

并行机下独立任务调度的无秩序代价分析^①

王长军, 贾永基, 徐 琪, 王晓锋
(东华大学旭日工商管理学院, 上海 200051)

摘要: 每个任务都具有异构的正规或非正规目标, 系统也具有独立的全局目标. 由于任务的自利性, 无序竞争常导致系统全局目标的恶化, 造成无秩序代价. 为此, 采用非合作博弈建立同速并行处理机下该问题的模型, 定义 Nash 均衡调度, 证明其存在性, 定量分析不同情况 (系统目标分别为最小化完工时间之和与最小化最大完成时间之和; 任务目标分别为正规型与任意型) 下 Nash 均衡调度的无秩序代价, 显得必要而完备. 研究发现, 当系统目标为最小化完成时间之和或者独立任务具有非正规型性能指标时, 无秩序代价会恶化.

关键词: 无秩序代价; 调度; 排序模型; 博弈理论

中图分类号: TP29 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)05-0044-07

0 引言

现实中许多问题可描述为由多个具有异构性能指标和独立决策能力个体组成的系统, 比如供应链系统、网络系统、制造系统等. 由于系统中资源有限, 资源分配的有效性即是系统面临的问题. 系统的目的是实现某种全局意义下的最优, 或者说 *social optimum*. 但是, 由于个体的自利性 (*selfishness*), 在机制或全局协调者缺失的情况下, 个体竞争的均衡结果常常造成系统资源配置的低效率, 从而导致系统全局目标的恶化. 文献 [1] 最早提出无秩序代价 (*price of anarchy, POA*) 的概念来定量描述竞争可导致的最差全局结果和系统期望的最优全局结果之间的关系, 即博弈理论所阐述的个体理性与集体理性的冲突程度. 由于反映个体理性的 Nash Equilibrium (NE)^[2] 结果常常不唯一. 无秩序代价就是最差 NE 结果与反映集体理性的全局最优性能之间的比值. 无秩序代价对于分析系统特性, 研究竞争中个体的策略性行为, 并进行机制设计 (*mechanism design*) 引导个体竞争结果趋向全局优化有重要意义. 无秩序

代价越大的系统, 对于系统管理者而言, 机制设计也就越重要, 也越困难. 对无秩序代价的研究已涉及诸多领域, 如供应链管理^[3]、交通管理^[4-5]、计算机网络管理^[6-7]和任务调度等.

任务调度问题, 也称排序问题, 是解决如何将单个或者多个资源按时间顺序分配给等待处理的业务, 并使某种性能指标得以优化. 其研究成果广泛应用于生产管理^[8]、计算机科学以及工程科学等领域. 这类问题中, 当待处理任务来自具有不同要求的独立客户时^[9], 每个客户将抢占能够最小化自身成本的资源, 可导致 *POA*. 文献 [1] 最早采用非合作博弈研究了并行网络下的多客户独立任务调度问题, 其中, 每个客户都有独立的优化目标, 而网络系统的目标则是平衡每条网络通道上的通信数据负荷. 定义了自利客户竞争资源的混合 NE, 定量分析了 *POA*. 文献 [10] 首先通过一个反例说明了文献 [1] 的完全混合 NE 并不是最差均衡, 然后设计了一种算法得到精炼 NE 结果, 并给出了精炼 NE 结果的 *POA*. 在文献 [1] 和文献 [10] 中, 系统性能指标为 *min-max* 型的最小化最

① 收稿日期: 2008-04-21; 修订日期: 2009-11-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (70772073 60874076); 上海市自然科学基金资助项目 (07ZR14003).

作者简介: 王长军 (1976-), 男, 安徽人, 博士, 讲师. Email: cjwang@dhru.edu.cn

大完成时间 (makespan), 记做 C_{max} , 而客户的独立性能指标除了与其自身任务的完成时间有关, 还与处理该任务的资源所承担的总负荷相关, 并且随着这两个量的增加而更加恶化. 文献 [11] 综述了此类问题研究并把该问题称之为拥塞模型 (congestion model). 文献 [12] 在拥塞模型基础上, 研究如何通过设计博弈机制来得到具有较小 POA 的 NE 结果. 其中, 任务同时到达, 系统由并行资源组成, 其目标也是最小化 C_{max} .

除了拥塞模型外, 还有一类客户性能指标只与其任务完成时间相关, 而与之在其后完成的任务不相关, 如生产调度问题, 供应链调度问题等. 文献 [11] 称其为排序模型 (sequencing model). 文献 [13] 研究了排序模型中单机调度的 POA. 与此前研究不同, 如考虑任务动态到达, 系统目标为 min-sum 型的最小化完成时间之和, 记做 $\sum C_i$. 客户的成本随其任务完成时间的推迟而增加, 也称为正规型 (regular) 指标. 除此之外, 对排序模型下一般 POA 的研究较少. 已有研究大多从理论或者仿真的角度研究不同博弈机制下的 POA. 比如, 文献 [11] 讨论了局部 SPT (shortest processing time) 策略对于不同排序模型的 POA 的影响. 再比如, 在文献 [13] 基础上, 文献 [14] 设计了一种两层市场博弈机制引导单机下各个客户和系统的策略性行为, 以获得一个具有较好全局性能的 NE 结果. 而通过分析拥塞模型下 POA 研究成果不难发现, 一般 POA 的研究对于其后的机制设计工作有着重要的意义. 因此, 有必要对排序模型下的一般 POA 进行研究, 以帮助甄别不同系统的特性, 指导相应的机制设计工作.

为此, 在以上工作基础上, 对同速并行机下排序模型的 POA 进行定量研究. 与已有工作不同在于: 重点研究了客户具有正规型指标时的情况, 同时也讨论了非正规型 (non-regular, 即客户成本不一定是其任务完成时间的增函数) 的情况; 系统目标分别为 $\sum C_i$ 和 C_{max} ; 客户任务动态到达.

1 问题描述和存在性证明

在多资源调度研究中, 有一类是所有资源均具有相同处理功能的问题, 称为并行机调度. 研究

背景是各机器资源处理速度相同的同速并行机问题, 记 m 为并行机个数. n 个客户记为 $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, 每个客户只具有一个加工任务, 任务动态到达, 其到达时间为 r_i , 到达后等候处理的时间为 w_i , 处理时间为 p_i , 完成时间为 C_i . 以上各量均为整数. 不考虑抢占, 有 $r_i + w_i + p_i = C_i$.

将等待时间 w_i 作为 J_i 的策略选择, 则其可行策略集为

$$w_i^{valid} = \{w_i \mid 0 \leq w_i \leq H - r_i - p_i, w_i \in Z\} \quad (1)$$

式中, H 是调度时域. 所有客户的可行策略组成一个 n 维空间

$$W = w_1^{valid} \times w_2^{valid} \times \dots \times w_n^{valid} \quad (2)$$

W 是 Euclidean 空间中一非空、闭、凸连续子集.

为描述资源的容量约束, 即最多可以同时处理 m 个任务, 类似文献 [15], 引入 0-1 变量 δ_k . 如果 J_i 在 k 时段加工, 则 δ_k 为 1; 否则为 0. 显然, δ_k 是以为变量 w_i 的函数

$$\delta_k(w_i) = \begin{cases} 1, & r_i + w_i + 1 \leq k \leq r_i + w_i + p_i \\ & i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, H \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

则资源容量约束可表示为

$$\sum_{i=1}^n \delta_k(w_i) \leq m; k = 1, \dots, H \quad (4)$$

式 (1) 和式 (3) 已经隐含了任务的到达时间约束和非抢占约束, 则客户的自利性能指标为

$$\min_{w_i \in w_i^{valid}} K_i(w) = f_i(w_i) + \sum_{k=r_i+w_i+1}^{r_i+w_i+p_i} W_k \quad (5)$$

其中

$$W_k(w) = \begin{cases} 0 & \sum_{j=1}^n \delta_k(w_j) \leq m; \\ +\infty & \sum_{j=1}^n \delta_k(w_j) > m \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (6)$$

注意: $f_i(w_i)$ 可以是 w_i 的增函数 (即正规型指标)、减函数或其它形式 (即非正规型指标).

如可找到策略组合 $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*) (w^* \in W)$, 使其对于每一个客户 J_i 都满足

$$K_i(w_1^*, \dots, w_{i-1}^*, w_i^*, w_{i+1}^*, \dots, w_n^*) \leq K_i(w_1^*, \dots, w_{i-1}^*, w_i^* + 1, w_{i+1}^*, \dots, w_n^*) \quad (7)$$

且其中最少有一个是严格小于, 则 w^* 称为 Nash Equilibrium 调度, 简称 NE 调度. 在这样的一个调度中, 没有客户可以仅通过改变自身策略优化其性能. 记所有 w^* 组成的集合为 W^* , 显然有 $w^* \in W^* \subset W^{nail}$. 首先研究 NE 调度 w^* 的存在性.

研究 NE 的解存在性是非合作博弈应用研究中重要一环, 但在调度领域中讨论这一问题困难的^[16]. 观察客户指标 (5), 由于惩罚项 (6) 的存在, 使得函数的连续性和凹凸性无法被保证. 所以很难通过不动点定理予以证明. 利用调度问题的自身特点, 对一般排序模型下 NE 解存在性给出一个简洁的证明.

讨论前提是调度可行集合 W^{nail} 不为空. 这一前提是合理的. 如果由于过度约束造成无可行解, 讨论 NE 调度亦无意义. 借鉴文献 [13] 在单机下的 NE 调度存在性证明, 给出引理 1

引理 1 排序模型下一给定的调度环境中, 最小化 $\sum \omega_j f_j(w)$ ($\omega_j > 0$) 调度 $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ 必定是一个 NE 调度.

证明 (反证法) 假设调度 $w^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ 最小化 $\sum \omega_j f_j(w)$ ($\omega_j > 0$), 但不是 NE 调度. 则根据 NE 调度的定义, 必定存在某个任务 J_i 的策略 w_i^* 不满足式 (7). 即 J_i 可以在不影响其他客户性能的前提下通过改变自身策略 w_i^* 优化其性能 K_i . 记 J_i 改变后的新策略为 w'_i , 相应的新的策略组合为 $w' = (w_1^*, \dots, w_{i-1}^*, w'_i, w_{i+1}^*, \dots, w_n^*)$, 则满足

$K_i(w') < K_i(w^*); K_j(w') = K_j(w^*), j \neq i$
显然, 原最小化 $\sum \omega_j f_j(w)$ 的调度 w^* 必是可行的, 即惩罚项 (6) 为零. 另由上式, 可知 w' 也为可行, 则由式 (5) 可知

$$f_k(w') = K_k(w'); f_k(w') = K_k(w');$$

$$k = 1, \dots, n$$

综上, 有

$$f_i(w') < f_i(w^*); f_j(w') = f_j(w^*); j \neq i$$

进而可得

$$\sum \omega_j f_j(w') < \sum \omega_j f_j(w^*)$$

则 w^* 不是最小化 $\sum \omega_j f_j(w)$ ($\omega_j > 0$) 问题的调度, 与题设矛盾. 故原命题得证. 证毕

引理 1 建立了 NE 调度和全局最优调度间关系. 显然, 只要 W^{nail} 不为空, 最小化 $\sum \omega_j f_j(w)$ ($\omega_j > 0$) 的调度总存在, 得到定理 1

定理 1 排序模型下一给定的调度环境中, 只要其可行调度集合不为空, 式 (7) 定义的 NE 调度必然是存在的. 证毕.

记系统性能指标为 $M := M(w)$. 对任意给定一个同速并行机调度实例 σ , 记最小化 M 的调度为 w^{opt} . 对调度实例 σ , 按 NE 调度定义, 有 NE 调度集合 W^* . 无秩序代价 POA 是指在某个系统指标的最优调度 w^{opt} 衡量下, 整个 NE 调度集合 W^* 的性能范围, 即

$$POA = M(w^*) / M(w^{opt}), \forall w^* \in W^* \quad (8)$$

考虑最常用的两种系统性能指标 $M_1 = \sum C_i$ 和 $M_2 = C_{max}$. 对调度实例 σ , 分别记其最优调度为 w_1^{opt} 和 w_2^{opt} , 对应最优全局性能值为 $M_1(w_1^{opt})$ 和 $M_2(w_2^{opt})$. 对任意 NE 调度 w^* , 对应上面两个问题的系统性能值为 $M_1(w^*)$ 和 $M_2(w^*)$. 针对 $M_i (i = 1, 2)$, 分别寻找 POA_i 的上下界 LB_i 和 UB_i , 满足

$$LB_i \leq POA_i \leq UB_i, i = 1, 2 \quad (9)$$

2 正规型性能指标的 POA 分析

本节分析当客户性能指标为正规型时, 在两种不同系统性能指标下 POA_i 的上下界 LB_i 和 UB_i , 并判定该界是否为紧. 本节分析是重点.

2.1 性能界分析

首先, 不失一般性. 假设实例 σ 的 NE 调度 w^* 中任务开工顺序是 $1, 2, \dots, n$. J_i 完成时间记为 C_i^* . 显然, 前 m 个任务分别在 m 个机器上最先被处理. 任务 J_k 在所有任务中最后到达. 将系统最优调度中 J_i 完成时间记为 C_i^{opt} .

由于客户性能指标是正规型, 无论其具体形式如何, 每个客户都会在不违反约束的情况下尽可能地减少自身的等待时间. 若 $n \leq m$, 即任务数目小于机器数目, NE 调度 w^* 唯一, 且必定是系统最优调度. 所以, 讨论只针对 $n > m$ 情况.

显然, 本节所讨论两种不同系统指标下的最优调度均是一个 NE 调度, 故可给出 POA_i 下界

$$1 \leq POA_i, i = 1, 2 \quad (10)$$

且该下界是紧界. 下面针对两种不同系统性能指

标, 分别讨论 POA_i 的上界.

$$(a) M_1 = \sum C_i$$

如图 1 对于实例 σ 的 NE 调度 w^* 中任意 J_i , 如果在其开工之前存在资源空闲, 则在保持其完成时间不变的前提下, 扩大其的处理长度, 使其占满整个空闲, 得到新的 J'_i . 由此构造新实例 σ' 和相应的调度 $w^*(\sigma')$. 记 σ' 中 J'_i 的处理时间和完成时间分别为 p'_i 和 C'_i , 并令其到达时间为零. 由此过程可知

$$p'_i \leq r_i + p_i \quad (11)$$

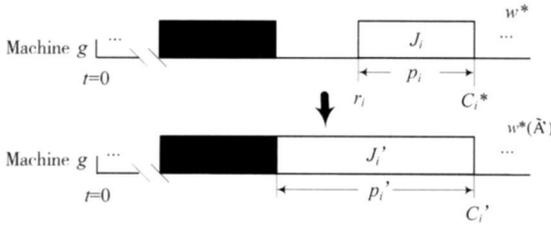


图 1 新实例构造示意图

Fig 1 Illustration of new instance construction

根据 NE 调度定义, 可知调度 $w^*(\sigma')$ 必是实例 σ' 的一个 NE 调度. 且 σ' 中任务的到达时间均为零, 所以有 σ' 中 J'_i 的完成时间满足

$$C'_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1, j \neq i}^n p'_j + p'_i \quad (12)$$

用式 (11) 替代式 (12) 中的 p'_i , 可得

$$C'_i \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1, j \neq i}^n (r_j + p_j) + (r_i + p_i) \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n (r_j + p_j) + (r_i + p_i) \quad (13)$$

由实例构造过程可知, 对应任务 J_i 和 J'_i 的完成时间相同, 则有

$$C_i^* = C'_i \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n (r_j + p_j) + (r_i + p_i) \quad (14)$$

另外, 对于前 m 个, 即 J_1, J_2, \dots, J_m , 其在 w^* 中的完成时间还满足更紧的界

$$C_i^* = r_i + p_i \quad (1 \leq i \leq m) \quad (15)$$

所以, 有

$$C_1^* + \dots + C_m^* = \sum_{i=1}^m (r_i + p_i) \quad (16)$$

同时, 由式 (14), 有

$$C_{m+1}^* + \dots + C_n^* = \sum_{i=m+1}^n C_i^*$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=m+1}^n \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^n (r_j + p_j) + (r_i + p_i) \right) \\ &= \frac{n-m}{m} \sum_{j=1}^n (r_j + p_j) + \sum_{i=m+1}^n (r_i + p_i) \end{aligned} \quad (17)$$

综合式 (16) 和式 (17)

$$\begin{aligned} M_1(w^*) &= \sum_{i=1}^n C_i^* = (C_1^* + \dots + C_m^*) + (C_{m+1}^* + \dots + C_n^*) \\ &\leq \sum_{i=1}^m (r_i + p_i) + \frac{n-m}{m} \sum_{j=1}^n (r_j + p_j) + \sum_{i=m+1}^n (r_i + p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (r_i + p_i) + \frac{n-m}{m} \sum_{j=1}^n (r_j + p_j) \\ &= \frac{n}{m} \sum_{i=1}^n (r_i + p_i) \end{aligned} \quad (18)$$

对于最小化完成时间之和的最优解 w_1^{opt} , 显然 J_i 的完成时间 C_i^{opt} 满足

$$C_i^{opt} \geq r_i + p_i \quad (19)$$

从而给出 w_1^{opt} 性能值的一个下界

$$M_1(w_1^{opt}) = \sum_{i=1}^n C_i^{opt} \geq \sum_{i=1}^n (r_i + p_i) \quad (20)$$

结合式 (18)

$$POA_1 = M_1(w^*) M_1(w_1^{opt}) \leq n m \quad (21)$$

$$(b) M_2 = C_{max}$$

系统指标选取最大完成时间. 不失一般性, 假设任务 J_k 最后被完成. 注意到在 r_k 时刻, 所有任务已经到达, 则 J_k 的完成时间, 即系统的 makespan 满足

$$\begin{aligned} M_2(w^*) &= C_k^* \leq r_k + \frac{1}{m} \sum_{j=1, j \neq k}^n p_j + p_k \\ &= r_k + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n p_j + \left(1 - \frac{1}{m}\right) p_k \end{aligned} \quad (22)$$

同时, 不难给出其最优调度 w_2^{opt} 性能值满足

$$\begin{aligned} M_2(w_2^{opt}) &\geq r_k, \quad M_2(w_1^{opt}) \geq p_k \\ M_2(w_2^{opt}) &\geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n p_i \end{aligned} \quad (23)$$

所以, 有

$$\begin{aligned} POA_2 &= M_2(w^*) M_2(w_2^{opt}) \\ &\leq (M_2(w_2^{opt}) + M_2(w_1^{opt})) + (1 - 1/m) \cdot \end{aligned}$$

$$M_2(w_2^{opt}) = M_2(w_2^{opt'}) = 3 - 1/m \quad (24)$$

综合式 (10)、式 (21) 和式 (24), 得到定理 2

定理 2 对于排序模型下同速并行机调度、客户任务动态到达问题, 系统优化目标分别为完成时间之和、最大完成时间. 客户性能指标均为正规型, 则无秩序代价 POA 分别满足关系: $1 \leq POA_1 \leq n/m, 1 \leq POA_2 \leq 3 - 1/m$.

2.2 紧界验证

前面已说明定理 2 中的下界均是紧界. 下面通过 2 个实例, 说明存在 NE 调度可达到定理 2 中的上界, 以说明上界也为紧.

实例 1 考虑一个 2 并行机, $2n$ 个客户的实例, 其中 2 个客户的任务加工时间为 N 的长任务, 其到达时间为 0 $2(n-1)$ 个客户的任务长为 0 的短任务, 其到达时间为 ϵN 与 ϵ 分别为任意大和任意小正数. 客户目标是任意的正规型指标; 系统目标是完成时间之和.

对上实例, 系统最优调度为分别在 2 机上加工 $(n-1)$ 个短任务, 然后再分别加工长任务. 则

$$M_1(w_1^{opt}) = 2(\epsilon + \dots + \epsilon + (\epsilon + N)) = 2n\epsilon + 2N \quad (25)$$

根据 NE 调度定义, 先在 2 机上加工长任务, 再分别加工 $(n-1)$ 个短任务, 是一个 NE 调度, 则

$$M_1(w_1^*) = 2(N + (N + \epsilon) + \dots + (N + (n-1)\epsilon)) = 2nN + n(n-1)\epsilon \quad (26)$$

因此, 有

$$POA_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2nN + n(n-1)\epsilon}{2n\epsilon + 2N} = n \quad (27)$$

实例 2 考虑一个 2 并行机, 7 客户的实例, 其中 2 个客户的任务加工时间为 N , 1 个客户的加工时间为 $2N$ 的长任务, 其到达时间为 0 4 个客户的任务是长为 0 的短任务, 其中有 2 个到达时间为 $N - \epsilon$ 另 2 个到达时间为 $2N - 2\epsilon$ N 与 ϵ 分别为任意大和任意小正数. 客户目标是任意的正规型指标; 系统目标是最大完成时间.

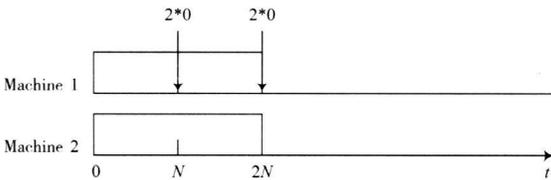


图 2 最小化最大完成时间的系统最优调度

Fig. 2 The optimal schedule of minimizing makespan

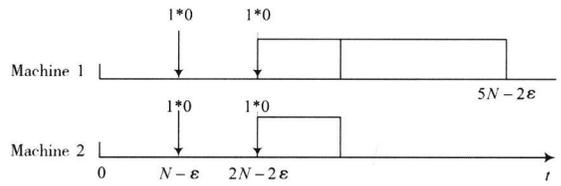


图 3 最小化最大完成时间的最差 NE 调度

Fig. 3 The worst NE schedule of minimizing makespan

对上实例, 系统最优调度如图 2 在机器 1 上加工 2 个长为 N 的任务, 每个长任务后加工 2 个短任务, 机器 2 上加工长为 $2N$ 的任务. 则

$$M_2(w_2^{opt}) = 2N \quad (28)$$

根据 NE 调度定义, 先在 2 机上加工短任务, 然后加工长任务, 是一个 NE 调度, 如图 3 则

$$M_2(w_2^*) = 5N - 2\epsilon \quad (29)$$

因此, 有

$$POA_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{5N - 2\epsilon}{2N} = \frac{5}{2} \quad (30)$$

2.3 结论推广

类似地, 由定理 2 的证明过程和实例构造, 可给出静态环境下结论如定理 3 所示.

定理 3 对于排序模型下同速并行机调度、客户任务零时刻到达问题, 系统优化目标分别为完成时间之和和最大完成时间. 客户性能指标均为正规型, 则无秩序代价 POA 分别满足关系:

$$1 \leq POA_1 \leq n/m, 1 \leq POA_2 \leq 2 - 1/m$$

令定理 2 定理 3 中 m 为 1 可得单机下的相应结论, 限于篇幅, 不再赘述.

3 任意型性能指标的 POA 分析

3.1 性能界分析

本节考虑客户性能指标为任意的情况. 以系统性能指标为 $M_1 = \sum C_i$ 为主要研究对象, 给出其 NE 调度的 POA 上下界. 然后将结果扩展到其它问题中. 需要说明的是, 当客户性能指标仅为非正规型时, POA 上下界与下文结论一致. 故不再另行讨论.

对于 $M_1 = \sum C_i$, 通过一调度实例说明其 POA . 假设一个 2 机, 2 客户调度问题. J_1 参数为 $r_1 = 1, p_1 = 3, f_1 = C_1$ 为正规型; J_2 参数为 $r_2 = 0, p_2 = 5, f_2$ 为非正规. 如图 4 所示, 为典型的 JIT (just in time) 型指标. 当 J_2 的完成时间为

$t_2 (\geq 0)$ 时, f_2 最小.

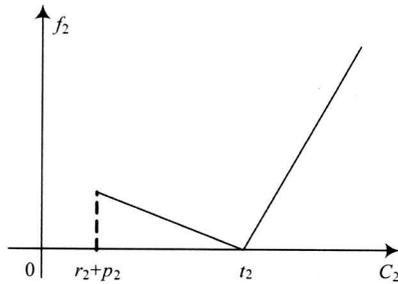


图 4 非正规指标 f_2 示意图

Fig. 4 Illustration of non-regular objective f_2

不难给出系统最优调度 w_1^{opt} 如图 5 所示.

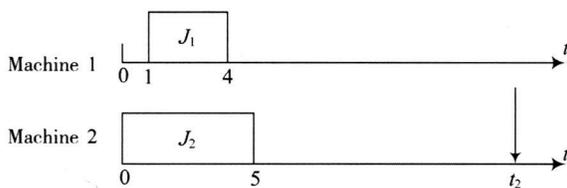


图 5 系统最优调度 w_1^{opt}

Fig. 5 The optimal schedule w_1^{opt}

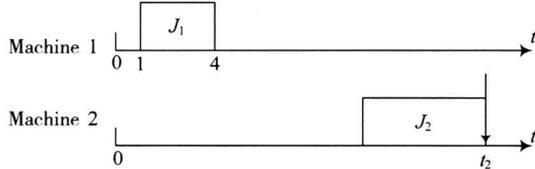


图 6 NE 调度 w^*

Fig. 6 The NE schedule w^*

同时, 也不难给出唯一 NE 调度 w^* 如图 6 于是, $M_1(w_1^{opt}) = 4 + 5 = 9$ 而 $M_1(w^*) = 4 + \max\{5, t_2\}$, 所以

$$M_1(w^*) / M_1(w_1^{opt}) = (4 + \max\{5, t_2\}) / 9 \quad (3.1)$$

对于该实例, 如果 $t_2 \leq 5$ 则 $M_1(w^*) / M_1(w_1^{opt}) = 1$, 即 NE 调度就是全局最优调度. 说明存在 $LB_1 = 1$. 如果 $t_2 > 5$ 则 $M_1(w^*) / M_1(w_1^{opt}) = (4 + t_2) / 9$. 显然, 如果 t_2 无限大, 则 UB_1 也无限大. 上下界都是紧界.

对于系统目标为最大完成时间问题, 可做与上文类似的分析. 从而可得定理 4

定理 4 对于排序模型下同速并行机调度、客户任务动态到达问题, 系统优化目标分别为完成时间之和、最大完成时间. 客户性能指标为任意, 则无秩序代价 POA 均满足关系 $[1, +\infty]$.

将该结论推广到静态同速并行机和单机环境下, 可得相同结果, 不再重复.

3.2 结论与分析

第 2 节和 3.1 节分析了不同情况下的无秩序代价. 由上, 可得以下三个结论:

(1) 以上定理定量给出了 NE 调度代表的个体优化和全局最优之间的差异. NE 调度有时可导致恶劣的全局性能, 即无秩序代价恶化. 所以, 单纯追求个体最优是不合理的. 同时, 文献 [14] 研究也表明, 绝对的全局最优可能忽视了个体的要求, 从而可能造成部分客户性能的极度恶化. 由此, 个体和全局优化目标的协调统一是一个重要的问题.

(2) 系统指标对比下的结果和分析. 观察定理 2 和 3 不难发现, 系统全局性能指标不同, POA 界差异较大. 当系统性能指标为完成时间之和时, POA 界较差; 而当系统性能指标为最大完成时间时, POA 界较好. 究其原因, 当系统性能指标为完成时间之和时, 不同的客户任务处理顺序可能带来全局性能的较大影响. 因此, 此时 POA 界较大. 而对于后者, 全局性能取决最后完成的任务, 与任务处理顺序的密切程度相对较小. 不同 NE 调度的排序变化对全局性能的影响也就较小. 所以, 此时 POA 界范围较小. 由此, 当系统性能指标为完成时间之和时, 进行全局目标和个体目标之间协调的难度要比系统性能指标为最大完成时间时大. 这也说明以完成时间之和为全局指标的系统的机制设计会更困难.

(3) 客户指标对比下的结果和分析. 对比定理 2 和 4.3 和 4.4 不难发现, 客户性能指标特性不同, POA 界差异也很大. 造成这一现象的原因在于, 客户性能指标特性不同, 导致系统和个体目标不统一的程度也不同. 从研究的两种系统性能指标来看, 系统总希望所有客户的任务能够尽早地被完成. 当客户均具有正规型性能指标时, 每个客户的自身目标也是尽可能提前自己的完成时间. 所以个体目标和全局目标基本统一. 只是 NE 调度中, 由于客户的相互竞争, 可能出现多种排序情况, 不同排序情况对应的全局目标有所差别. 但当部分客户具有非正规型性能指标时, 其目标不再是尽早完成, 而是希望在一个时间点上完成. NE 调度中, 这一特性就表现为某些客户希望推迟自身的完成时间. 这导致个体目标和全局目标的不统一, 从而产生差的 POA . 当具有非正规性能指标客户所期望的最优时间点越迟时, POA 上界会越

差. 所以, 当客户性能指标为任意时, 进行系统和个体目标之间协调的难度也会比客户指标为正规型时更大.

结论 (1) 指出了未来的研究重点, 即异构目标之间的协调. 结论 (2)、结论 (3) 给出了未来的研究难点. 对于类似所述系统的来说, 当系统指标为完成时间之和或者系统中客户的指标存在非正规型时, 系统管理者必须通过某种手段来引导竞争, 以避免恶劣的无秩序代价.

4 结束语

有限资源在多个自利个体之间分配所产生的无秩序代价问题是一个有趣且重要的研究领域.

主要以排序模型下的同速并行机调度问题为背景, 分析了不同情况下的无秩序代价. 研究给出了动态到达的自利客户竞争同速并行机资源的非合作博弈模型, 给出了 NE 调度的定义, 并证明了 NE 调度在一般排序模型下的存在性. 文章继而分析了不同环境 (特别是客户具有正规型指标) 下的 NE 调度无秩序代价. 研究发现, 无序竞争可导致极差的全局性能, 这就需要系统管理者设计合理的竞争机制来引导客户的策略性行为, 对个体目标和系统目标进行协调统一. 但是无秩序代价的程度随情况的不同而有所不同, 当系统目标为最小化完成时间之和或者系统中存在非正规型的客户指标时, 会导致更恶劣的无秩序代价, 这是未来研究的难点.

参 考 文 献:

- [1] Koutsoupias E, Papadimitriou C. Worst case Equilibria [C] // Proceeding of The 16th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Springer Verlag, 1999, 404–413.
- [2] Owen G. Game Theory [M]. Third Edition. San Diego: Academic Press Inc, 1995.
- [3] Georgia P, Guillaume R. The price of anarchy in supply chains: Quantifying the efficiency of price only contracts [J]. Management Science, 2007, 53(8): 1249–1268.
- [4] Han D R, Yang H. The multi-class multi-criterion traffic equilibrium and the efficiency of congestion pricing [J]. Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review, 2008, 44(5): 753–773.
- [5] 武小平, 徐寅峰, 苏兵. 方格网络上用户均衡行为效率损失研究 [J]. 运筹与管理, 2009, 18(4): 25–30.
Wu Xiaoping, Xu Yin feng, Su Bing. The research of efficiency loss for user equilibrium behavior in grid traffic networks [J]. Operations Research and Management Science, 2009, 18(4): 25–30 (in Chinese).
- [6] Haviv M, Roughgarden T. The price of anarchy in an exponential multi-server [J]. Operations Research Letters, 2007, 35(4): 421–426.
- [7] 李丹, 吴建平, 崔勇. 应用层组播用户的自私性研究 [J]. 软件学报, 2007, 18(3): 625–635.
Li Dan, Wu Jianping, Cui Yong. Study on selfishness in application layer multicasts [J]. Journal of Software, 2007, 18(3): 625–635 (in Chinese).
- [8] 冯大光, 唐立新. 具有最大总加权满意度的单机调度问题的 dynasearch 算法 [J]. 管理科学学报, 2006, 9(4): 40–50–57.
Feng Daguang, Tang Lixin. Dynasearch algorithms for single machine scheduling problem with total weighted satisfaction [J]. Journal of Management Science in China, 2006, 9(4): 40–50–57. (in Chinese).
- [9] Pedro C C, Arantza E, et al. Job scheduling, cooperation, and control [J]. Operations Research Letters, 2006, 34(1): 22–28.
- [10] Fischer S, Vocking B. On the structure and complexity of worst case equilibria [J]. Theoretical Computer Science, 2007, 378: 165–174.
- [11] Haydenreih B, Müller R, et al. Games and mechanism design in machine scheduling: An introduction [J]. Production and Operations Management, 2007, 16(4): 437–454.
- [12] Angel E, Bampis E, Pascual F. Truthful algorithms for scheduling selfish tasks on parallel machines [J]. Theoretical Computer Science, 2006, 369: 157–168.

(下转第 81 页)

tion ability. The average volume and average absolute yield in durations have negative impacts on price durations, while open interest has weak impacts. The extended ACD models perform better than the classical ones.

Key words duration; ACD model; microstructure; cluster effect

(上接第 50 页)

- [13] Wang C J, Xi Y G. Modeling and analysis of single machine scheduling based on noncooperative game theory [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(4): 516–522.
- [14] Wang C J, Xi Y G. Noncooperative Game on Scheduling: The Single Machine Case [C] // The 16th IFAC World Conference, Czech, 2005.
- [15] Luh P B, Haimot D J, et al. Schedule generation and reconfiguration for parallel machines [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, 6(6): 687–696.
- [16] Kutanoglu E, Wu S D. On combinatorial auction and Lagrangean relaxation for distributed resource scheduling [J]. *IEEE Transactions*, 1999, 31(9): 813–826.

Price of anarchy analysis for scheduling selfish tasks on parallel machines

WANG Chang-jun, JIA Yong-ji, XU Qi, WANG Xiaofeng

Glorious Sun School of Business and Management, Donghua University, Shanghai 200051, China

Abstract Consider the problem of scheduling selfish tasks (or agents) — whose objective is the minimization of their heterogeneous regular or non-regular objectives — on identical parallel machines in order to minimize a global objective. Because of tasks' selfishness, anarchistic competition without mechanism or global coordinator would deteriorate the global performance, and then, price of anarchy. Hence, corresponding noncooperative game is introduced to model the case of identical parallel machine and an equilibrium result named Nash equilibrium schedule is given. The existence of Nash equilibrium schedule is proved and the tight price of anarchy in the different situations (the system's performance objective is selected as minimization of total completion time or minimization of makespan, and the task's is regular or arbitrary) are analyzed quantitatively. The results show the price of anarchy may be extremely poor when the system's performance objective is to minimize the total completion time or the independent task's is non-regular.

Key words price of anarchy; scheduling; sequencing model; game theory