

# 协同持续下资产组合最优决策理论与实证研究<sup>①</sup>

刘海飞, 朱洪亮, 吴承尧  
(南京大学工程管理学院, 南京 210093)

**摘要:** 马柯维茨 (Markowitz) 的现代证券组合理论被视为现代金融理论的基石, 成为组合投资分散化的理论依据. 但在分析的过程中, 静态或动态的投资组合选择理论未能充分重视一个关键的问题, 即金融资产时间序列的时变性、聚集性与持续性. 因此, 基于多期滞后随机波动 (SV) 模型, 尝试性地构建金融时间序列协同持续条件下的最优资产组合模型及其参数估计模型. 继而基于理论分析, 对“1/n”投资策略组合、均值方差组合与协同持续条件下的资产组合的有效性进行比较研究, 得到了协同持续条件资产组合的有效性与优越性. 这对于资产组合最优决策理论的发展与应用具有重要意义.

**关键词:** 金融资产时间序列; 波动性; 协同持续性; 最优选择

**中图分类号:** F830   **文献标识码:** A   **文章编号:** 1007-9807(2010)09-0037-10

## 0 引言

现代资产组合理论<sup>[1]</sup>的核心思想是通过资产分散化来化解与规避投资风险. 然而, 现代资产组合理论并没有回答诸如: 基于投资者最优自身目标的投资组合构建; 基于投资目标、风险态度变化的投资组合动态调整; 投资组合整体风险稳定性, 等等问题. 并且, 该理论尚存在理论假设过多、风险分散方式有限、风险判断机械、实际应用操作困难等方方面面的缺陷<sup>[2]</sup>. 现代资产组合理论虽然为金融短期投资决策提供了理论依据, 但在很大程度上其长期投资适用性受到质疑. 事实上, 金融市场是个复杂系统, 需要用多个金融变量来反映系统特征, 而且这多个变量之间的内在关联是极其复杂的, 不同市场间或不同资产、影响因子之间往往存在着波动的内在关系, 这些变量之间的关联性在金融投资决策过程中是不可回避的, 资产组合投资在使市场风险分散化的同时, 却伴生

了组合资产收益波动持续性增长的倾向. 如何进行资产组合的选择以及财富资金的投资分配, 使得资产组合风险配置到稳定的状态, 消除金融时间序列波动对资产组合风险波动的影响, 是亟需解决的关键问题. 因此, 对金融时间序列波动协同持续的研究就变得非常重要. 基于此, 本文的目的在于通过构建理论模型与实证分析, 揭示金融资产时间序列在协同持续条件下的资产组合最优决策中的有效性及其重要应用价值.

## 1 文献回顾

半个世纪以来, 最优投资组合选择及其风险控制始终是金融研究的热点问题. 国内外学者对资产组合最优决策理论进行了大量研究, 在资产组合选择与最优配置、资产组合规模效应与影响因素、以及资产组合风险度量与控制等重要问题取得了丰硕成果. 概括而言, 研究主要集中在以下

① 收稿日期: 2009-12-10; 修订日期: 2010-06-20.

资助项目: 国家自然科学基金资助项目 (70932003 70671053; 70701016 10726072); 教育部科技创新工程重大项目培育资金资助项目 (708044); 教育部人文社会科学研究资助项目 (09YJCZH061); 南京大学人文社科资助项目.

作者简介: 刘海飞 (1980—), 男, 安徽人, 博士, 讲师. Email: hlfliu@nju.edu.cn

几个方面: 1) 从投资者心理认知、效用与偏好等行为因素<sup>[3-4]</sup>的影响, 探讨资产组合最优配置问题. 投资者对风险的偏好态度与效用函数是受到诸如心理认知、风险忍受程度、生活水平、市场环境等多种因素的影响, 这些因素会导致投资者的偏好与效用在不确定环境下发生一定的变化, 从而影响到投资过程中资产组合构建与最优配置<sup>[5-6]</sup>. 最具有代表性的是行为资产定价模型<sup>[7]</sup>, 描述投资者的心理账户在投资组合资产配置的重要作用. 2) 从时间连续性与投资期限长短的角度探讨资产组合最优选择问题, 实现从单期模型到多期模型的转变, 静态模型到动态模型的转变, 其中, 具有影响力的模型是连续时间模型与离散时间模型<sup>[8-9]</sup>. 3) 考察投资者财富变化 (包括金融资产与非金融资产) 与消费习惯、不对称信息<sup>[10]</sup>、交易成本<sup>[11]</sup>、流动性<sup>[12]</sup>等因素对资产组合最优选择的影响. 4) 从组合风险度量与控制的角度考察最优资产组合的构建与选择问题. 方差作为风险度量指标是马柯维茨资产组合理论的关键假设之一, 但这种度量不够精确. 随后形成了诸如“均值-下半方差”模型、VaR 资产组合最优模型、M-VaR 模型、CVaR 资产组合模型<sup>[13]</sup>、均值-方差-偏度模型<sup>[14]</sup>、随机占优模型<sup>[15]</sup>等. 另外, 近年来投资组合资产最优配置及其效率问题的研究渐渐出现了交叉研究趋势, 比如与复杂系统动力学的方法<sup>[16]</sup>、遗传算法<sup>[17]</sup>、不确定环境下随机理论<sup>[18]</sup>等等的交叉. 以上研究从不同角度对均值-方差模型进行了很多的修正, 使得理论模型更具有理论生命力与现实经济意义.

近年来, 关于资产组合理论的实证研究也越来越受到关注, 但这些关于投资组合的研究集中在投资组合规模的适度性与影响因素的研究. 投资者在投资的过程中采用比较幼稚的分散化策略, 并未注意到资产之间的相关性与资产收益波动的持续性, 最终并不能构建出投资组合资产数量的合理规模. 甚至, 许多投资者根据“拇指经验法则”<sup>[19]</sup>, 采用“1/n”的平均思想构建投资组合, 但这种方法并不能真正做到投资分散化, 消除所构建投资组合的风险. 到底投资组合中的资产数量达到多少才能真正的起到规避组合风险的效果? 在不同国家的金融市场是否有异质性的结

论? Evans和 Archer<sup>[20]</sup>研究表明投资者的资产组合的规模应该控制在 10~12 只股票, Stamat<sup>[21]</sup>发现组合资产数量在 30 只左右才能控制组合风险. 而 Sanyal和 Sen<sup>[21]</sup>利用印度投资者的交易数据发现最优组合资产数量应该在 75 只左右. Barber和 Odean<sup>[23]</sup>通过对美国本国 77 995 个投资者账户进行研究表明, 在尽可能控制组合风险的情况下, 美国证券市场中个体投资者资产组合最优资产数量平均为 3~4 只, 这与相关研究较为接近<sup>[24-25]</sup>. 国内有些学者也进行了相关研究, 如吴世农<sup>[26]</sup>提出投资组合的合适规模为 34 只股票左右, 只有这样才能完全消除非系统性风险. 但有的研究<sup>[27]</sup>指出, 资产组合股票的数量在 1~5 只时能最大程度地降低风险. 总结而言, 由于不同证券市场的环境、交易机制与投资者行为的异质性, 不同国家、不同学者对于组合分散化资产合适规模的结论不尽相同. 遗憾的是, 无论是理论还是实证研究都很少考虑到金融时间序列的时变性、聚集性、持续性等波动特征对资产组合风险规避与控制的影响. 最近国内学者程细玉、孙青华、杜子平等研究了非线性协整, 分整时序的协整等. 自 Bollersle和 Engle<sup>[27]</sup>提出协同持续定义, 即通过多个变量的线性组合来消除波动的持续性这一问题, 对与资产组合理论与金融风险防范无疑具有重要意义, 引起了学者们的高度关注<sup>[28]</sup>. 李汉东和张世英<sup>[29]</sup>与 Clements等<sup>[30]</sup>作了相关研究, 分析了服从向量 GARCH 和向量 SV 过程的协同持续性. 其实, 关键的要义在于要另辟蹊径, 找出消除投资组合风险新的方法, 来体现投资组合理论在理论与实际应用中的重要价值.

考虑到 SV 模型对金融时间序列“尖峰厚尾”的分布特征的刻画能力要高于 GARCH 模型, 更能精确地刻画时间序列的时变性、聚集性与隐性波动. 有别于以往基于 GARCH 类波动模型的研究, 本文基于随机波动 (SV) 模型, 论证了金融资产时间序列协同持续条件下资产组合最优配置的前沿问题, 并对协同持续理论在资产组合最优选择理论的应用做出尝试性研究. 本文的贡献体现在: 1) 基于多期滞后随机波动模型构建了协同持续性下最优资产组合选择理论与参数估计扩展模型并对其进行了实证研究; 2) 从金融时间序列协

同持续的风险角度提出了组合资产最优分配的有效性

### 2 理论模型与参数估计

设

$$Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Nt})^T$$

为  $N$  维向量随机过程,

$$E_{t-1}(Y_t) = u_t$$

$$V ar_{t-1}(Y_t) = H_t$$

其中:  $E_{t-1}(\cdot)$  为基于  $t-1$  期的信息集的条件期望;  $V ar_{t-1}(\cdot)$  为同一信息集上的条件方差. 记

$$\varepsilon_t = Y_t - u_t, t = 0, 1, \dots$$

$$H_t^*(s) = E_s(\text{Vec}h(H_t)) - E_0(\text{Vec}h(H_t)) \quad t > s > 0$$

其中,  $\text{Vec}h(\cdot)$  为向量半算子, 它是将  $N \times N$  阶阵  $H_t$  的下三角元素按列累积而成的  $N(N+1)/2$  维列向量.

定义 1 随机过程  $\{Y_t\}$ , 如果对某些  $s > 0$  和某些  $i = 1, 2, \dots, N(N+1)/2$  使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup | \{H_t^*(s)\}_i | \neq 0 \quad a.s$$

(其中,  $\{H_t^*(s)\}_i$  表示向量  $H_t^*(s)$  的第  $i$  个分量) 则称  $\{Y_t\}$  是关于方差持续性的, 否则  $\{Y_t\}$  是关于方差非持续的.

定义 2 向量随机过程  $\{Y_t\}$  称为关于方差协同持续 (cospersistence), 如果存在一个向量  $v \in R^N$ , 有  $\{\text{Vec}2(v)\}_i \neq 0$  并且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup | \{H_t^*(s)\}_i | \neq 0 \quad a.s$$

而对某些  $s > 0$  和  $i = 1, 2, \dots, N(N+1)/2$  有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup | E_s(v'H_t v) - E_0(v'H_t v) | = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup | \text{Vec}2(v)'H_t^*(s) | = 0 \quad (1)$$

其中

$\text{Vec}2(v) \equiv \text{Vec}h(2v v' - \text{diag}(v) \text{diag}(v))$  表示一个  $N(N+1)/2$  维向量,  $\text{diag}(\cdot)$  表示将向量化为对角矩阵.  $\{\text{Vec}2(v)\}_i$  表示  $\text{Vec}2(v)$  的第  $i$  个元素, 相应的  $v$  称作  $\{Y_t\}$  的协同持续向量.

考虑多期滞后离散形式 SV 随机波动模型

$$\begin{cases} y_{it} = \varepsilon_{it} e^{h_{it}} \\ h_{it} = \alpha_{i0} + \sum_{l=1}^q \beta_{il} h_{i,t-l} + \eta_{it} \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $i \in [1, N]$ ;  $t$  为投资期限;  $\varepsilon_{it} \sim N(0, 1)$ ,  $\eta_{it} \sim N(0, \sigma_{\eta_{it}}^2)$ ,  $\varepsilon_{it}, \eta_{it}$  彼此相互独立;  $y_{it}$  为资产  $i$  在  $t$  时刻的收益率;  $\alpha_{i0}, \beta_{il}$  为常数,  $\beta_{il}$  为持续性参数, 反映了前期时间序列波动对未来波动的影响,  $|\beta_{il}| < 1$  将式 (2) SV 随机波动模型改写成如下形式

$$\begin{cases} y_{it} = \sigma_{it} \varepsilon_{it} \\ \ln \sigma_{it}^2 = \alpha_{i0} + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \ln \sigma_{i,t-l}^2 + \eta_{it} \end{cases} \quad (3)$$

其中, 第 1 个方程为均值方程, 第 2 个方程为波动方程. 对波动方程做如下展开

$$\begin{cases} \ln \sigma_{is}^2 = \alpha_{i0} + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \ln \sigma_{i,s-l}^2 + \eta_{is} \\ \ln \sigma_{i,s+1}^2 = \alpha_{i0} + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \ln \sigma_{i,s+1-l}^2 + \eta_{i,s+1} \\ \vdots \\ \ln \sigma_{it}^2 = \alpha_{i0} + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \ln \sigma_{i,t-l}^2 + \eta_{it} \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $q$  为方差滞后项的个数;  $s$  表示选定的参考点. 考察  $s-1$  期,  $s-2$  期,  $\dots, s-q$  期的收益条件方差  $\sigma_{i,s-1}^2, \sigma_{i,s-2}^2, \dots, \sigma_{i,s-q}^2$  对第  $s$  期条件方差  $\sigma_{is}^2$  的影响, 当参考期  $s$  等于回归波动方程的方差滞后项  $q$  时, 表示前  $s$  期的收益率风险对  $s$  期的收益率风险的影响.

对式 (4) 中的  $\ln \sigma_{it}^2$  进行泰勒展开, 形式如下

$$\ln \sigma_{it}^2 = (\sigma_{it}^2 - 1) - \frac{(\sigma_{it}^2 - 1)^2}{2} + \frac{(\sigma_{it}^2 - 1)^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{(\sigma_{it}^2 - 1)^{n+1}}{n+1} + \dots + 0(\sigma_{it}^2 - 1) \quad (5)$$

其中,  $|\ln \sigma_{it}^2| \leq 2$  为了计算的简洁性, 在后面的计算过程中只取泰勒展式中的第 1 项, 即  $\ln \sigma_{it}^2 \sim (\sigma_{it}^2 - 1)$ , 由式 (4) 和 (5) 展开方程可知,  $\sigma_{it}^2$  与滞后项  $\eta_{it}$  成以下线性关系

$$\sigma_{it}^2 = \sigma_{it} + \sum_{l=1}^q \beta_{il} (\sigma_{i,t-l}^2 - 1) + \eta_{it} \quad (6)$$

对于给定金融资产收益率序列, 上述公式中  $\exp(\alpha_{i0}), \exp(\eta_{it})$  与  $\beta_{il}$  是定值, 则  $\sigma_{it}^2$  是  $\sigma_{i,t-l}^2$  的非线性函数.

根据传统经典的马柯维茨投资组合模型, 第  $t$  期的组合协方差矩阵为

$$C_{\mu_t} = \begin{bmatrix} \alpha_{1t}^2 & \lambda_{21} \alpha_{1t} \alpha_{2t} & \dots & \lambda_{1n} \alpha_{1t} \alpha_{Vt} \\ \lambda_{21} \alpha_{2t} \alpha_{1t} & \alpha_{2t}^2 & \dots & \lambda_{2n} \alpha_{2t} \alpha_{Vt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} \alpha_{Vt} \alpha_{1t} & \lambda_{n2} \alpha_{Vt} \alpha_{2t} & \dots & \alpha_{Vt}^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

将式 (4) 和式 (6) 代入式 (7) 可得

$$C_{\mu_t} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^q \beta_{1l} (\sigma_{1, s-l}^2 - 1) + \eta_{1s} & \lambda_{21} \alpha_{1t} \alpha_{2t} & \dots & \lambda_{1n} \alpha_{1t} \alpha_{Vt} \\ \lambda_{21} \alpha_{2t} \alpha_{1t} & \sum_{l=1}^q \beta_{2l} (\sigma_{2, s-l}^2 - 1) + \eta_{2s} & \dots & \lambda_{2n} \alpha_{2t} \alpha_{Vt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} \alpha_{Vt} \alpha_{1t} & \lambda_{n2} \alpha_{Vt} \alpha_{2t} & \dots & \sum_{l=1}^q \beta_{Nl} (\sigma_{N, s-l}^2 - 1) + \eta_{Ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \\ \vdots \\ \alpha_{Vt} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中,  $\lambda_{ij} = \frac{\text{cov}(y_i, y_j)}{\sigma_i \sigma_j}$  为各资产的相关系数.

令

$$C_{\mu_t}^* = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^q \beta_{1l} (\sigma_{1, s-l}^2 - 1) + \eta_{1s} & \lambda_{21} \alpha_{1t} \alpha_{2t} & \dots & \lambda_{1n} \alpha_{1t} \alpha_{Vt} \\ \lambda_{21} \alpha_{2t} \alpha_{1t} & \sum_{l=1}^q \beta_{2l} (\sigma_{2, s-l}^2 - 1) + \eta_{2s} & \dots & \lambda_{2n} \alpha_{2t} \alpha_{Vt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} \alpha_{Vt} \alpha_{1t} & \lambda_{n2} \alpha_{Vt} \alpha_{2t} & \dots & \sum_{l=1}^q \beta_{Nl} (\sigma_{N, s-l}^2 - 1) + \eta_{Ns} \end{bmatrix} \quad (9)$$

则定义  $C = \sum_{l=1}^q C_{\mu_{s-l}} - C_{\mu_t}^*$  为投资组合衰减协方差矩阵, 若  $\xi$  为投资组合的权重, 则有  $F(\xi) = \xi' C \xi$  为投资组合衰减方差函数. 而  $F(\xi)$  表示投资组合前  $q$  期收益率方差在影响第  $t$  期收益率方差之前衰减的部分. 因此, 根据协同持续的理论, 使得  $F(\xi) = \xi' C \xi$  函数值达到最大对应的投资决策权重是最优的. 因此, 考察以下二次规划

$$\begin{aligned} \max F(\xi) &= \xi' C \xi \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \mu' \xi = \mu_p \\ I' \xi = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\xi = \frac{C^{-1} [(\mu' C^{-1} \mu - \mu_p I' C^{-1} \mu) I + (\mu_p I' C^{-1} I - I' C^{-1} \mu) \mu]}{I' C^{-1} \mu' C^{-1} \mu - I' C^{-1} \mu I' C^{-1} \mu} \quad (11)$$

可知投资决策权重  $\xi$  是由资产数量、资产间相关系数、投资期限、预期收益率、参考期以及变量  $\eta_{it}$  的方差  $\sigma_{\eta_{it}}^2$  有关. 要对上式进行估计, 就必须首先估计出资产之间相关系数、投资期限、预期

其中:  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)'$  是每个风险资产收益率向量;  $\mu_p$  为投资组合的预期收益率;  $I = (1, 1, \dots, 1)'$  为单位向量. 求解以上二次规划问题, 构造下面的 Lagrange 函数

$$L(\xi) = -\xi' C \xi + \lambda_1 (\mu' \xi - \mu_p) + \lambda_2 (I' \xi - 1)$$

满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -2C\xi + \lambda_1 \mu + \lambda_2 I = 0$$

加之  $\mu' \xi = \mu_p, I' \xi = 1$  可以推出

收益率、参考期以及潜在变量  $\eta_{it}$  的方差  $\sigma_{\eta_{it}}^2$  的不同参数的数值.

对本文 SV 波动模型的估计, 由于考虑了滞后多阶的方差对未来收益率波动的影响, 将扩展非

线性滤波极大似然估计方法<sup>[31]</sup> (quasimaximum likelihood, QML) 直接进行参数估计。

考察模型

$$\begin{cases} y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \ln \sigma_t^2 = \alpha + \sum_{l=1}^q \beta_l \ln \sigma_{t-l}^2 + \eta_t \end{cases} \quad (12)$$

令  $x_t = \ln \sigma_t^2$ ,  $Y_t = (y_1, y_2, \dots, y_t)'$ , 式 (12) 变为以下形式

$$\begin{cases} y_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ x_t = \alpha + \sum_{l=1}^q \beta_l x_{t-l} + \eta_t \end{cases} \quad (13)$$

考察状态空间

$$\begin{cases} f(x_t | Y_{t-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_t, x_{t-1} | Y_{t-1}) dx_{t-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_t | x_{t-1}, Y_{t-1}) f(x_{t-1} | Y_{t-1}) dx_{t-1} \\ f(x_t | Y_t) = f(x_t | y_t, Y_{t-1}) = \frac{f(x_t, y_t | Y_{t-1})}{f(y_t | Y_{t-1})} = \frac{f(y_t | x_t, Y_{t-1}) f(x_t | Y_{t-1})}{f(y_t | Y_{t-1})} \end{cases} \quad (15)$$

可以推得

$$\begin{cases} f(x_t | Y_{t-q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_t | x_{t-1}, Y_{t-1}) f(x_{t-1} | Y_{t-1}) \dots f(x_{t-q} | Y_{t-q}) dx_{t-1} \dots dx_{t-q} \\ f(y_t | Y_{t-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_t, x_t | Y_{t-1}) dx_{t-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_t | x_t, Y_{t-1}) f(x_t | Y_{t-1}) dx_t \\ f(y_t | Y_{t-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_t | x_t, Y_{t-1}) f(x_t | Y_{t-1}) \dots f(x_{t-q} | Y_{t-q}) dx_t \dots dx_{t-q} \end{cases} \quad (16)$$

由上式的表达形式可知, 直接计算滤波积分式的解析表达式有一定的困难, 本文借鉴 Watanabe 和 Toshiaki<sup>[31]</sup> 中的方法, 采用将连续积分离散化, 用逐段线性函数线性近似每期相关的概率密度函数进行近似估计。对于  $f(x_t | Y_{t-1})$  与

$$\begin{aligned} f(x_t^{(i)} | Y_{t-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_t^{(i)} | x_{t-1}, Y_{t-1}) f(x_{t-1} | Y_{t-1}) dx_{t-1} \\ &\approx \sum_{n=1}^N \int_{x_{t-1}^{(n-1)}}^{x_{t-1}^{(n)}} f(x_t^{(i)} | x_{t-1}, Y_{t-1}) f(x_{t-1} | Y_{t-1}) dx_{t-1} \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (x_t^{(n)} - x_{t-1}^{(n-1)}) [f(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(n-1)}, Y_{t-1}) f(x_{t-1}^{(n-1)} | Y_{t-1}) + \\ &\quad f(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(n)}, Y_{t-1}) f(x_{t-1}^{(n)} | Y_{t-1})] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} f(y_t | Y_{t-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_t, x_t | Y_{t-1}) dx_{t-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_t | x_t, Y_{t-1}) f(x_t | Y_{t-1}) dx_t \\ &\approx \sum_{n=1}^N \int_{x_{t-1}^{(n-1)}}^{x_{t-1}^{(n)}} f(y_t | x_t, Y_{t-1}) f(x_t | Y_{t-1}) dx_t \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (x_t^{(n)} - x_{t-1}^{(n-1)}) [f(y_t | x_{t-1}^{(n-1)}, Y_{t-1}) f(x_{t-1}^{(n-1)} | Y_{t-1}) + f(y_t | x_{t-1}^{(n)}, Y_{t-1}) f(x_{t-1}^{(n)} | Y_{t-1})] \end{aligned} \quad (18)$$

$$y_t \sim r(\bullet | x_t, Y_{t-1}), x_t \sim r(\bullet | x_{t-1}, Y_{t-1})$$

由式 (13) 可知它有以下形式的密度函数

$$\begin{cases} f(x_t | x_{t-1}, Y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \times \exp\left(-\frac{(x_t - \alpha - \beta_1 x_{t-1} - \dots - \beta_q x_{t-q})^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \\ f(y_t | x_t, Y_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \exp x_t} \times \exp\left(-\frac{y_t^2}{2\exp x_t}\right) \end{cases} \quad (14)$$

基于条件分布函数的计算方法, 则有其一步的预测形式为

$f(y_t | Y_{t-1})$ , 通过选定分段的数据和节点的位置, 在每个节点对密度函数值进行近似模拟。对每一期选择  $N + 1$  个节点, 这些节点按大小顺序排列, 记为:  $x_t^{(0)}, x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(N)}$ 。利用连续到离散的梯形法则进行展开, 得到

当设定初始状态变量时,根据以上离散估计式(在滞后期为多项时,只要分布将积分离散化进行迭代即可),在假设  $x_t$  无条件分布服从均值为  $\frac{\alpha}{1-\beta}$  和方差为  $\frac{\alpha_n^2}{1-\beta^2}$  的正态分布,该分布通常被作为初始状态变量的分布,可以得到模型以下形式的对数似然函数

$$\ln L = \ln[f(Y_T)] = \sum_{t=1}^T \ln[f(y_t | Y_{t-1})]$$

至此,就可以估计滞后多项随机波动函数的参数.

### 3 实证研究与结果分析

#### 3.1 数据、样本与设计

由于上证 50 指数中的股票是上海股市众多只股票中,依照行业代表性、流通市值规模、交易活跃程度、上市公司财务状况、经营业绩和地区代表性等原则,优先从股本规模大、成长性较好的个股中选取的,比较有代表性.因此,本文选择上证 50 指数中作为实证研究的总体样本,数据来源于 2008 天相投资分析系统.为保证 SV 波动模型回归的准确性,本文采用向后复权的方式对股票价格序列进行数据整理,剔除长时间停牌、ST、送股配股、派息等因素的影响,剩余 43 只股票,以此为本文实证研究的样本.样本时间阶段为 2008 年 1 月 1 日到 2009 年 12 月 3 日,采用对数收益率形式为  $R = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$ . 主要使用 E view s5. Q M at lab7. Q W in bugs14. 0 等软件实现研究过程. 本文实证分为两个部分,首先,采用均匀分布下随机抽样方法,得到中国铁建、北京银行、贵州茅台 3 只股票日度收盘价序列作为本文的研究对象,得出代表性的结论;其次,为了验证结论的一般性与稳健性,设计构建以下投资组合,借鉴文献 [26],具体方法为: 1) 从确定的样本范围 ( $N$  只股票) 中以均匀概率分布随机抽取 1 只股票; 2) 从剩余的  $N - 1$  只样本股票中随机抽取 1 只股票,与前面抽出的那只股票组成 2 只股票资产的投资组合; 3) 从剩余的  $N - 2$  只样本股票中随机抽取 1 只股票,与前面抽出的股票组成 3 只股票资产的投资组合; 4) 为了减少以此抽样所带来的误差,重

复上述步骤 500 次,构造出 500 组“单资产股票投资组合”, 500 组“双资产股票投资组合”, 500 组“三资产股票投资组合”,基于这些样本进行实证研究.

#### 3.2 实证结果分析

本文设计检验步骤为: 首先,通过样本进行数据处理与统计性描述; 其次,建立“ $1/n$ ”策略投资组合与均值方差组合,计算出组合的有效前沿与最优投资权重,统计两种组合的收益率与风险等指标数值; 接着,遵循以上的随机波动投资组合理论分析的过程,利用 SV 模型扩展的 NFML 参数估计方法对每一只股票进行估计,利用随机波动理论分析的权重公式计算出最优权重; 再者,对单只股票与组合进行持续性的比较分析; 最后进行稳健性检验. 利用相关软件计算得出 3 种投资组合的决策权重分别为 (0.1864, 0.2092, 0.6044), (1/3, 1/3, 1/3), (0.2181, 0.4152, 0.3667), 按照上述向量的分量为投资权重,分别构建“ $1/n$ ”投资组合、均值方差组合以及随机波动投资组合. 图 1 给出了包括单只股票、“ $1/n$ ”投资组合、均值方差组合以及随机波动投资组合收益率的直观趋势比较图. 可以看出: 各种组合风险普遍显著地小于单只股票的风险.

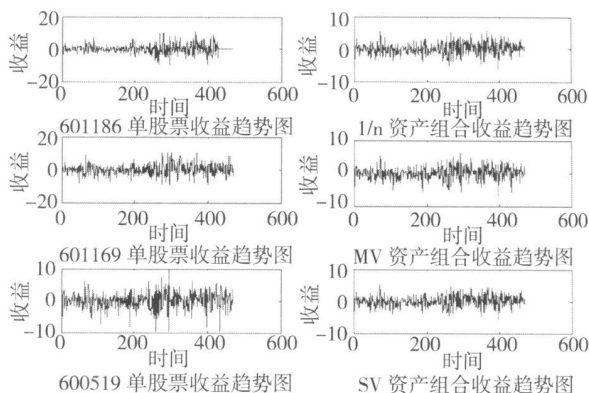


图 1 单只股票与组合收益率走势图

Fig 1 Run chart for single stock and portfolio return ratio

由表 2 与图 2 可以看出,各种组合的收益率与方差较单只股票而言有明显改善.而“ $1/n$ ”投资组合、均值方差投资组合、随机波动投资组合的收益率与均值分别为 (0.039866, 0.042249, 0.058151) 与 (1.802981, 1.900204, 1.744910). 随机波动资产组合的收益最大,方差最小,体现

表 1 单只股票与组合收益率基本特征统计性表

Table 1 Statistics analysis for single stock and portfolio return ratio

参数	中国铁建	北京银行	贵州茅台	“1/n”投资组合	均值方差投资组合	随机波动投资组合
平均收益率	0.041 901	0.034 059	0.049 208	0.039 866	0.042 249	0.058 151
收益率系列中位数	0.000 000	0.000 000	0.133 572	- 0.037 639	0.018 348	- 0.023414
最大收益率	10.512 21	10.550 75	9.907 354	5.447 923	6.249 039	5.076 999
最小收益率	- 9.587 467	- 9.531 790	- 9.531 017	- 6.502 351	- 7.216 394	- 5.806 945
序列标准方差	2.644 394	3.271 488	2.495 259	1.802 981	1.900 204	1.744 910
收益率系列偏度	0.305 935	0.104 242	- 0.363 006	0.080 808	- 0.154 694	0.048 845
收益率系列峰度	5.568 312	3.888 267	4.775 627	3.432 833	3.853 688	3.188 667
收益率系列夏普比率	0.015 885	0.010 394	0.019 639	0.021 631	0.022 105	0.033 239

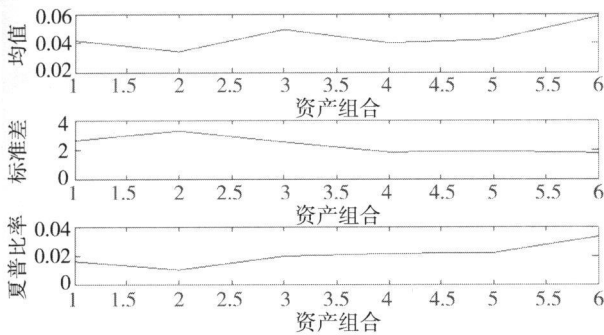


图 2 单只股票与组合收益率序列的均值、方差与夏普率比较

Fig 2 Mean, variance and sharp ratio comparative analysis for single stock and portfolio return ratio

了此种构建模型方法的有效性。在此样本情况之下, 均值方差模型的方差大于“1/n”投资组合的方差, 并且前者的收益率小于后者, 说明在实际的投资过程中均值方差组合有一定的局限性。

表 2 各资产的 SV 模型 NFM L 参数估计结果比较分析

Table 2 NFM L parameter estimation analysis for every portfolio based on SV model

参数	中国铁建	北京银行	贵州茅台	“1/n”投资组合	均值方差组合	随机波动的资产组合
$\alpha_0$	- 0.850 1 (0.000 410) (0.000 000)	- 0.686 0 (0.000 352) (0.000 000)	- 0.556 5 (0.000 138) (0.000 000)	- 0.544 7 (0.000 603) (0.000 000)	- 0.621 8 (0.000 015) (0.000 000)	- 0.505 7 (0.000 931) (0.000 000)
$\beta_1$	0.531 1 (0.000 893) (0.000 000)	0.891 3 (0.000 813) (0.000 000)	0.618 5 (0.000 202) (0.000 000)	0.615 4 (0.000 272) (0.000 000)	0.538 2 (0.000 746) (0.000 000)	0.213 5 (0.000 466) (0.000 000)
$\sigma_{\eta}$	0.306 8 (0.000 057) (0.000 000)	0.462 1 (0.000 009) (0.000 000)	0.221 4 (0.000 198) (0.000 000)	0.291 9 (0.000 198) (0.000 000)	0.276 3 (0.000 445) (0.000 000)	0.216 9 (0.000 418) (0.000 000)

注: 1 NFM L 参数估计中选取的节点个数为 50 每个收益率序列样本观察数为 469 迭代次数为 1 000。

2 第 1、2 括弧里面分别为模型参数回归值对应的标准误差与 P 值,  $\alpha_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\sigma_{\eta}$  为随机波动模型的待估参数, 其中  $\alpha_0$  表示没有滞后期波动的影响情况下的波动方差,  $\beta_1$  为滞后 1 期对未来收益波动的影响,  $\sigma_{\eta}$  表示其他不确定因素对收益率序列未来波动的影响。

考虑到本文检验的科学性与简洁性, 本文采用一期滞后的 SV 随机波动模型, 对非线性滤波极大似然估计方法 (QML) 进行扩展, 其中选取节点为 50 个, 迭代 1 000 次, 利用 Winbugs14.0 软件对计算出单只股票与组合的协同持续性的指标, 如表 2 与图 3 所示。

由表 2 与图 3 可知, 中国铁建、北京银行、贵州茅台、“1/n”投资组合、均值方差组合、随机波动资产组合的内在波动向量为 (- 0.850 1 - 0.686 0 - 0.556 5 - 0.544 7 - 0.621 8 - 0.505 7), 中国铁建的内在波动率最强, 随机波动资产组合的内在波动率, 即波动的平均水平最小。而在持续性的指标上同样出现这样的情况, 之间有较大差异, 其中随机波动资产组合的持续性指标为 0.213 5 是

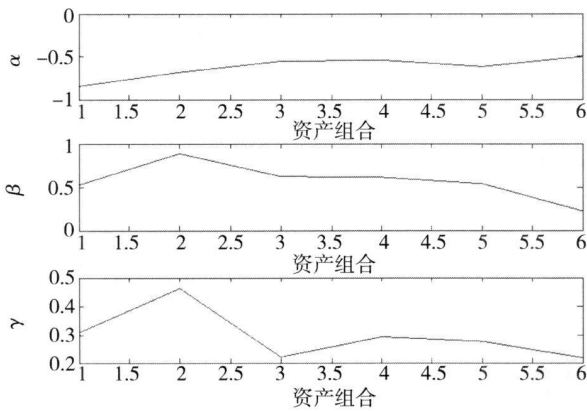


图 3 单只股票与组合收益率序列的阿尔法值、贝塔值与伽马值比较

Fig 3 Alpha beta and gamma comparative analysis for single stock and portfolio return ratio

所有组合中最小的, 说明按照这种方式构建的投资组合有效规避了滞后期波动对未来收益波动的影响, 很大程度上规避了组合风险, 真正体现出了此种组合的有效性. 市场风险 Gamma值在均值 0.2959附近浮动, 说明市场风险对于单只股票还是组合都相差无几. 有趣的是, 均值方差组合与“1/n”投资组合相比较发现, 前者持续性、市场风险的影响都略低, 但组合风险波动的平均水平较高. 为了进一步说明基于协同持续条件下资产组合优越性的稳健特征, 分别对 500组单资产股票投资组合、双资产股票投资组合、三资产股票投资组合进行实证检验.

表 3 不同组合规模的 SV 模型 NFM L 参数估计结果比较分析

Table 3 NFM L parameter estimation analysis for every portfolio based on SV model

参数	单一资产	“1/n”投资组合	均值方差组合	随机波动资产组合
$\overline{\alpha_1^1}$	-0.6712 (0.000303) (0.000000)			
$\overline{\beta_1^1}$	0.5027 (0.000661) (0.000000)			
$\overline{\sigma_{\eta_1}^1}$	0.31601 (0.000042) (0.000000)			
$\overline{\alpha_0^2}$		-0.6374 (0.000296) (0.000000)	-0.7451 (0.000027) (0.000000)	-0.6113 (0.000883) (0.000000)
$\overline{\beta_1^2}$		0.6271 (0.000200) (0.000000)	0.5382 (0.000746) (0.000000)	0.2135 (0.000466) (0.000000)
$\overline{\sigma_{\eta_1}^2}$		0.3217 (0.000295) (0.000000)	0.2996 (0.000381) (0.000000)	0.2775 (0.000368) (0.000000)
$\overline{\alpha_0^3}$		-0.5329 (0.000413) (0.000000)	-0.6027 (0.000016) (0.000000)	-0.4938 (0.000889) (0.000000)
$\overline{\beta_1^3}$		0.5972 (0.000258) (0.000000)	0.5125 (0.000711) (0.000000)	0.2144 (0.000393) (0.000000)
$\overline{\sigma_{\eta_1}^3}$		0.2811 (0.000151) (0.000000)	0.2622 (0.000413) (0.000000)	0.2172 (0.000524) (0.000000)

注: 1 NFM L 参数估计中选取的节点个数为 50 每个收益率序列样本观察数为 469 迭代次数为 1 000

2 第 1、2 括弧里面分别为模型参数回归值对应的标准误差与 P 值,  $\overline{\alpha_0^i}, \overline{\beta_1^i}, \overline{\sigma_{\eta_1}^i} (i=1, 2, 3)$  分别为单资产股票投资组合、双资产股票投资组合、三资产股票投资组合的随机波动模型待估参数的均值, 其中  $\overline{\alpha_0^i}$  表示没有滞后期波动的影响情况下的波动方差均值,  $\overline{\beta_1^i}$  为滞后 1 期对未来收益波动的平均影响,  $\overline{\sigma_{\eta_1}^i}$  表示其它不确定因素对收益率序列未来波动的平均影响.



由表 3 可知, 三资产股票投资组合较单资产股票投资组合与双资产股票投资组合而言, 其波动的平均水平较低, 受市场不确定风险因素的影响程度较低; 随机波动资产决策方法较单一资产、“ $1/n$ ”投资组合与均值方差组合等决策都有明显的改善, 并具有很强的稳健性。

## 4 结束语

金融资产时间序列之间协同持续性的系统特征是消除投资组合风险的新途径, 也是近年来研究的热点. 考虑到 SV 模型对金融时间序列“尖峰厚尾”的分布特征的刻画能力要高于 GARCH 模

型, 更能精确地刻画时间序列的时变性、聚集性与波动性. 本文理论上构建了多期滞后 SV 随机波动条件下的资产组合最优选择模型及扩展的非线性滤波极大似然估计方法; 在实证研究上通过对样本的均匀分布概率随机选择条件下构建了“ $1/n$ ”投资组合、均值方差组合、随机波动资产组合等 3 类不同投资组合, 并比较了它们的收益、风险以及持续性波动的差异性, 说明了通过协同持续视角下投资组合构建方法的有效性与优越性, 其研究结论具有一定的普适性. 金融时间序列协同持续情境下对资产组合最优配置进行理论与实证研究是未来研究的方向, 为现实金融市场投资者资产组合的构建方法提供了新的思路与可操作性投资建议。

## 参考文献:

- [1] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77- 91.
- [2] Demiguel V, Garlappi L, Uppal R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? [J]. The Review of Financial Studies, 2009, 22(5): 1915- 1953.
- [3] Sanjiv D, Markowitz H, Scheid J et al. Portfolio Optimization with Mental Accounts[R]. Santa Clara Santa Clara University, [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1166899](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1166899), 2009.
- [4] Vek M. Portfolio Choice with Loss Aversion: Asymmetric Risk-taking Behavior and Segregation of Riskless Opportunities [R]. Swiss Finance Institute Research Paper Series, 2006, 12: 6- 27.
- [5] Györfi L, Ottucsák G, Urbán A. Empirical Log-optimal Portfolio Selections: A Survey [R]. Tuebingen, Germany: MLSS, 2007.
- [6] Gyöngyi B, Uzsofi A M. Longitudinal Study on Portfolio Optimization: Is the “Success” Time Dependent? [R]. Pécs University of Pécs Faculty of Business and Economics, 2009.
- [7] Levy H, Levy M. Prospect theory and mean-variance analysis [J]. Review of Financial Studies, 2004, 17(4): 1015- 1041.
- [8] Xie Shuxiang, Li Zhongfei, Wang Shouyang. Continuous-time portfolio selection with liability: Mean-variance model and stochastic LQ approach [J]. Insurance, Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 943- 953.
- [9] Dai M in, Zhong Yifei. Penalty Methods for Continuous-time Portfolio Selection with Proportional Transaction Costs [R]. Singapore: Department of Mathematics, National University of Singapore, 2009.
- [10] Chacko G, Viceira LM. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets [J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(4): 1369- 1402.
- [11] Lo A W, Mamaysky H, Wang J. Asset prices and trading volume under fixed transactions costs [J]. Journal of Political Economy, 2004, 112(5): 1054- 1090.
- [12] Fernandes José, PEÑA, Juan I, Tabak Benjamin and José ORNELAS [R]. Professional Portfolio Managers, [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=961343](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=961343), 2007.
- [13] Rockafellar R T, Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk [J]. Journal of Risk, 2002, 3(3): 21- 41.
- [14] Campbell R M, Muller L. Bayesian selection of threshold autoregressive models [J]. Journal of Time Series Analysis, 2004, 25: 467- 482.
- [15] Balder S, Brand M, Mahayni A. Effectiveness of CPP I strategies under discrete-time trading [J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2008, (4): 15- 17.
- [16] Alexakis C, Balios D, Stavrakis A. A dynamic approach for the evaluation of portfolio performance under risk conditions [J]. Investment Management and Financial Innovations, 2007, 4(4): 16- 24.

- [ 17] Yang X. Improving portfolio efficiency: a genetic algorithm approach[ J]. Computational Economics, 2006, 28(1): 1– 14
- [ 18] Liu J. Portfolio selection in stochastic environment[ J]. The Review of Financial Studies, 2007, 20(1): 1– 39.
- [ 19] Benartzi S, Richard H T. Naive diversification strategies in retirement saving plans[ J]. American Economic Review, 2001, 91(1): 79– 98.
- [ 20] Evans L J, Archer N S. Diversification and the reduction of dispersion: An empirical analysis[ J]. Journal of Financial & Quantitative Analysis, 1968, 23(5): 761– 767.
- [ 21] Statman M. How many stocks make a diversified portfolio[ J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22(3): 353– 363.
- [ 22] Sanyal G, Sen S. Portfolio diversification and risk reduction in India: an empirical analysis[ J]. Finance India, 1998, 12(2): 375– 384.
- [ 23] Barber B M, Odean T. Trading is hazardous to your wealth: The common stock investment performance of individual investors[ J]. Journal of Finance, 2000, 55(3): 773– 806.
- [ 24] Agnew J, Bakluzzi P, Sunden A. Portfolio choice and trading in a large 401(K) plan[ J]. American Economic Review, 2003, 93(1): 193– 215.
- [ 25] Kumar A, Lin S S. How do decision frames influence the stock investment choices of individual investors? [ J]. Management Science, 2008, 54(6): 1052– 1064.
- [ 26] 吴世农, 韦绍永. 上海股市投资组合规模和风险关系的实证研究[ J]. 经济研究, 1998, 33(4): 21– 29.  
Wu Shirong, Wei Shaoyong. An empirical study of the relationship between the scale of the investment combination on Shanghai[ J]. Economic Research Journal, 1998, 33(4): 21– 29. (in Chinese)
- [ 27] Bollerslev T, Engle R F. Common persistence in conditional variance[ J]. Econometrica, 1993, 61(1): 167– 186.
- [ 28] 张世英, 樊智. 协整理论与波动模型——金融时间序列分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.  
Zhang Shiyong, Fan Zhi. Cointegration Theory and Volatility Models. Financial Time Series Analysis and Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [ 29] 李汉东, 张世英. 存在方差持续性的资本资产定价模型分析[ J]. 管理科学学报, 2003, 6(1): 75– 80.  
Li Handong, Zhang Shiyong. Study on common factors of vector stochastic volatility model[ J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(1): 75– 80. (in Chinese)
- [ 30] Clements A, Hurv S, White S. Estimating Stochastic Volatility Models Using a Discrete Non-linear Filter[ R]. Cambridge: NBER, 2006.
- [ 31] Watanabe, Toshiaki. A non-linear filtering approach to stochastic volatility models with an application to daily stock returns [ J]. Journal of Applied Econometrics, 1999, 14(2): 101– 121.

## Theoretical and empirical research on optimization of portfolio decision-making with co-persistence

LIU Haifei, ZHU Hong-liang, WU Cheng-yao

School of Management and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China

**Abstract** Markowitz's Modern Portfolio Theory (MPT) is considered as the footstone of finance theory and has become the theoretical basis of invest diversification. Nevertheless static or dynamic portfolio theory cannot adequately attach importance to pivotal problem which is time-variation, cluster and persistence of financial time series. Accordingly, the paper tentatively constructs an optimal portfolio decision-making model using SV model with multiple time delays under the condition of co-persistence. We find the validity and superiority of co-persistence invest portfolio throughout comparatively analysis for "1/n" invest portfolio, mean-variance portfolio model and co-persistence portfolio model, and which is of crucial significance to optimization decision-making theory's development and its application.

**Key words** financial asset time series, volatility, co-persistence, optimization choice