动等状况下的流动性现金需求压力, 使得资产变现的时间带有投资者不可控和随机的性质[17, 18]. 这导致, 分散风险的动机使投资者对市场流动性的在乎和偏好程度将取决于他的流动性需求状态.

正因为 Acharya和 Pedersen[6]没有考虑投资者的流动性需求状态, 他们的模型无法解释流动性风险溢价的时变性现象. Gibson和 Mougeot[14]在对 1973—1997年美国股市流动性风险与市场超额回报率之间关系的研究中, 利用二元 GARCH-in-mean实证框架, 发现流动性风险溢价随着未来经济衰退指数的变化而显著地变化. Fujimoto 和 Watanabe[19]通过美国股市 1965—2004年期间个股数据再次证实了流动性风险溢价的时变性. 他们发现个股流动性 β和流动性风险溢价服从高低两状态转换体制 (regime-switching), 高流动性 β和高流动性风险溢价的状态正是投资者对市场流动性偏好强的经济状态, 也就是投资者流动性需求紧张的经济状态.

因此, 为弥补 Acharya和 Pedersen[6]在这两个问题上的不足, 本文在黄峰和杨朝军[16]的基础上将建立放松的二期迭代模型, 通过引入流动性需求状态变量以随机化模型中的持有期, 同时还考虑了内生流动性风险的影响. 随机化持有期限尽管仍解决不了持有期限的内生性问题, 但能达到不要过高估计流动性对资产定价影响的目的, 同时使本文的模型能解释 Acharya和 Pedersen[6]所解释不了的流动性风险溢价的时变性现象.

引入流动性需求状态变量的想法与 Holmstrom和 Tirole[20]的思想是一致的. 他们站在公司金融角度发展了基于公司流动性需求的资产定价模型, 公司在多期生产中须满足未来流动性资金的不确定需求, 因而产生了对流动性金融资产的需求和流动性溢价, 该溢价与资产的未来收益和边际流动性价值之间的协方差大小有关. 需要强调的是, 本文从投资者的消费投资优化行为出发, 在投资者存在流动性需求不确定性的背景下, 研究市场的个体流动性、总体流动性和市场流动性风险溢价问题, 而他们是从投资者分散其资金流动性风险的角度出发研究流动性溢价, 他们没有考虑证券市场内部的流动性风险问题.

2　模型

2.1　市场

假设离散时间 $t = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$; 每期只有

③　感谢匿名审稿人就我国指令驱动市场的买卖交易为自动撮合的实际情况所给出的宝贵意见, 当然, 文责自负.

④　机构投资者常常通过把证券的持有量控制在几个交易日的交易量以内来达到控制流动性风险的目的.

1种消费品; 作为价格体系的衡量基准单位, 消费品价格标准化为 1; 资产市场里共有 J种证券, 第 j种证券的供给量是 S^j, 每一时期的单位证券红利 D_t^j服从马尔可夫过程, 市场价格表示为 P_t^j. 证券的流动性水平反映在交易成本上, 证券流动性好(差)则交易成本小(大), 所以称之为流动性交易成本. 准确讲, 实际中的证券交易成本应包括固定费用、价格冲击成本、所耗费的时间成本等, 而在这里用成交价上的冲击成本损失 q_t^j作为总代理, 即用服从马尔可夫过程的 q_t^j表示每单位证券交易成本. 因为买卖交易对市场成交价的冲击会随委托量的增加而增加, 所以假设 q_t^j是委托量的二次可偏导递增函数. 这样, 每一委托量下的单位交易成本都是满足马尔可夫过程的随机变量, 表达了本文的外生流动性风险概念; 单位交易成本又是委托量的增函数, 则导致投资者面对着内生流动性风险.

2.2 投资者

在简单的两期迭代模型中, 为更容易运算处理而又不影响结果的含义, 假设第 t期出生 N_t个同质的投资者, 时间偏好为常数 ρ, 效用函数为二阶可微凹函数 $U(C_t)$, 且 $E[U''(C_{t+1})]$存在, 其中 C_t是第 t期消费. 代表性投资者的初始禀赋为 e_t, 并进入资产市场购买证券, 购买量用列向量 $\boldsymbol{x}_t=(x_t^1, x_t^2, \cdots, x_t^J)'$表示. 然后在第 $t+1$期变现离场, 证券卖给新出生的投资者.

但期末变现时, 投资者并非一定遭受大小为 $q_{t+1}^j(\boldsymbol{x}_t)$的交易成本, 这要看他们当时的流动性需求状态如何. 假设流动性需求状态有两种可能: 一种可能是紧张状态, 投资者不得不一次性卖出全部证券来满足流动性需求, 因而承担交易成本 $q_{t+1}^j(\boldsymbol{x}_t)$, 这种情况的出现概率是 λ_{t+1}. 引致"紧张状态"的可能因素很多, 例如: 家庭遇到突如其来的财富缩水或消费冲击; 机构须满足突然的投资机会或者须调整投资组合, 亦或为满足资金供给方的赎回行为等. 另一种可能是发生概率为$(1-\lambda_{t+1})$的不紧张状态, 投资者变现时不受市场流动性影响, 不承担 $q_{t+1}^j(\boldsymbol{x}_t)$大小的交易成本. 例如, 投资者当期没有外界现金需求问题或其它机会成本问题, 所以可以拆细逐渐卖出证券, 变现成本小到了忽略不计; 或者投资者下期继续持有证券, 所以变现成本视为零 —— 这可以看作是自己出售给自己而成为下期新投资者中的一个. 引入示性函数表示存在两种可能的流动性需求状态变量

$$I_{t+1}=\begin{cases}1 & \text{流动性需求为紧张状态}\\ 0 & \text{流动性需求为不紧张状态}\end{cases}$$

随机化处理投资者期末的变现成本, 起到了放松和随机化持有期限的作用. 概率 λ_{t+1}的大小与所选度量时间的长短、投资者所处的市场和宏观经济条件等有关, 时间越长、市场和宏观经济越不稳定则 λ_{t+1}越大. 所有的随机变量都定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上.

2.3 投资者的优化问题

投资者面对的流动性风险实际上包括两部分: 流动性需求的不确定和资产市场的流动性风险. 在此风险约束条件下, 代表性投资者通过优化其消费投资行为达到效用的最大化. 投资者第 1期把初始禀赋在消费与投资组合之间做出配置, 在第 2期根据自身的流动性需求状况卖出证券. 投资者的目标是两期期望效用最大化

$$V(e_t, q_t, D_t)=\max_{\{x_t\}}\{U(C_t)+E_t\rho U(C_{t+1})\} \tag{1}$$

$$\text{s.t. } C_t=e_t-\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{x}_t$$

$$C_{t+1}=(\boldsymbol{P}_{t+1}+\boldsymbol{D}_{t+1}-I_{t+1}\boldsymbol{q}_{t+1})\boldsymbol{x}_t$$

其中:

$$\boldsymbol{P}_t=(P_t^1, P_t^2, \cdots, P_t^J),$$

$$\boldsymbol{D}_{t+1}=(D_{t+1}^1, D_{t+1}^2, \cdots, D_{t+1}^J),$$

$$\boldsymbol{x}_t=(x_t^1, x_t^2, \cdots, x_t^J)',$$

$$\boldsymbol{q}_t=(q_t^1, q_t^2, \cdots, q_t^J)'$$

且 q_t^j是 x_t^j的二次可偏导递增函数.

2.4 流动性风险调整的资产价格

由式(1)对证券持有量 $\boldsymbol{x}_t$的一阶条件得

$$P_t^jU'(C_t)=\rho E_tU'(C_{t+1})\times\left((P_{t+1}^j+D_{t+1}^j-I_{t+1}q_{t+1}^j)-I_{t+1}\frac{\partial q_{t+1}^j}{\partial x_t^j}x_t^j\right) \tag{2}$$

所以, 证券价格服从包含流动性交易成本的欧拉方程

$$P_t^j = E_t[\rho\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \times$$
$$(P_{t+1}^j + D_{t+1}^j - I_{t+1}q_{t+1}^j) - I_{t+1}\frac{\partial q_{t+1}^j}{\partial x_t^j}x_t^j) \quad (3)$$

其中 $\rho U'(C_{t+1})/U'(C_t)$ 是 Breeden—Lucas 意义下基于消费的资产定价模型中的随机折现因子, 为简便起见令

$$m_{t+1} = \rho\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}$$

因为认为流动性不足导致资产交易需要成本, 所以式(3)与传统的资产定价模型比较, 在等式右侧括号里多了两项流动性交易成本. 这两项刻画了市场外生流动性风险和与持仓量有关的内生流动性风险对资产定价的作用机制.

最优持仓量 $\boldsymbol{x}_t$ 不仅满足(3)式, 而且须满足证券的供求相等:

$$\sum_{N_t} x_t^j = S^j \quad (4)$$

因此, (3)式和(4)式一起决定了均衡状态时证券的价格和投资者的持仓量. 要得到预期回报率的解形式还需设定效用函数的具体形式, 下面给出流动性风险调整的 CAPM.

3 流动性风险调整的 CAPM

3.1 流动性风险调整的定价模型

为把上一节的资产定价模型线性化为流动性风险调整的 CAPM, 要对价格冲击弹性和效用函数进行假设. 定义 $\alpha^j = (\partial q_{t+1}^j/q_{t+1}^j)/(\partial x_t^j/x_t^j)$ 为交易头寸的冲击成本弹性, 显然 $\alpha^j > 0$. Chordia 等[21]以及 Hasbrouck和 Seppi[4]认为证券流动性发生变化反映的是市场活跃程度的内在变异而不是交易头寸大小的变化. 而为显性化冲击成本弹性对资产定价的影响和计算的方便, 把冲击成本弹性 α^j 令为不随时间变化而只与交易头寸有关的变量. 举一特殊例子: 在 Barra[22]的市场冲击成本模型里, 流动性溢价幅度是按交易头寸的平方根增长的, 假如市场冲击成本是交易头寸的平方根的线性函数, 那么计算可知 α^j 会恒等于 1/2.

投资者的效用函数采用常见的二次效用函数, 不失一般性的, 令其为

$$U(C_t) = -\frac{1}{2}(\bar{C} - C_t)^2 \quad (5)$$

其中常数 $\bar{C}$ 是充分大的正数, 以保证对消费的非饱和性.

定义:

r^f 为无风险资产回报率;

$r_{t+1}^j = (P_{t+1}^j + D_{t+1}^j)/P_t^j$ 为证券 j 交易前的毛回报率;

$c_{t+1}^j = q_{t+1}^j/P_t^j$ 为证券 j 下期的相对流动性交易成本;

$r_{t+1}^M = (P_{t+1} + D_{t+1})x_t/P_t x_t$ 为市场组合毛回报;

$c_{t+1}^M = q_{t+1}x_t/P_t x_t$ 为市场组合下期的相对流动性交易成本;

$\alpha^M = \sum_j \alpha^j(\omega^j c_{t+1}^j/\sum_j(\omega^j c_{t+1}^j)$ 为市场组合的冲击成本弹性, 它是单个证券的冲击成本弹性的凸组合;

ω_t^j 表示证券在投资组合中所占的权重.

投资者在资产市场里优化其投资组合, 则证券的预期回报率将满足如下命题:

命题 1 市场均衡状态下, 证券的预期回报率满足一个流动性风险调整的 CAPM

$$E_t(r_{t+1}^j) = r^f + (1+\alpha^j)E_t(I_{t+1}c_{t+1}^j) + \bar{R}_t\frac{\mathrm{cov}_t((r_{t+1}^j) - (1+\alpha^j)I_{t+1}c_{t+1}^j,\ r_{t+1}^M - I_{t+1}c_{t+1}^M)}{\mathrm{cov}_t((r_{t+1}^M) - (1+\alpha^M)I_{t+1}c_{t+1}^M,\ r_{t+1}^M - I_{t+1}c_{t+1}^M)} \quad (6)$$

或等价地

$$E_t(r_{t+1}^j) = r^f + (1+\alpha^j)E_t(I_{t+1}c_{t+1}^j) + \bar{R}_t\frac{\mathrm{cov}_t(r_{t+1}^j,\ r_{t+1}^M)}{\mathrm{cov}_t(r_{t+1}^M - (1+\alpha^M)I_{t+1}c_{t+1}^M,\ r_{t+1}^M - I_{t+1}c_{t+1}^M)} +$$
$$\bar{R}_t\frac{(1+\alpha^j)\mathrm{cov}_t(I_{t+1}c_{t+1}^j,\ I_{t+1},\ c_{t+1}^M) - \mathrm{cov}_t(r_{t+1}^j,\ I_{t+1},\ c_{t+1}^M) - (1+\alpha^j)\mathrm{cov}_t(I_{t+1}c_{t+1}^j,\ r_{t+1}^M)}{\mathrm{cov}_t(r_{t+1}^M - (1+\alpha^M)I_{t+1},\ c_{t+1}^M,\ r_{t+1}^M - I_{t+1}c_{t+1}^M)} \quad (7)$$

其中 $\bar{R}_t = E_t(r^M_{t+1} - (1+\alpha^M)I_{t+1}c^M_{t+1} - r^f)$ 为风险溢价(证明见附录).

证券的回报率和交易成本与市场组合的回报率和交易成本之间的协方差可以看作是对投资净收益的系统性风险的测度. 与流动性相关的系统风险测度是其中的 3个协方差, 即式(7)中的 $(1+\alpha^j)\mathrm{cov}_t(I_{t+1}c^j_{t+1}, I_{t+1}c^M_{t+1})$、$\mathrm{cov}_t(r^j_{t+1}, I_{t+1}c^M_{t+1})$ 和 $(1+\alpha^j)\mathrm{cov}_t(I_{t+1}c^j_{t+1}, r^M_{t+1})$. $\mathrm{cov}_t(r^j_{t+1}, r^M_{t+1})$ 则是被经典 CAPM 深刻讨论的价格风险敏感度, 是对单纯的系统性价格风险的度量. 因此, 式(7)表明: 投资者对预期流动性交易成本要求溢价补偿, 对单纯的系统性价格风险要求风险补偿, 而且还对投资净收益中不可分散的流动性风险要求风险补偿.

式(6)和(7)看似冗长, 但并不复杂. 定义净 beta

$$\beta^{net\,j}_t = \frac{\mathrm{cov}_t(r^j_{t+1} - (1+\alpha^j)I_{t+1}c^j_{t+1}, r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1})}{\mathrm{cov}_t(r^M_{t+1} - (1+\alpha^M)I_{t+1}c^M_{t+1}, r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1})}$$

则命题 1表明: 每个证券 j 的风险溢价 $(E_t(r^j_{t+1}) - (1+\alpha^j)E_t(I_{t+1}c^j_{t+1}) - r^f)$ 和自己的风险敏感度 $\beta^{net\,j}_t$ 呈线性关系, 系数是共同的风险溢价 $\bar{R}_t$

$$E_t(r^j_{t+1}) = r^f + (1+\alpha^j)E_t(I_{t+1}c^j_{t+1}) \beta^{net,j}_t \bar{R}_t \tag{7}$$

如果对式(7)中的流动性水平项和流动性协方差项再做细致分解, 将会得到有实证意义的模型含义和命题.

1) 流动性水平的溢价

由迭代期望定律知道

$$(1+\alpha^j)E_t(I_{t+1}c^j_{t+1}) = \lambda_{t+1}(1+\alpha^j)E_t(c^j_{t+1} \mid I_{t+1} = 1)$$

因此, 预期流动性水平(即 $E_t(c^j_{t+1} \mid I_{t+1} = 1)$)⑤对预期回报率的影响究竟有多大, 取决于下一期投资者的流动性需求紧张程度(即概率 λ_{t+1})和证券自身的冲击成本弹性 α^j.

2) 市场流动性系统风险 $\mathrm{cov}_{t\,I=1}(c^j_{t+1}, c^M_{t+1})$、$\mathrm{cov}_{t\,I=1}(r^j_{t+1}, c^M_{t+1})$ 和 $\mathrm{cov}_{t\,I=1}(c^j_{t+1}, r^M_{t+1})$

与文献相一致, 所谓证券的市场流动性系统风险特指流动性风险在证券之间无法分散的系统部分. 需要运用迭代期望定律把它从系统总风险中分离出来, 它们是以下分解式的第一项

$$\mathrm{cov}_t(I_{t+1}c^j_{t+1}, I_{t+1}c^M_{t+1}) = \lambda_{t+1}\mathrm{cov}_{t\,I=1}(c^j_{t+1}, c^M_{t+1}) + (\lambda_{t+1} - \lambda^2_{t+1})E_{t,I=1}c^j_{t+1}E_{t\,I=1}c^M_{t+1} \tag{8}$$

$$\mathrm{cov}_t(r^j_{t+1}, I_{t+1}c^M_{t+1}) = \lambda_{t+1}\mathrm{cov}_{t,I=1}(r^j_{t+1}, c^M_{t+1}) + \lambda_{t+1}E_{t\,I=1}c^M_{t+1}(E_{t\,I=1}r^j_{t+1} - E_t r^j_{t+1}) \tag{9}$$

$$\mathrm{cov}_t(I_{t+1}c^j_{t+1}, r^M_{t+1}) = \lambda_{t+1}\mathrm{cov}_{t\,I=1}(c^j_{t+1}, r^M_{t+1}) + \lambda_{t+1}E_{t\,I=1}c^j_{t+1}(E_{t\,I=1}r^M_{t+1} - E_t r^M_{t+1}) \tag{10}$$

其中带下标 $I = 1$ 的期望值和协方差表示 $I_{t+1} = 1$ 时的条件期望和条件协方差, 为方便起见, 此处和下文 I 的下标 $t+1$ 都省略.

$\mathrm{cov}_{t\,I=1}(c^j_{t+1}, c^M_{t+1})$ 和 $\mathrm{cov}_{t\,I=1}(r^j_{t+1}, c^M_{t+1})$ 以及 $\mathrm{cov}_{t\,I=1}(c^j_{t+1}, r^M_{t+1})$ 就是本文要找的市场流动性系统风险的测度, 它们是证券的回报率和流动性与市场组合的回报率和流动性之间的协方差关系. 把式(9)、式(10)和式(11)代入式(7)就能分析它们和预期回报率之间的关系. 分析前, 需要引理 1.

引理 1 系统总风险的单位价格 $\bar{\mu}_t = \dfrac{\bar{R}_t}{\mathrm{cov}_t(r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1}, r^M_{t+1} - (1+\alpha^M)I_{t+1}c^M_{t+1})} > 0$ (证明见附录)

引理 1提示, 代表市场流动性系统风险的 3个协方差与预期回报率之间的相关关系是正是负直接由它们在式(7)中前面的加减号所决定. 具体的相关关系如下:

① $\mathrm{cov}_{t,I=1}(c^j_{t+1}, c^M_{t+1})$ 刻画证券流动性的市场共性, 共性越强的证券, 越不能帮助投资者分散市场整体流动性下降和市场低迷的风险, 因此, 这种市场共性的大小与投资者要求的预期回报率会是递增函数关系;

② $\mathrm{cov}_{t,I=1}(r^j_{t+1}, c^M_{t+1})$ 是证券的回报率与市场组合流动性之间的协方差. 由式(7)、式(10)和引理 1可知, 协方差值越大的证券则投资者要求的预期回报率会越小. 这是因为, 该协方差大的证券, 能在市场整体流动性变坏、市场低迷时带给投资者高回报, 帮助投资者抵御投资损失. 因此, 协

⑤ 准确讲, 是投资者流动性需求紧张条件下的预期流动性水平. 如果投资者个人的流动性需求状态独立于资产流动性的话, 则 $E_t(c^j_{t+1} \mid I_{t+1} = 1) = E_t(c^j_{t+1})$, 流动性需求状态条件就可省略.

方差越大的证券, 投资者对它们要求的回报率越低, 证券定价则相对会越高;

③$\mathrm{cov}_{t,I=1}(c^j_{t+1}, r^M_{t+1})$是证券的流动性和市场组合回报率之间的协方差. 由式(7)、式(11)和引理 1可知, $\mathrm{cov}_{t,I=1}(c^j_{t+1}, r^M_{t+1})$越大则投资者所要求的预期回报率越低. 道理在于此类证券在整个市场下跌时其交易成本反而变小, 所以投资者愿意持有这样的证券以分散市场下跌风险, 因此要求回报率就比较低.

这 3个协方差与 Acharya和 Pedersen[6]的 3个协方差的区别仅仅在于本文的有下标 $I=1$, 因而和他们的基本观点是一致的. 而下标 $I=1$的含义为: 投资者更在乎流动性需求紧张时的证券与市场之间的协方差关系. 本文认为, 无论投资者的流动性需求是否独立于证券与市场间的协方差关系, 投资者都是在流动性需求越紧张的时候, 越在乎市场流动性. 当投资者的流动性需求越紧张时, 变现其投资资产以补充流动性现金的可能性越大, 因而对流动性表现出更强的偏好和要求更高的风险分散能力, 对流动性水平和风险的溢价会定得高. 概率 λ_{t+1}表示了流动性需求紧张的程度, 所以投资者对 3个市场流动性系统风险所要求的单位溢价与概率 λ_{t+1}应成递增关系. 把式(9)、式(10)和式(11)代入式(7)可知, 这个单位溢价等于 $\lambda_{t+1}\Pi_t$. 尽管 Π_t的计算公式隐含着变量 λ_{t+1}, 从 Π_t的计算公式中不能够准确找出 Π_t和 λ_{t+1}之间是否存在单调的递增关系, 但投资者对投资风险(包括价格风险、资金流动性风险和市场流动性风险等)的单位要求回报率(即 Π_t)应该取决于投资者本身的风险承受能力等因素, 而与风险本身的大小相独立, 基于此, Π_t的大小与 λ_{t+1}应是无关的. 因此, 市场流动性系统风险的单位溢价是 λ_{t+1}的增函数, λ_{t+1}的时变性会导致流动性风险溢价的时变性.

综合本节分析, 得出如下命题.

命题 2　冲击成本弹性 α^j影响预期回报率在证券之间的差异. 流动性溢价受 λ_{t+1}影响; 流动性系统风险的单位价格等于 $\lambda_{t+1}\Pi_t$, 因此风险溢价会随 λ_{t+1}的变化而存在时变性.

3.2　模型实证含义的比较分析

本模型是经典 CAPM 以及 Acharya和 Pedersen[6]的扩展, 它们有内在联系: 如果资产市场无摩擦, 没有流动性溢价, 式(7)则退化为经典 CAPM. 如果市场存在流动性问题, 但流动性风险里面没有内生流动性风险以及不存在流动性需求状态的不确定性, 相应地, 冲击成本弹性系数 $\alpha^j=0$, 示性函数 I_{t+1}也不存在了, 则式(7)退化成 Acharya和 Pedersen的流动性风险定价模型. 所以, 从实证意义看, 经典 CAPM 与 Acharya和 Pedersen的模型都在本模型的涵盖之内. 证据如下.

1) 本文与 Acharya和 Pedersen的模型都能够解释他们以及 Pastor和 Stambaugh[8]、罗登跃等[13]等学者实证发现的 $\mathrm{cov}(c^j, c^M)$、$\mathrm{cov}(r^j, c^M)$和 $\mathrm{cov}(c^j, r^M)$的溢价现象. 而且, 本文的模型还可解释 Acharya和 Pedersen模型不能解释的地方:

①Acharya和 Pedersen[6]在实证模型里的流动性水平 $E(c^p_t)$前加了一个系数 κ⑥, 但没有按照他们的理论模型把 κ校准为 1, 而是采用月平均换手率大小作为 κ的校准值, 例如, 他们把所有股票按流动性高低分为 25个投资组合后进行回归分析时, κ被校准为 0.034. 其实, 这种校准正好符合本文关于概率 λ⑦影响流动性溢价的命题含义. 因为, κ的这种校准方式是对证券每月平均卖出概率的事前估计, 相当于本文的 λ. 严格讲, 证券卖出概率还要大于等于 λ, 因为上文指出, 卖出并不意味着一定会承受交易成本损失.

②另外, κ估计值在他们不同的分组检验中都显著大于按平均换手率校准的值: 按流动性高低构造不同投资组合进行回归分析时 κ的校准值是 0.034, 而估计值为 0.042(t统计量为 2.21); 按流动性不稳定程度构造投资组合进行回归分析时

⑥　他们的实证模型是 $E(r^p_t-r^f_t)=\alpha+\kappa E(c^p_t)+\lambda\beta^{net\,p}$. 这里, λ表示待估计的市场组合的无条件风险溢价, 不同于本文中 λ的含义. 上标 p表示某个投资组合, c^p_t表示投资组合 p的单位平均交易成本, $\beta^{net\,p}$表示考虑市场流动性风险后的净 beta. 详细说明请参考文献[6]385－405页.

⑦　因为不考虑时间条件因素, 所以略去时间下标.

κ的校准值是 0.035,而估计值为 0.062(t统计量为 2.433);投资组合和市场组合按等权重法构造进行稳健性回归检验时 κ的校准值是 0.046,而估计值为 0.062(t统计量为 3.878);投资组合和市场组合按市值权重法构造进行稳健性回归检验时 κ的校准值是 0.034,而估计值为 0.081(t统计量为 2.755);当按规模大小构造投资组合进行回归时 κ的校准值是 0.047,而估计值为 0.056(t统计量为 2.139);先按 B/M 大小对个股分组再在组内按规模分组后进行回归分析时 κ的校准值是 0.045,而估计值为 0.167(t统计量为 3.452). 这一现象 Acharya和 Pedersen不能解释,但能够在我们的模型中找到解答:κ校准值近似等于 λ的估计值,κ估计值实际上是对 $\lambda(1+\alpha)$之估计,所以估计值都大于校准值,这正是对 α和 λ共同影响流动性溢价命题的有力验证.

2) 本文的模型还能解释在文献综述中所提到的流动性风险溢价时变性现象[14,19],而经典CAPM以及 Acharya和 Pedersen的模型都解释不了该现象. Gibson和 Mougeot[14]用 S&P500股票的交易股数代理市场组合流动性指标,他们把市场组合流动性和市场组合回报率之间的协方差 $\sigma_{ML,t}$作为投资收益中的市场流动性风险,则其回归系数是市场流动性风险的单位价格. 结果发现,股市流动性风险单位价格的大小显著地跟随美国每月的经验衰退指数(Rec)⑧而变化. 但他们没有给出模型解释. 不难发现,他们的 $\sigma_{ML,t}$只不过把本文的 $\mathrm{cov}_{t,I=1}(r^j_{t+1}, c^M_{t+1})$中的个股回报率(即 r^j_{t+1})替换成了市场组合回报率(即 $r_{M,t}$),相应地反映了市场组合投资收益的流动性风险,所以与本文的流动性风险衡量方法和溢价含义是一致的. 众所周知,在经济衰退期投资者的流动性需求会趋于紧张,因此 Rec指数反映着投资者流动性需求的紧张程度. 所以,他们的实证发现正是本文的模型所预示的,而本文为他们提供了正式的模型分析.

Fujimoto和 Watanabe[19]也是在没有严格的理论模型下发现了时变性现象. 他们实证发现,在高波动率高换手率状态下,股票的流动性 β比较大,并且流动性风险溢价显著,而低波动率低换手率状态下的流动性 β则小,风险溢价也不显著. 本文的模型能够解释这一现象. 因为,高的波动率和换手率指标是被他们用以表示投资者对流动性的偏好程度比较强的代理指标,而且他们的流动性 β等价于这里的 $\mathrm{cov}_{t,I=1}(r^j_{t+1}, c^M_{t+1})$,因此,他们发现的是投资者在不同的流动性偏好下或者说不同的流动性紧张程度下所要求的风险溢价存在较大差异的现象. 所以,本文的模型也为他们的实证结果提供了理论根据.

3) 国内股票市场的实证文献支持本文的模型中关于内生流动性风险补偿的结论⑨. 除了上文已述的黄峰和杨朝军[16]所做的实证工作支持内生流动性风险影响资产定价,苏冬蔚和麦元勋[2]的实证分析也给出了类似的实证证据. 他们用换手率作为流动性指标,对我国沪深股市 1999年 1月到 2003年 7月之间股票回报率的回归分析显示,股票换手率越低即流动性水平越低则它的预期回报率越大,而且是以递增速度增大,也就是说,股票预期回报率中有流动性补偿,而且对流动性水平的补偿系数(即回归系数)是随着流动性水平的下降而增大的. 而股票流动性水平越低,股票的冲击成本弹性越大,所以苏冬蔚和麦元勋[2]的检验结果也是在说明,冲击成本弹性越大的股票将获得更高的对流动性水平的补偿系数,即他们所发现的我国沪深个股的流动性补偿效应为本文的模型结论提供了实证证据.

4 结 论

流动性和它的风险问题在经典的资产定价均衡模型中常被忽略掉,但现实中,流动性风险却是投资者,尤其是机构投资者,在市场交易中面临的主要风险之一. 在资产定价中理性投资者会要求

⑧ Rec指数是对未来半年内美国经济进入衰退期的概率估计,由美国 NBER提供.

⑨ 感谢匿名审稿人建议增加国内股市实证证据的宝贵意见.

相应的风险补偿. 本文给出流动性风险调整的资产定价模型, 指出流动性风险中不可分散的系统性部分才会影响到资产价格和预期回报率的大小, 同时也证明了投资者对预期流动性水平的溢价要求.

近几年涌现的实证文献验证了流动性风险溢价的显著性, 本文构建的模型框架能够帮助人们理解这些现象背后的定价机制. 在赞同 Acharya 和 Pedersen[6] 有关流动性风险溢价的基本观点之外, 与他们相比较, 内生流动性风险的引入使本文模型更符合证券交易市场普遍存在交易成本和交易头寸大小直接相关的特点. 本文发现, 当市场存在内生流动性风险时, 资产的价格冲击成本弹性将是预期回报率在资产之间存在差异的影响因素.

本文对现有流动性风险与资产定价研究文献的另一项补充是引入投资者的流动性需求状态和随机化投资者的证券持有期限. 认为, 投资者在流动性需求越紧张的时候对市场流动性的风险分散能力越看重, 对市场流动性越在乎, 因而风险溢价定得越高. 本文的模型较好地解释了被实证发现的流动性风险溢价的时变性现象.

参 考 文 献:

[1] Amihud Y, Mendelson H. Asset pricing and the bid-ask spread[J]. Journal of Financial Economics, 1986, 17(2): 223—249.

[2]苏冬蔚, 麦元勋. 流动性与资产定价: 基于我国股市资产换手率与预期收益的实证研究[J]. 经济研究, 2004, 39(2): 95—105.
Su Dong-wei, Mai Yuan-xun. Liquidity and asset pricing: An empirical exploration of turnover and expected returns on Chinese stock markets[J]. Economic Research Journal, 2004, 39(2): 95—105. (in Chinese)

[3] Chordia T, Roll R, Subrahmanyam A. Commonality in liquidity[J]. Journal of Financial Economics, 2000, 56(1): 3—28.

[4] Hasbrouck J, Seppi D. Common factors in prices, order flows and liquidity[J]. Journal of Financial Economics, 2001, 59(3): 383—411.

[5] Huberman G, Halka D. Systematic liquidity[J]. Journal of Financial Research, 2001, 24(2): 161—178.

[6] Acharya V V, Pedersen L H. Asset pricing with liquidity risk[J]. Journal of Financial Economics, 2005, 77(2): 375—410.

[7] Bangia D, Diebold F X, Schuermann T, et al. Modeling Liquidity Risk, with Implication for Traditional Market Risk Measurement and Management[R]. Working Paper, Wharton Financial Institutions Center, December 21, 1998.

[8] Pastor L, Stambaugh R F. Liquidity risk and expected stock returns[J]. Journal of Political Economy, 2003, 111(3): 642—685.

[9] Eckbo B E, Norli Ø. Pervasive Liquidity Risk[R]. Working Paper, Dartmouth College and University of Toronto, 2000.

[10] Wang A W. Institutional Equity Flows, Liquidity Risk and Asset Pricing[R]. Working Paper, University of California, Los Angeles, 2003.

[11] Sadka R. Liquidity Risk and Asset Pricing[R]. Working Paper, University of Washington, 2004.

[12] Avramov D, Chao J, Chordia T. Hedging Against Liquidity Risk and Short Sale Constraints[R]. Working Paper, University of Maryland, 2002.

[13]罗登跃, 王春峰, 房振明. 中国股市总流动性与资产定价关系实证研究[J]. 中国管理科学, 2007, 15(2): 33—38.
Luo Dengyue, Wang Chunfeng, Fang Zhenming. An empirical research on the relationship between aggregate liquidity and asset pricing in China stock market[J]. Chinese Journal of Management Science, 2007, 15(2): 33—38. (in Chinese)

[14] Gibson R, Mougeot N. The pricing of systematic liquidity risk: Empirical evidence from the US stock market[J]. Journal

of Banking and Finance, 2004, 28(1): 157—178.

[15]仲黎明, 刘海龙, 吴冲锋. 机构投资者的最优变现策略[J]. 管理科学学报, 2002, 5(5): 18—22.
Zhong Liming, Liu Hailong, Wu Chongfeng. Institution investors' optimal liquidation strategy[J]. Journal of Management Sciences in China, 2002, 5(5): 18—22. (in Chinese)

[16]黄 峰, 杨朝军. 流动性风险与股票定价: 来自我国股市的经验证据[J]. 管理世界, 2007, 5: 30—39.
Huang Feng, Yang Chaojun. Liquidity risk and stock pricing: Empirical evidence from Chinese stock markets[J]. Management World, 2007, 5: 30—39. (in Chinese)

[17] Huang M. Liquidity shocks and equilibrium liquidity premia[J]. Journal of Economic Theory, 2002, 109(1): 104—129.

[18] Lynch A W, Tan S. Explaining the Magnitude of Liquidity Premia: The Roles of Return Predictability, Wealth Shocks and State-Dependent Transaction Costs[R]. NBER Working Paper, No. 10994, 2004.

[19] Fujimoto A, Watanabe M. Time-Varying Liquidity Risk and Asset Pricing[R]. Working Paper, University of Alberta and Rice University, 2005.

[20] Holmstrom B, Tirole J. LAPM: A liquidity-based asset pricing model[J]. Journal of Finance, 2000, 56(5): 1837—1867.

[21] Chordia T, Subrahmanyam A, Anshuman V R. Trading activity and expected stock returns[J]. Journal of Financial Economics, 2001, 59(1): 3—32.

[22] Barra. Market Impact Model Handbook[M]. Berteley, California: Barra Inc., 1997.

Liquidity risk, liquidity demand of investors and asset pricing

ZOU Xiao-peng[1], *HUANG Feng*[2], *YANG Chao-jun*[3]

1. College of Economics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China;
2. Risk Management Department of China Zheshang Bank, Hangzhou 310006, China;
3. Antai College of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China

Abstract: In asset pricing theories, the theoretical significance of market liquidity risk premium is a hot topic. This paper decomposes market liquidity risk into exogenous and endogenous liquidity risk, introduces liquidity demand as a state variable giving rise to the random holding horizon, and develops a liquidity risk-adjusted capital asset pricing model. Besides agreeing with the previous theoretical literatures on the effect of exogenous liquidity risk on asset pricing, we find that different elasticity values of price impact can make a cross-sectional dispersion in required return for the level of liquidity and market liquidity risk. The state variable of liquidity demand affects market liquidity risk premium increasingly, and could induce the known time-varying phenomenon of liquidity risk premium.

Key words: liquidity risk; liquidity demand; asset pricing

附录:

命题 1的证明:

因为投资者的效用函数为二次函数, 所以随机折现因子 m_{t+1} 等于

$$m_{t+1} = \rho\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} = \rho\frac{(\bar{C} - C_{t+1})}{(\bar{C} - C_t)} \qquad (A.1)$$

因为投资者是同质的, 所以代表性投资者的投资组合就是市场组合, 而投资者的第二期消费水平则由市场

组合的净回报所决定. 重新整理式(1)中对 $t+1$期消费的约束条件而有

$$C_{t+1} = (r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1})(e_t - C_t) \tag{A.2}$$

所以,得到随机折现因子和市场组合净回报率之间的线性关系

$$m_{t+1} = a_t + b_t(r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1}) \tag{A.3}$$

其中 $a_t = \rho\bar{C}/(\bar{C} - C_t)$, $b_t = -\rho(e_t - C_t)/(\bar{C} - C_t)$.

由式(A.3)的结果,式(3)化为资产回报率 r^i_{t+1} 的关系式

$$\begin{aligned} 1 = E_t((a_t + b_t(r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1}))\times \\ (r^j_{t+1} - I_{t+1}c^j_{t+1} - I_{t+1}c^j_{t+1}\alpha^j)) \end{aligned} \tag{A.4}$$

这里的证券 j是资产市场里任意的证券, 因此, 在一个理性的市场中投资者对任何证券的定价都会满足上式. 无风险资产 r^f 和市场组合 r^M_{t+1} 自然也满足上式, 利用这一事实通过(A.4)关于 r^f和 r^M_{t+1}的联立方程组可把参数 a_t和 b_t 确定下来

$$a_t = \frac{1}{r^f} - b_t E_t(r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1})$$

$$b_t = \frac{-1}{r^f}\frac{E_t((r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1})(1+\alpha^M) - r^f)}{\mathrm{cov}_t(r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1},\ r^M_{t+1} - (1+\alpha^M)I_{t+1}c^M_{t+1})} \tag{A.5}$$

把式(A.5)代入式(A.4)替换掉 a_t和 b_t, 最终得到命题 1的结果. 证毕.

引理 1的证明:

由消费的非饱和性条件, 有 $(\bar{C} - C_t) > 0$, 所以由 b_t 的定义得

$$b_t < 0$$

又, r^f 大于零, 所以由式(A.5)中关于 b_t 的等式可知

$$\bar{\mu}_t = \frac{\bar{R}_t}{\mathrm{cov}_t(r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1},\ r^M_{t+1} - (1+\alpha^M)I_{t+1}c^M_{t+1})} = \frac{E_t(r^M_{t+1} - (1+\alpha^M)I_{t+1}c^M_{t+1} - r^f)}{\mathrm{cov}_t(r^M_{t+1} - I_{t+1}c^M_{t+1},\ r^M_{t+1} - (1+\alpha^M)I_{t+1}c^M_{t+1})} > 0$$

证毕.

(上接第 124页)

$$p(\sigma_i^2) \sim IG(b_i, B_i)$$

其中 IG表示 Inverse Gamma distribution. 再假定先验分布之间相互独立. $(\gamma, \sigma_i^2: i = 1, 2, \dots, m)$的后验联合分布为

$$p(\gamma)\prod_{i=1}^{m}p(\sigma_i^2) \times \prod_{i=1}^{m}(\sigma_i^2)^{-T_i/2} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}[(XR_t - X_t\gamma)'\Omega^{-1}(XR_t - X_t\gamma)]\right\}$$

γ的后验分布为

$$h(\gamma) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma - \gamma_0)'B_0(\gamma - \gamma_0)\right) \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\gamma'\sum_{t=1}^{T}X_t'\Omega^{-1}X_t\gamma - 2\gamma'\sum_{t=1}^{T}X_t'\Omega^{-1}XR_t\right)\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2}[(\gamma - \hat{\gamma})'B_n(\gamma - \hat{\gamma})]\right]$$

其中

$$B_n = B_0 + \sum_{t=1}^{T}X_t'\Omega^{-1}X_t$$

$$\hat{\gamma} = B_n^{-1}(B_0\beta_0 + \sum_{t=1}^{T}X_t'\Omega^{-1}XR_t)$$

γ的后验分布仍是正态分布, 具体形式为

$$\gamma \mid XR_t, X_t, \sigma_i^2 \sim N(\hat{\gamma}, B_n^{-1})$$

再来看 σ_i^2 的后验分布. 其先验密度函数为

$$p(\sigma_i^2) \propto \left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{b_i+1}\exp(-B_i/\sigma_i^2)$$

后验密度函数为

$$\begin{aligned} h(\sigma_i^2) &\propto \left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{b_i+1}\exp\left(-\frac{B_i}{\sigma_i^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{T_i/2} \times \\ &\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}\sum_{t=t_i}^{t_i+T_i-1}[(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma)'(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma)]\right\} \\ &\propto \left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{b_i+T_i/2+1}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_i^2}\left[B_i + \frac{1}{2}\sum_{t=t_i}^{t_i+T_i-1}[(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma)'(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma)]\right]\right\} \sim IG(b_i + T_i/2, B_i + \\ &\frac{1}{2}\sum_{t=t_i}^{t_i+T_i-1}(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma)'(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma)) \end{aligned}$$

其中 t_i表示第 i个债券的样本开始时间, T_i 是第 i个债券的样本区间的大小 $(T_i \leqslant T)$. 因此 σ_i^2 的后验分布仍是 Inverse Gamma distribution, 两个参数分别是 $b_i + T_i/2$和

$$B_i + \frac{1}{2}\sum_{t=t_i}^{t_i+T_i-1}(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma)'(XR_t^{(i)} - X_t^{(i)}\gamma).$$

有了后验分布, 就可以按标准的MCMC方法对参数进行估计.