

分形布朗运动下最优投保和消费策略^①

张卫国, 肖炜麟, 张惜丽

(华南理工大学工商管理学院, 广州 510640)

摘要: 基于 Merton 的最优消费和投资组合模型, 通过假设风险资产的价格变化服从几何分形布朗运动, 探讨了一类具有人寿保险的最优投资消费问题. 首先根据投资者在整个生命周期的消费和投保效用期望值最大的原则, 利用贝尔曼动态规划原理, 建立了最优投保和消费策略模型. 然后在给定消费和遗赠评价效用函数的情况下, 给出了最优投保和消费的闭式解, 并获得了最优投资组合受模型参数变化影响的一些重要性质. 最后, 通过数值例子讨论了时间间隔、赫斯特指数变化时最优投保和最大期望效用的变化趋势.

关键词: 分形布朗运动; 赫斯特指数; 效用函数; 投资组合和消费; 人寿保险

中图分类号: F830.59 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)01-0078-07

0 引言

最优投资消费问题是经济活动中一种普遍而又重要的问题. Merton^[1]提出了经典的最优投资消费模型, 并采用随机控制理论对投资消费问题的最优策略进行了研究, 给出了闭式解. Duffie 等^[2]在 Merton 模型的基础上, 考虑了投资者具有随机收入情况下的最优消费和证券选择问题. Jean^[3]利用随机动态规划的方法, 研究了投资者在借入资金具有约束条件下的最优消费与投资问题. Yong^[4]通过鞅方法得到了消费趋势下降情况下无限期限的最优消费与投资问题, 并求出了闭式解. Kumar^[5]在最大化消费折扣效用函数的原则下, 考虑买(卖)证券具有比例交易费用情况时的最优投资与消费策略. 刘海龙和吴冲锋^[6]在证券收益存在有界不确定干扰和考虑交易费用的情况下, 推导出最差情况下的最优消费和投资策略. 杨瑞成和刘坤会^[7]研究了随机跳跃过程下的最优消费与证券选择问题. 臧宝锋等^[8]通过设计仿真优化算法分析了双重随机不确定因素对容量扩

展项目最优投资时机选择的影响.

以上的研究都是在风险资产价格的变化过程服从几何布朗运动下进行的. 然而, 国内外学者对资本市场的大量实证研究表明金融资产的收益率经常呈现出“有偏”、“尖峰厚尾”的分布, 并且金融资产价格之间存在着长期相关性, 例如: 黄德龙和杨晓光^[9], 张维等^[10], 杨宏林等^[11], 胡艳梅等^[12], Lo 和 MacKinlay^[13]及 Lo^[14]等. 传统的投资选择模型已经无法描述这些现象, 也无法适应现代投资者的需要, 急需新的修正模型和量化方法. Peters^[15]和 Mandelbrot^[16]提出分形市场假说, 指出分形布朗运动能够很好地解释资本市场尖峰厚尾、长期相关性等现象. Hu 等^[17]在假定风险资产变化过程服从分形布朗运动下, 证明了分形 Black-Scholes 市场是一个无套利的完备市场, 并给出最优投资消费模型. 曹宏铎^[18]以中国深市为研究对象进行实证研究, 研究表明中国证券市场存在相关性, 表现为分形时间序列, 其行为服从分数布朗运动, 并给出了根据赫斯特指数 H 的投资决策步骤和策略. 魏宇和黄登仕^[19, 20]采用实证的

① 收稿日期: 2007-09-13; 修订日期: 2009-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70825005); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(06-0749); 教育部人文社会科学研究规划基金项目(07JA630048).

作者简介: 张卫国(1963—), 男, 陕西安康人, 博士, 教授. E-mail: wzhang@scut.edu.cn

方法论证了中国金融市场具有多标度分形特征。

随着人们生活水平的提高, 众多投资者开始购买人寿保险, 各种险种也孕育而生。为了更好地反映现实情况, 丁传明和邹捷中^[21]在假设风险资产价格的变化过程服从几何布朗运动下研究了个人投资者如何决定最优的证券组合、消费和购买人寿保险, 使其期望效用最大化问题。不同于以前的最优投资、保险及消费问题研究, 本文假设风险资产价格变化过程服从分形布朗运动, 基于生命周期的消费效用和理赔所产生的遗赠效用期望值函数最大化原则, 建立了分形布朗运动下的最优投保和消费模型, 所得模型更具有一般性。在给定效用函数的基础上, 利用贝尔曼动态规划原理得到了相应的最优投资、保险及消费策略。进一步获得了最优投资组合受赫斯特指数、时间间隔、风险资产收益率、波动率及利率变化影响的一些重要性质。最后提供的数值例子说明了时间间隔 Δt 赫斯特指数 H 变化时最优投资策略和效用期望值的变化趋势。

1 模型建立

由于金融系统是一个自由度极大的复杂系统, 投资者一方面寻求规避风险策略, 另一方面为了得到高额利润而承担风险。同时投资者不是在接受信息时立刻做出反映, 而是在信息达到一定临界值时才做出决策。从而造成了收益率的“有偏”, “尖峰厚尾”和“长期相关性”等现象。风险资产(股票)价格行为模式常用几何布朗运动或跳跃扩散过程来刻画, 然而它们都无法解释金融资产收益率分布的尖峰厚尾、长期相关等现象。由于分形布朗运动是一种高斯过程, 其性质主要有加法不变性、自相似性、厚尾性、不连续性、长期相关性、无特征长度、精细结构等, 这些性质是股价行为均具备的特征, 从而使得分形布朗运动成为刻画金融风险资产价格变化过程的良好工具。下面采用分形布朗运动来刻画风险资产(股票)价格的行为变化, 使模型更一般化和更能够精确描述股价行为的上述特征。

定义 t 时刻风险资产(股票)价格 S_t 的变化过程遵循分形布朗过程, 用 ΔS 表示 Δt 时间内变化量, 则有下面结论。

引理 1 设 $B_H = \{B_H(t, \omega), t > 0\}$ 表示分形布朗运动且 ΔB_H 表示 Δt 时间内变化量, 则有^[15]

$$\Delta B_H = \varepsilon(\Delta t)^H$$

其中, $\varepsilon \sim N(0, 1)$, H 是赫斯特指数且 $0 < H < 1$,

特别当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 就是普通的布朗运动。

为了方便使用分形布朗运动研究风险资产价格变化过程, 首先对金融投资市场做以下三点假设:

1) 市场是无摩擦的, 即不考虑税收、交易费用且风险资产(股票)不支付红利。

2) 市场中存在两种资产可供投资者选择, 一种为利率 $r(r > 0)$ 的无风险资产(银行存款), $t(t \geq 0)$ 时刻的价格 P_t 满足 $\Delta P_t = e^{r\Delta t}P_t - P_t = r\Delta P_t + o(\Delta t)$, 即

$$dP_t = rP_t dt \quad (1)$$

另一种是风险资产(股票), $t(t \geq 0)$ 时刻的价格 S_t 服从分形布朗运动, 其微分形式为

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_H(t)) \quad (2)$$

其中, $B_H = \{B_H(t, \omega), t > 0\}$ 为概率空间 (Ω, F^H, P_H) 上的分形布朗运动; μ 为收益率期望, 且满足 $\mu > r$; σ 为股价波动率; H 为 Hurst 指数。

3) 死亡事件是一个独立的泊松过程^[21], 即投资者在 t 时刻决策是否为 t 时刻死亡购买人寿保险。若 t 时刻未死亡, 则投资者付出保费, 得到 Q 。若投资者死亡, 则投资者将获得理赔的收入, 作为遗产留给后人。

记投资者在 t 时刻的财富为 W_t , 消费过程为 C_t , 人寿保险投入的保费为 Q_t , 理赔金额为 I_t 。由于假设投资者在某时刻死亡的事件是参数为 λ 的泊松过程, 并且死亡时间 τ 是死亡事件的第一次发生, 所以投资者的死亡事件是一个服从参数为 λ 的指数分布的随机变量。根据文献[21], 合理保费与索赔额之间的关系为 $Q_t = \lambda W_t$ 。投资于风险资产(股票)的比例为 $\pi_t \in [0, 1]$, 即风险资产 $S_t = \pi_t W_t$, 无风险资产 $P_t = (1 - \pi_t)W_t$, 则投资者财富变化过程为 $dW_t = dS_t + dP_t - dC_t - dQ_t$, 即服从下面随机微分方程

$$dW_t = (\pi_t W_t(\mu - r) + rW_t - C_t - Q_t) dt + \pi_t W_t \sigma dB_H(t)$$

由引理 1 知, $dW_t = (\pi_t W_t(\mu - r) + rW_t - C_t - Q_t) dt + \pi_t W_t \sigma \varepsilon(dt)^H$, 初始时刻 $t(t \geq 0)$ 财富 $W_t = W_0 \geq 0$

投资者的目的是在全体可容许策略 $\Sigma = \{(\pi_b, C_b, I_t)\}$ 中选择最优投资保险和消费策略, 使整个生命周期的效用期望值函数最大, 即

$$J(W_b, t) = \max_{\{\pi_b, C_b, I_t\}} E_t \left\{ \int_t^{\tau} U(C_s) ds + B(I_t + W_{\tau}) \right\} \quad (3)$$

其中: E_t 表示数学期望; τ 为投资者不确定的死亡时间; $U(\cdot)$ 和 $B(\cdot)$ 分别表示消费和遗赠评价效用函数.

根据文献 [21] 命题的结论知, 式 (3) 可以表示为

$$J(W_b, t) = \max_{\{\pi_b, C_b, I_t\}} E_t \left\{ \int_t^{\infty} e^{-\lambda(s-t)} [U(C_s) + \lambda B(I_s + W_s)] ds \right\} \quad (4)$$

由式 (4) 得到 $J(W_b, t) = \max E \{ e^{-\lambda(s-t)} [U(C_s) + \lambda B(I_s + W_s)] \}$. 同时由于

$$J(W_t + \Delta W, t + \Delta t) = J(W_t, t) + J'_W (\pi_t W_t (\mu - r) + rW_t - C_t - Q_t) \Delta t + J'_W \pi_t W_t \sigma \Delta B_H + J'_I \Delta H - \frac{1}{2} J''_{WW} (\pi_t W_t \sigma \Delta B_H)^2 + o(\Delta t)$$

式中 J'_I 表示 $\frac{\partial J(W_b, t)}{\partial I_t}$, J'_W 表示 $\frac{\partial J(W_b, t)}{\partial W_t}$, J''_{WW} 表示 $\frac{\partial^2 J(W_b, t)}{\partial W_t^2}$ (以下同), 因此有

$$0 = \max \{ e^{-\lambda(s-t)} [U(C_t) + \lambda B(I_t + W_t)] + J'_W (\pi_t W_t (\mu - r) + rW_t - C_t - Q_t) + J'_I + J'_W \pi_t W_t \sigma (\Delta t)^{H-1} + \frac{1}{2} J''_{WW} (\pi_t W_t \sigma)^2 (\Delta t)^{2H-1} \} \quad (5)$$

为简化表达, 令

$$\Phi(\pi_b, C_b, I_t; W_b, t) = e^{-\lambda(s-t)} [U(C_t) + \lambda B(I_t + W_t)] + J'_W (\pi_t W_t (\mu - r) + rW_t - C_t - Q_t) + J'_I + J'_W \pi_t W_t \sigma (\Delta t)^{H-1} + \frac{1}{2} J''_{WW} (\pi_t W_t \sigma)^2 (\Delta t)^{2H-1}$$

则结合约束条件可知, 最优投保和消费策略 (π_t^*, C_t^*, I_t^*) 由下面方程组确定

$$\begin{cases} \Phi(\pi_t^*, C_t^*, I_t^*; W_b, t) = 0 \\ \Phi_{\pi_t}(\pi_t^*, C_t^*, I_t^*; W_b, t) = 0 \\ \Phi_{C_t}(\pi_t^*, C_t^*, I_t^*; W_b, t) = 0 \\ \Phi_{I_t}(\pi_t^*, C_t^*, I_t^*; W_b, t) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

2 最优投保和消费策略及性质

一般来说, 求解 (6) 是比较困难, 但若能把控制

变量表示为状态变量的线性函数, 也就是说只要给定的效用函数为常相对风险厌恶形式^[1] (单增的凹函数) 时, 总可以通过待定系数法得到 (6) 的最优解, 也就是获得最优投保和消费策略. 假设消费和遗赠评价的效用函数均为 CRRA 效应函数, 则有下面结论.

定理 1 假设消费和遗赠评价的效用函数均为 CRRA 类型, 即 $U(C_t) = \frac{C_t^\theta}{\theta}$ 且 $B(I_t + W_t) =$

$\frac{(I_t + W_t)^\theta}{\theta}$, $0 < \theta < 1$ 则模型 (6) 的最优解为

$$\begin{cases} C_t^* = W_t \frac{\lambda - \theta(r + \lambda) + \frac{\theta(\mu - r)^2}{2(\theta - 1)\sigma^2(\Delta t)^{2H-1}}}{(1 + \lambda)(1 - \theta)} \\ I_t^* = W_t \frac{\lambda - (1 + \lambda)(1 - \theta) - \theta(r + \lambda) + \frac{\theta(\mu - r)^2}{2(\theta - 1)\sigma^2(\Delta t)^{2H-1}}}{(1 + \lambda)(1 - \theta)} \\ \pi_t^* = \frac{\mu - r}{(1 - \theta)\sigma^2(\Delta t)^{2H-1}} \end{cases} \quad (7)$$

证明见附录.

在假设风险资产服从几何布朗运动的消费和投资模型中, 风险资产的最优投资比例未体现风险资产的突变风险. 由于赫斯特指数越高, 表示该类风险资产的噪声越少, 具有更强的持久性和更清楚的变化趋势. 下面讨论在假设风险资产服从分形布朗运动的投保和消费模型中, 风险资产最优投资比例受赫斯特指数、时间间隔、风险资产收益率、波动率及利率等模型参数变化影响的重要性质.

性质 1 风险资产的最优投资比例 π_t^* 是赫斯特指数 H 的增函数.

证明 由假设 $\mu > r$ 且 $\ln(\Delta t) < 0$ 根据式 (7), 可得 $\frac{\partial \pi_t^*}{\partial H} = \frac{2(r - \mu) \ln(\Delta t)}{(\theta - 1)\sigma^2} (\Delta t)^{-2H+1} > 0$ 从而 π_t^* 是赫斯特指数 H 的增函数.

性质 1 说明投资者投资于风险资产的比例随着风险资产的不确定性的减少而增加. 这就是说只要能够减少风险资产的不确定性, 投资者将加大对风险资产的投资.

性质 2 在效用函数满足等弹性边际效用情形下, 最优投资组合比例 π_t^* 是常数且与投资者的财富拥有量 W_t 无关.

证明 根据式 (7) 中 π_t^* 的表达式, 结论是

显然的.

性质 2 说明在等弹性边际效用函数的情形下, 投资组合选择与最优消费决策无关, 此时的投资组合选择是一个严格的静态问题与未来投资机会无关. 这实际上是效用函数的常相对风险厌恶特征的一种体现.

性质 3 风险资产的最优投资比例 π_t^* 是 μ 的增函数, 分别是 r 以及 σ^2 的减函数.

证明 根据假设条件 $0 < \theta < 1$ 和 $\mu > r$, 容易得到式 (7) 确定的 π_t^* 满足

$$\frac{\partial \pi_t^*}{\partial \mu} > 0 \quad \frac{\partial \pi_t^*}{\partial r} < 0 \quad \frac{\partial \pi_t^*}{\partial \sigma^2} < 0. \text{ 结论显然}$$

成立.

性质 3 说明投资于风险资产的比重随着其预期收益率的增大而增加, 随着无风险利率和风险资产的波动率增大而减少. 这正是投资者调整风险资产投资比重的依据.

性质 4 如果赫斯特指数 $H < \frac{1}{2}$, 那么风险资产的最优投资比例 π_t^* 是时间间隔 Δt 的增函数. 如果赫斯特指数 $H \geq \frac{1}{2}$, 那么风险资产的最优投资比例 π_t^* 是时间间隔 Δt 的减函数.

证明 根据式 (7), 有

$$\frac{\partial \pi_t^*}{\partial \Delta t} = \frac{\mu - r}{(1 - \theta)\sigma^2} (1 - H) (\Delta t)^{-2H}$$

由假设条件 $0 < \theta < 1$ 和 $\mu > r$, 如果 $H < \frac{1}{2}$,

那么 $\frac{\partial \pi_t^*}{\partial \Delta t} > 0$

如果 $H \geq \frac{1}{2}$, 那么 $\frac{\partial \pi_t^*}{\partial \Delta t} \leq 0$ 结论显然成立.

性质 4 说明如果赫斯特指数 $H < \frac{1}{2}$ 那么风险资产的最优投资比例随着时间间隔的增大而增加; 如果赫斯特指数 $H \geq \frac{1}{2}$, 那么风险资产的最优投资比例随着时间间隔的增大而减少.

3 数值算例

假设银行存款收益率 $r = 0.02$, 泊松分布参数 $\lambda = 0.379$. 如果投资者从现在 ($t = 0$) 开始, 其

初始财富 $W_0 = 10$ 万元, 相对风险厌恶参数 $\theta = 0.4$, 风险资产的预期收益率 $\mu = 0.1$, 波动率标准差 $\sigma = 0.4$. 为了体现分形布朗运动和人寿保险对投资决策的影响, 下面从三种情况进行分析讨论. 首先固定赫斯特指数 H 值, 探讨 Δt 变化时效用期望值的变化情况. 然后, 让 Δt 固定, 研究赫斯特指数 H 变化时最优投资策略和效用期望值的变化情况. 最后, 分析赫斯特指数 H 和 Δt 同时变化的情形下效用期望值的变化趋势.

算例 1 假定 Hurs 指数 $H = 0.58$. 如果 $\Delta t = 0.01$, 利用 Matlab 软件求得 $\pi_t = 0.713146$, 初始消费量为 3.1868 万元, 买人寿保险的投保费用为 0.0998 万元, 投资于股票的初始量为 4.7876 万元, 购买银行债券的初始量为 1.9258 万元, 整个生命周期的消费效用的最大期望值为 3.747 元. 如果 $\Delta t = 0.3$ 利用 Matlab 软件可以得出 $\pi_t = 0.413847$, 初始消费量为 3.1468 万元, 人寿保险的投保费用为 0.0511 万元, 投资于股票的初始量为 2.815 万元, 购买银行债券的初始量为 3.987 万元, 整个生命周期的消费效用的最大期望值为 3.735 元. 而且通过计算可知最优初始投资风险资产的比例以及生命周期的效用最大期望值都随着 Δt 的增大而减少. 图 1 给出了 $H = 0.58$ 且 $\Delta t \in [0.01, 0.40]$ 时, 生命周期的效用最大期望值的变化趋势图.

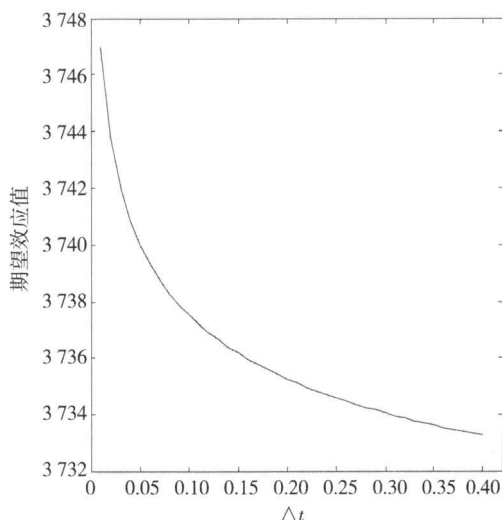


图 1 期望效用值随时间间隔变化趋势图

Fig. 1 Valuation of maximal utility expectation with varying time interval

算例 2 假定 $\Delta t = 0.3$. 表 1 给出了 Hurs 指数 H 从 0.58 变化到 0.77 时最优初始投资策略以及生命周期消费效用的最大期望值.

表 1 最优初始投资策略、最大效用和赫斯特指数的关系 (单位: 元)

Table 1 Relationship of optimal initial investment strategy, maximal utility and Hurst exponent (unit: RM B)

H	C_t	I_t	π_t	$J(W_t, t)$	H	C_t	I_t	π_t	$J(W_t, t)$
0.58	31 468	511	0.414	3 735.27	0.68	31 619	694	0.527	3 742.51
0.59	31 482	527	0.424	3 735.89	0.69	31 636	715	0.539	3 743.37
0.60	31 496	544	0.434	3 736.54	0.70	31 653	736	0.552	3 744.26
0.61	31 510	561	0.445	3 737.20	0.71	31 671	758	0.566	3 745.17
0.62	31 524	579	0.456	3 737.89	0.72	31 690	781	0.580	3 746.12
0.63	31 539	597	0.467	3 738.60	0.73	31 709	804	0.594	3 747.09
0.64	31 554	615	0.478	3 739.33	0.74	31 728	827	0.608	3 748.10
0.65	31 570	634	0.490	3 740.09	0.75	31 748	851	0.623	3 749.14
0.66	31 586	654	0.502	3 740.87	0.76	31 768	876	0.638	3 750.21
0.67	31 602	674	0.514	3 741.68	0.77	31 789	902	0.654	3 751.32

表 1 表明, 当银行利率、风险资产的预期收益率和波动率一定时, 初始最优消费量、投保量、投资于风险资产的比重都随着 Hurst 指数的递增而增大. 这是由于 Hurst 指数越大, 风险资产的噪声越少, 投资者对风险资产的走势越有把握, 从而可以根据自己现有财富加大对风险资产的投入, 以期获得较大的消费和投保效用期望值. 实际上, 利用动态规划原理, 可以把任意时刻当作初始时刻, 从而求出任意时刻的最优投资策略及相应的最大消费投保效用期望值.

算例 3 假设 Δt 和 Hurst 参数的变化范围为 $\Delta t \in [0.01, 0.60]$ 且 $H \in [0.58, 0.93]$. 采用公式 (7) 的最优解, 结合期望效用值函数的定义, 求得赫斯特指数和时间间隔同时变化时, 期望效用值的变化趋势如下图所示.

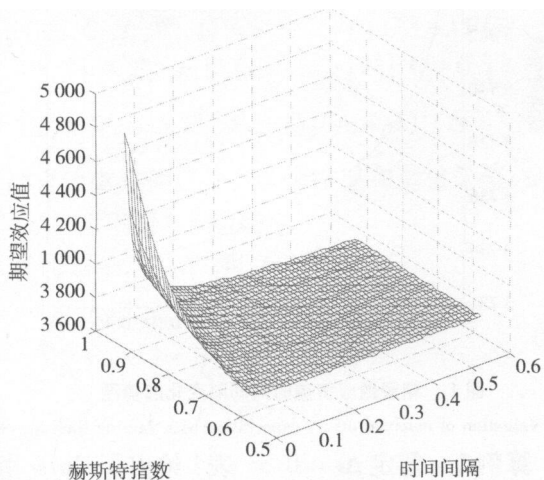


图 2 期望效用值随时间间隔和赫斯特指数变化趋势图

Fig. 2 Valuation of maximal utility expectation with varying time interval and Hurst exponent

4 结 论

为了能够很好地解释资本市场尖峰厚尾、长期相关性等现象, 本文通过假设风险资产的价格变化过程服从分形布朗运动, 构造了基于分形布朗运动的最优消费和投保模型. 在给定消费和遗赠评价的效用函数均为 CRRA 函数的情况下, 求出了任意时刻的最优投保和消费策略. 通过理论分析和数值算例说明了赫斯特指数、时间间隔对最优投资、保险、消费策略和期望效用有着显著的影响. 反映了投资者在风险资产价格变动信息充分的情况下, 更愿意投资风险资产, 以期获得最大期望效用的现实.

附录: 定理 1 的证明

由文献 [21] 命题的结论, 消除式 (3) 对时间的依赖性后也可以表示为

$$V(W_t) = J(W_t, t) = \max_{\pi_t, C_t, I_t} E \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [U(C_t) + \lambda B(I_t + W_t)] dt \right\}$$

则有

$$\begin{aligned} \lambda V(W_t) = & \max \{ U(C_t) + \lambda B(I_t + W_t) + \\ & V'(W_t) (\pi_t W_t (\mu - r) + \lambda W_t - C_t - \lambda I_t) + \\ & \frac{1}{2} V''(W_t) (\pi_t W_t \sigma)^2 (\Delta t)^{\beta-1} \} \end{aligned}$$

由最优性条件可得

$$\begin{cases} C_t^{0-1} - V'(W_t) = 0 \\ (I_t + W_t)^{0-1} - V'(W_t) = 0 \\ V'(W_t)W_t(\mu - r) + V''(W_t)\pi_t(W_t\sigma)^2(\Delta t)^{\theta-1} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

从而有 $C_t^* = (V'(W_t))^{\frac{1}{\theta-1}}$, $I_t^* = (V'(W_t))^{\frac{1}{\theta-1}} - W_t$,

$$W_t, \pi_t^* = \frac{V'(W_t)W_t(r - \mu)}{V''(W_t)(W_t\sigma)^2(\Delta t)^{\theta-1}}$$

将 C_t^* 、 I_t^* 和 π_t^* 的值代入, 则有

$$\begin{aligned} \lambda V(W_t) &= (1 + \lambda)(V'(W_t))^{\frac{\theta}{\theta-1}} \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right) + \\ &(r + \lambda)W_t V'(W_t) - \frac{(V'(W_t))^2(\mu - r)^2}{2V''(W_t)\sigma^2(\Delta t)^{\theta-1}} \end{aligned} \quad (9)$$

式 (9) 为二阶微分方程, 用待定系数法可求解. 假设方程的解为 $V(W_t) = AW_t^\theta$, 其中 A 待定. 则有 $V' = A\theta W_t^{\theta-1}$, $V'' = A\theta(\theta-1)W_t^{\theta-2}$. 将 V' 和 V'' 代入式 (9) 得

$$A = \frac{1}{\theta} \frac{\left[\lambda - \theta(r + \lambda) + \frac{\theta(\mu - r)^2}{2(\theta-1)\sigma^2(\Delta t)^{\theta-1}} \right]^{\theta-1}}{\Gamma(1 + \lambda)(1 - \theta)j^{\theta-1}}$$

将 A 的值代入 $V(W_t) = AW_t^\theta$ 中, 可得

$$V(W_t) = \frac{1}{\theta} \times \frac{\left[\lambda - \theta(r + \lambda) + \frac{\theta(\mu - r)^2}{2(\theta-1)\sigma^2(\Delta t)^{\theta-1}} \right]^{\theta-1}}{\Gamma(1 + \lambda)(1 - \theta)j^{\theta-1}} W_t^\theta$$

根据上式, 求得 $V'(W_t)$ 和 $V''(W_t)$, 并代入式 (8), 从而可得相应的最优解式 (7).

参考文献:

- [1] Merton R C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4): 373—413.
- [2] Duffie D, Fleming W, Soner M, et al. Hedging in incomplete markets with HARA utility[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997, 21(4—5): 753—782.
- [3] Vila J L. Optimal consumption and portfolio choice with borrowing constraints[J]. Journal of Economic Theory, 1997, 77: 402—431.
- [4] Shin Y H, Lin B H, Choi U J. Optimal consumption and portfolio selection problem with downside consumption constraints [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188(2): 1801—1811.
- [5] Muthuraman K. A computational scheme for optimal investment consumption with proportional transaction costs[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2007, 31(4): 1132—1159.
- [6] 刘海龙, 吴冲锋. 基于最差情况的最优消费和投资策略[J]. 管理科学学报, 2001, 4(6): 48—54.
Liu Hailong, Wu Chongfeng. Optimal consumption and investment strategy based on worst case[J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(6): 48—54 (in Chinese).
- [7] 杨瑞成, 刘坤会. 随机跳跃幅度的最优消费与证券选择策略问题[J]. 管理科学学报, 2005, 8(6): 83—87.
Yang Ruicheng, Liu Kunhui. Optimal strategies on consumption and portfolio problem with stochastic jump range[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(6): 83—87. (in Chinese).
- [8] 臧宝锋, 胡汉辉, 庄伟钢. 双重随机不确定条件下的一次性容量扩展投资[J]. 管理科学学报, 2007, 10(3): 37—43.
Zang Baofeng, Hu Hanhui, Zhuang Weigang. Lumpy capacity expansion investment decision under bistochastic uncertainties [J]. Journal of Management Sciences in China, 2007, 10(3): 37—43 (in Chinese).
- [9] 黄德龙, 杨晓光. 中国证券市场股指收益分布的实证分析[J]. 管理科学学报, 2008, 11(1): 68—77.
Huang Delong, Yang Xiaoguang. Empirical study on distributions of stock index returns in China's securities market[J]. Journal of Management Sciences in China, 2008, 11(1): 68—77. (in Chinese).
- [10] 张维, 张小涛, 熊熊. 上海股票市场波动不对称性研究——GJR与VS-GARCH模型的比较[J]. 数理统计与管理, 2005, 24(6): 96—102.
Zhang Wei, Zhang Xiaotao, Xiong Xiong. Research on asymmetry of volatility of Shanghai stock market—Comparison of GJR- and VS-GARCH[J]. Application of Statistics and Management, 2005, 24(6): 96—102 (in Chinese).

- [11] 杨宏林, 陈 收, 袁际军. 多标度条件下的幂相关性: 中国股市收益率的经验分析 [J]. 管理学报, 2007, 4(5): 618—621
Yang Honglin, Chen Shou, Yuan Jijun. Stock market's power correlation properties in China under condition of multiscale [J]. Chinese Journal of Management, 2007, 4(5): 618—621. (in Chinese)
- [12] 胡艳梅, 张卫国, 陈建忠. 中国股市长记忆的修正 R/S 分析 [J]. 数理统计与管理, 2006, 25(1): 96—102
Hu Yanmei, Zhang Weiguang, Chen Jianzhong. Modified R/S analysis of long memory property in China stock market [J]. Application of Statistics and Management, 2006, 25(1): 73—77. (in Chinese)
- [13] Lo A W, MacKinlay A C. Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test [J]. Review of Financial Studies, 1988, 1: 41—66
- [14] Lo A W. Long-term memory in stock market prices [J]. Econometrica, 1991, 59(5): 1279—1313
- [15] Peters E. Fractal structure in the capital markets [J]. Financial Analysts Journal, 1989, 7: 434—453
- [16] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1982
- [17] Hu Y, Øksendal B, Sulem A. Optimal consumption and portfolio in a Black-Scholes market driven by fractional Brownian motion [J]. Infinite Dim. Anal. Quantum Probab. Related Topics, 2003, 6(4): 519—536
- [18] 曹宏铎. 证券市场复杂行为分形标度分析与机会决策研究 [J]. 金融研究, 2005, 29(5): 138—145
Cao Hongduo. The analysis of complex behavior fractal index and research on investment decision [J]. Journal of Finance, 2005, 29(5): 138—145. (in Chinese)
- [19] 魏 宇, 黄登仕. 金融市场多标度分形现象及与风险管理的关系 [J]. 管理科学学报, 2003, 6(1): 87—91
Wei Yu, Huang Dengshi. Multifractal phenomenon and financial risk management [J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(1): 87—91. (in Chinese)
- [20] 魏 宇, 黄登仕. 基于多标度分形理论的金融风险测度指标研究 [J]. 管理科学学报, 2005, 8(4): 50—59
Wei Yu, Huang Dengshi. Study on financial risk measure based on multifractal theory [J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(4): 50—59. (in Chinese)
- [21] 丁传明, 邹捷中. 考虑人寿保险的最优金融决策 [J]. 系统工程, 2003, 21(5): 84—87
Ding Chuaming, Zou Jiezhong. A study on optimal financial choices considering life insurance [J]. Systems Engineering, 2003, 21(5): 84—87. (in Chinese)

Optimal strategies on portfolio and consumption with insurance under fractional Brownian motion

ZHANG Wei-guo, XIAO Wei-lin, ZHANG Xi-li

School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China

Abstract Based on Merton's optimal consumption and investment model, this paper researches a class of optimal portfolio and consumption problem that combines life insurance when the risky asset follows geometric fractional Brownian motion. According to the principle of maximizing the investor's expected lifetime utility, the optimal portfolio and consumption model with insurance is constructed by using Bellman dynamic programming principle. Then, the closed-form solutions for the optimal portfolio, insurance and consumption are derived under the condition that both the special consumption utility function and scrap function are given. Furthermore, some important properties for the influence of parametric changes on the optimal portfolio are also obtained. Finally, numerical examples are presented to discuss the change over the optimal portfolio and insurance and maximal utility in varying time intervals and Hurst exponent.

Key words fractional Brownian motion; Hurst exponent; utility function; portfolio and consumption; life insurance