

# 赋权网络中的弱化免疫研究<sup>①</sup>

马英红<sup>1</sup>, 李慧嘉<sup>1</sup>, 张晓东<sup>2</sup>

(1 山东师范大学管理与经济学院, 济南 250014 2 上海交通大学数学系, 上海 200240)

**摘要:** 随着复杂网络在社会经济管理领域应用研究的发展, 信息扩散或谣言传播及相应的传播控制也得到了人们的广泛关注. 本文定义了边赋权网络中的控制行为——弱化免疫, 即通过降低免疫节点所关联的边的权值, 同时保持免疫后网络节点间的连接畅通, 可使整个网络保持一定效率下的正常运行的免疫策略; 其次, 建立基于病毒传播 SI 模型上的弱化免疫模型, 给出加权网络中弱化免疫下的谣言密度演化规律. 最后研究加权网络中基于弱化免疫下的目标免疫策略, 并分析弱化免疫网络同步性能, 对加权网络中谣言传播和免疫策略等相关参数进行数值模拟, 表明理论模型的可行性以及免疫策略的合理性.

**关键词:** 加权网络; 谣言传播; 弱化免疫; 模型

**中图分类号:** G20 C931 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-9807(2010)10-0032-08

## 0 引言

随着复杂网络理论研究的兴盛, 复杂网络的结构、功能和动力学的研究吸引了国内外越来越多的科学工作者的注意. 研究者对具有一般意义上的复杂网络的行为和基本规律有了深入的理解, 同时对复杂网络的应用研究已经从信息学科等领域迅速扩展到社会经济管理领域, 主要集中在金融市场、交通系统、信息传播与控制、物流与供应链、组织管理、社会经济网络等各个方面<sup>[1-7]</sup>. 对指挥网络中模型在极端情况下的无标度行为的研究发现<sup>[3]</sup>, 标度行为的涌现只是组织网络处于极端情况时的结果. 利用复杂网络领域中的无标度性质无法解决组织管理中的一般问题. 这使得研究复杂网络者对研究社会网络的一般性问题变得似乎不具有现实意义. 于是对复杂网络的研究变得更加具有针对性. 对产品扩散现象的建模, 网络效应揭示了个体邻域结构在产品扩散中的影响, 直接网络效应和间接网络效应在

产品扩散中的区别和产品锁定发生的条件等. 结果也较好地解释了产品扩散中的很多现象, 如不同产品的共存, 产品扩散中的“涌现”, 产品扩散中的路径依赖, 产品兼容性的选择以及新旧产品的更新换代等<sup>[4]</sup>. 在集群自组织下的复杂网络仿真研究表明, 企业的集群首先在地理位置上占有优势, 而且企业的集群自组织过程是企业从无序逐步到有序的自发过程, 并在这种过程中随着周围的环境的变化呈现逐步稳定的趋势<sup>[5]</sup>. 对金融市场中的金融数据的标度性、涨落分布和关联行为的统计分析, 发现金融市场遵循着自组织临界性、变异性以及自适应性等特征, 同时发现了金融市场中的经纪人之间的利益满足幂律等现象. 利用复杂网络理论对物流与供应链管理中的物流网络的结构复杂性以及节点的度分布、聚类系数以及网络最短距离等物理拓扑特性进行研究的基础上, 构建了基于复杂网络的危险源的扩散模型以及控制机制, 而且谣言传播行为以及病毒控制的研究也日渐活跃起来<sup>[6-8]</sup>.

① 收稿日期: 2009-10-28 修订日期: 2010-06-22

作者简介: 马英红 (1971-), 女, 山东济南人, 博士, E-mail: yinghongma71@163.com

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (7107109Q 60873058); 山东省自然科学基金资助项目 (Z2008G04); 山东省优秀中青年科学家奖励基金资助项目 (BS2009DX005); “泰山学者建设工程”资助项目.

现实中, 不管是社会网络还是 internet 网络, 在谣言 (不良信息或者病毒) 产生时只有极少的感染 (散播) 个体, 若不采取措施控制, 谣言就会广泛传播. 在谣言传播的过程中, 人们多是对免疫策略进行研究, 经常是根据节点在网络中的地位来选择免疫 (或者被控制) 节点. 目前探讨最多的有三种免疫策略: 随机免疫、目标免疫<sup>[8]</sup>和基于距离的局部免疫<sup>[9]</sup>. 随机免疫策略不区分节点的度的大小, 随机选择节点进行免疫. 目标免疫法则利用复杂网络的非均匀性特点, 选取节点度大的节点进行免疫, 一旦某个节点被免疫, 则意味着该节点所连接边从网络中删去. 局部免疫是在已知网络中感染节点的局部信息情况下, 利用这些局部信息控制被感染节点周围一定范围内的节点, 从而达到控制不良信息在整个网络大规模传播的目的. 在甲型 H1N1 病毒传播的早期, 人们对该病毒的了解极少, 在国内对感染病人的最为有效的免疫就是物理隔离, 这种方式其实就是彻底的将感染病人从整个的社会网络中“删除”, 就是目标免疫策略, 此时, 节点一旦被免疫, 意味着从网络中删除了与这些节点所关联的边, 这与网络的攻击 (error and attack) 原理<sup>[10-15]</sup>是一致的. 这种免疫虽然切断了病毒的传播途径, 但网络的连通性以及由此引发的网络效率会极大削减, 甚至导致整个网络的瘫痪.

在现实加权网络<sup>[16-18]</sup>中, 边的权重常常代表两个节点联系的紧密程度, 当边的权重值较大的时候, 谣言传播的概率以及传播的速度也会随之增加. 因此, 如何在一定程度上既能保证网络的正常通信, 又能降低甚至消除谣言传播是需要考虑的问题. 也就是如何降低边的权值而不“隔离”节点, 从而实现降低甚至消除谣言的传播以达到与传统免疫相同的效果.

就社会管理者而言, 当谣言的传播不利于社会发展时, 他们将会采取措施对谣言控制. 在本文从复杂网络理论的角度进行分析, 提出了网络的弱化免疫策略, 也就是按比例缩小与感染节点相连的边的权重, 探讨对谣言传播的遏制作用和对网络的整体效率的不同影响, 将弱化理论和节点的网络节点的局部性质结合起来, 在一定程度上实现了既能保证网络的正常通信, 又降低了谣言传播概率, 实验模拟数据有效的说明了弱化免疫

策略能够阻止谣言传播而且能够保持较高的网络效率, 在网络同步性能的影响方面, 发现弱化程度与网络同步性能成相反的方向发展.

## 1 弱化免疫策略

### 1.1 弱化免疫的提出及性质

传统的免疫方式是将免疫节点周围的边删除以切断不良信息的传播, 在无标度网络中, 当攻击网络中 15% 最大度节点, 网络整体效率会降低到原来的一半; 而当攻击超过 30% 的最大度节点后, 整个网络就会瘫痪<sup>[11-13]</sup>, 所以传统免疫不可能在网络中大规模的实行. 为避免网络出现瘫痪, 可考虑在边赋权网络中降低免疫节点所关联的边的权值 (但不能降为 0), 同时保持免疫节点的信息的连通, 使整个网络保持一定范围内的正常运行, 称这种免疫为弱化免疫.

当对一个特定节点实行弱化免疫时, 为方便起见, 可假设与免疫节点关联的所有边权值衰减  $q$  倍 ( $q \geq 1$ ), 即所连的边的权重缩小  $q$  倍. 当  $q$  趋于无穷大时, 弱化免疫趋于传统免疫; 而当  $q$  趋于 1 的时候, 弱化程度最小, 相当于维持原来的无免疫网络中的传播. 可将经典的 BA 网络模型中的边赋权值, 把节点间边的权重看成是节点间连接的紧密程度. 因此, 紧密程度的不同会影响到节点间信息的传播速率的不同. 为描述不同权重的边对连接的强弱不同这一现象, 假设网络中边的权重越大, 连接越紧密, 信息的传播速度也越大. 在这里把边权表示为边两端点的度的函数, 即  $w'_{kk} = w_0 (kk')^\beta$ , 其中,  $w'_{kk}$  表示度为  $k$  的点和度为  $k'$  的点之间的边权,  $w_0$  为常数,  $\beta$  依赖于特定的复杂网络 (比如在美国机场网络 (USAN) 中  $\beta = 0.8^{[18]}$ . 在科学家合作网络 (SCN) 中,  $\beta = 0^{[19]}$ ). 由边的权值, 可以计算度为  $k$  的节点的权值为  $s_k = k \sum_k P(k'/k) w_{kk}$ , 当网络是非关联网络时,  $P(k'/k) = k'P(k')/\langle k \rangle$ . 因此,  $s_k = w_0 \langle k^{1+\beta} \rangle k^{1+\beta} / \langle k \rangle$ .

网络效率是用来刻画信息在动态网络上的扩散和控制能力. 效率越高, 说明网络中节点的连接越紧密, 信息传播越快, 反之说明节点的连接越疏松, 信息传播越慢. 无权网络中网络效率被定

义为任意两个节点之间最短路径长度倒数之和的平均值<sup>[20]</sup>,  $e = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \frac{1}{d_{ij}}$ , 其中  $d_{ij}$  为节点  $i$  和  $j$  之间的最短距离. 在赋权网络中, 定义加权网络效率如下,

$$\zeta = \frac{1}{\sum_{i \neq j} w_{ij}} \sum_{i \neq j} \max\left\{\frac{w_{P_{ij}}}{d_{P_{ij}}}\right\}$$

其中  $d_{P_{ij}}$  为节点  $i$  与  $j$  之间路径  $P_{ij}$  的长度,  $w_{P_{ij}}$  为  $i$  节点与  $j$  之间路径  $P_{ij}$  上边权值的和, 即  $d_{P_{ij}} = |P_{ij}|$ ,  $w_{P_{ij}} = \sum_{i \in P_{ij}} w_{ij}$ . 由此可以得到, 在加权弱化免疫模型中, 当网络中边权值被弱化  $q$  倍后, 加权网络效率将不小于原来的  $1/q$ . 比传统的免疫过程中的网络效率降低的幅度小的多, 因为传统免疫可能导致网络效率趋近 0.

为了更好的比较网络在免疫前后的效率, 用加权网络相对效率  $\varepsilon = \zeta/\zeta'$  来替代加权网络效率  $\zeta$ . 其中  $\zeta'$  是加权网络的初始效率. 加权网络相对效率不仅能反映出当前网络效率的大小, 而且能够对免疫前后的变化程度做出对比, 更精确的反映出免疫策略对网络效率的影响. 因此, 在下文所有的加权网络效率皆为加权网络相对效率.

### 1.2 弱化免疫策略下的控制传播模型

利用经典的 S 病毒传播模型<sup>[21]</sup>, 研究病毒爆发在加权网络中的动态演化情况. 在 SI 模型中, 节点只有两种状态: 易感染状态 (S) 和感染状态 (I), 已感染的节点是不能复原的. 当谣言乍起, 由于爆发的突然性和对信息特性不了解, 一般会缺少相应控制措施, 而导致谣言在短期内得不到控制, 使其传播速度很快, 这与 SI 模型的状态一致, 因此, 采用 SI 模型模拟的主要原因. 其次 SI 模型只需要添加另一个位于 I 状态后的 S 状态或 R 状态就可以扩展到经典的 SIS 模型或 SIR 模型中. 所以, 只需要在 SI 模型上讨论加权网络上的弱化免疫策略.

假设网络中度为  $k$  的点的总的传播率为  $\lambda k$ . 实际上, 在传统的无权网络上的谣言传播在边上的传播率都设为定值  $\lambda$ , 这样度为  $k$  的点的总的传播率也为  $\lambda k$ . 为了体现加权网络边的异化性, 按照边权占结点强度的比例将传播率分配到每条边上. 于是得到度是  $k$  的节点之间边的传播率为

$$\lambda_{kk'} = \lambda k \frac{w'_{kk'}}{s_k} \tag{1}$$

每条边都有各自的传播率, 这是与传统的无权 SI 病毒传播模型最主要的不同点.

从式 (1) 可以看出边权与边上的传播率成正比, 这与实际情况相吻合. 例如, 在 Internet 中<sup>[19-20]</sup>, 网络边权值越大, 该边上的信息流传播频率越高; 在 USAN 网络<sup>[18]</sup> 中, 边权代表客流频率的边权值越大, 表示客流频率越高. 在非关联网络中, 式 (1) 可以表示为  $\lambda'_{kk'} = \lambda (k')^\beta \langle k \rangle / \langle k^{1+\beta} \rangle$ . 进一步地, 可以得到一个度为  $k$  的易感染节点在  $t$  时刻被感染的概率为  $1 - \prod_{k' \in \Gamma(t)} (1 - \lambda_{kk'})$ , 其中  $\Gamma(t)$  是  $t$  时刻与度为  $k$  的易感染节点相连的感染邻居节点的度序列.

为了能够更好的分析谣言传播的性质, 首先利用均场理论给出在加权网络 S 模型中度为  $k$  的易感染节点变化率是  $\frac{d\dot{i}_k(t)}{dt} = k(1 - \dot{i}_k(t)) \sum_{k'} P(k'/k) \dot{i}_{k'}(t) \lambda'_{kk'}$ . 在其右端, 产生项与度  $k$  正相关,  $1 - \dot{i}_k(t)$  表示一个  $k$  节点是易感染节点的概率, 加和项表示度  $k$  易感染节点的任何一个已感染邻居节点在  $t$  时刻感染该节点的平均概率,  $\lambda'_{kk'}$  为从度为  $k'$  节点传向度为  $k$  节点的边上的传播率. 将式 (1) 和  $P(k'/k) = k'P(k')/\langle k \rangle$  代入该公式, 忽略  $\dot{i}_k(t)$  高阶小项, 可以得出

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{i}_k(t)}{dt} &\approx \frac{\lambda k^{1+\beta} \langle k \rangle}{\langle k^{1+\beta} \rangle} \sum_{k'} \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle} \dot{i}_{k'}(t) \\ &= \frac{\lambda k^{1+\beta} \langle k \rangle}{\langle k^{1+\beta} \rangle} \theta_k(t) \end{aligned} \tag{2}$$

由式 (2) 知,  $\theta_k(t)$  与度  $k$  无关 (表达式中无节点度  $k$  的项), 因此  $\theta_k(t) = \theta(t)$ . 进一步对  $\theta(t)$  进行求导, 同样忽略  $\dot{i}_k(t)$  高阶小项, 可以得出

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} &= \sum_k \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle} \frac{d\dot{i}_{k'}(t)}{dt} \\ &\approx \sum_{k'} \frac{k'P(k')}{\langle k \rangle} \frac{\lambda k^{1+\beta} \langle k \rangle}{\langle k^{1+\beta} \rangle} \theta(t) \\ &= \frac{\lambda \langle k^{2+\beta} \rangle}{\langle k^{1+\beta} \rangle} \theta(t) \end{aligned} \tag{3}$$

利用均匀初始条件  $\dot{i}_k(t=0) = \dot{i}_0$ , 结合式 (2) 和式 (3), 可以解得  $\dot{i}_k(t) = \dot{i}_0 + \dot{i}_0 \frac{\lambda k^{1+\beta} \langle k \rangle}{\langle k^{1+\beta} \rangle} (e^{t/\tau} - 1)$ . 因此, 对于总体平均感染密度

$i(t)$ , 有

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \sum_k P(k) i_k(t) \\
 &= i_0 + i_0 \frac{\lambda \langle k^{1+\beta} \rangle \langle k_i \rangle}{\langle k^{1+\beta} \rangle} (e^{t/\tau} - 1) \quad (4)
 \end{aligned}$$

其中,  $\tau = \frac{\langle k^{1+\beta} \rangle}{\lambda \langle k^{2+\beta} \rangle}$ .

由  $\tau$  的定义可以看出, 谣言出现时的增长时间标度与网络的异化性密切相关, 不同度的节点对谣言传播的贡献各不相同, 当网络节点数  $N$  充分大时,  $\tau$  趋于稳定. 从传播率的总值可以知道,  $\beta$  值对谣言传播有着重要的影响.

在图 1 的左图给出了不同  $\beta$  值下稳态感染密度的变化, 可以看出  $\beta$  越大, 谣言传播速率越慢, 同时, 该图中的内图通过数据的拟合显示出当  $\beta = 0$  时, 时间标度  $\tau$  和理论值吻合. 图 1 的右图给出了半对数坐标中, 不同  $\beta$  值下早期感染密度的指数和理论值 (虚线) 的吻合情况, 其中  $\beta$  值从上到下分别为 1, 1.5 和 2. 特别的, 当指数  $\beta = 0$  时, 此时的与经典的无权  $BA$  模型的时间标度相同<sup>[20]</sup>. 由此可以知道, 在对网络进行免疫防护时, 需要对大度的节点进行重点保护, 以达到预期的效果.

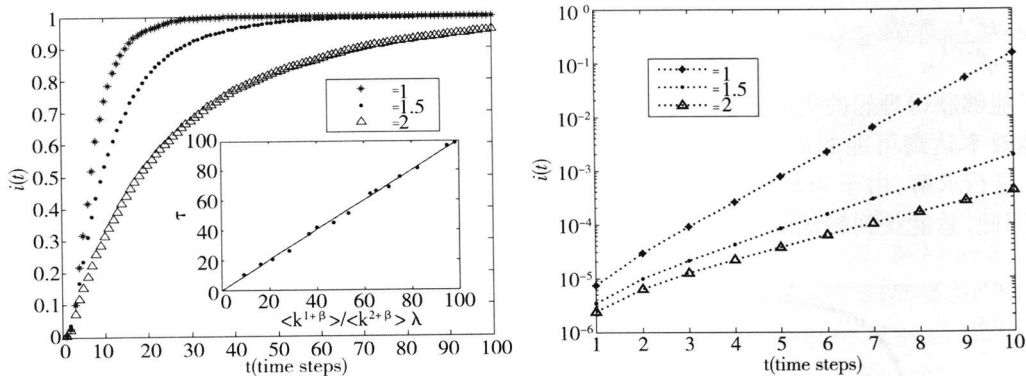


图 1 不同  $\beta$  值下的感染密度随时间的变化

Fig. 1 Variations of infection density with time in different  $\beta$

注: 左图是在不同  $\beta$  值下稳态感染密度  $i(t)$  随时间的变化. 其中小图为当  $\beta = 0$  时, 时间标度  $\tau$  和理论值相一致. 右图是半对数坐标下, 不同  $\beta$  值下早期感染密度的指数和理论值 (虚线) 的吻合情况. 所有结果皆为 100 次独立结果的平均值.

## 2 基于弱化免疫的目标免疫策略

在传统的免疫策略中, 目标免疫被认为是最有效的免疫方式. 它能够通过免疫最少的节点来达到理想的效果, 但是随着目标节点关联的边的删除, 网络中的部分节点间最短距离增大, 由此网络效率有可能被削弱. 为避免网络效率的降低, 可在加权网络中定义弱化免疫, 通过降低边权来遏制谣言传播速率, 达到控制不良信息传播的目的. 在本模型中,  $w'_{kk} = w_0 (kk')^\beta$ , 若将边权降  $q^\beta$  低倍, 标记弱化后的边权  $w'_{kk'}$ , 则

$$w'_{kk'} = w_{kk'} / q^\beta = w_0 (kk' / q)^\beta \quad (5)$$

此时, 边权的传播率  $\lambda'_{kk'}$  为  $\lambda'_{kk'} = \lambda (k' / q)^\beta \langle k_i \rangle / \langle k^{1+\beta} \rangle = \lambda_{kk'} / q^\beta$ . 显然, 当降低边权值  $q^\beta$  倍时, 就可以使得边上传播率也降低  $q^\beta$  倍. 于是, 将这种边权值以及节点传播率的变化反映

到节点上, 用  $k/q$  替代式 (1) 中的  $k_i$ , 得到度为  $k$  的节点免疫后感染密度为

$$i'_k(t) = i_0 + i_0 \frac{\lambda (k/q)^{1+\beta} \langle k_i \rangle}{\langle k^{1+\beta} \rangle} [e^{t/\tau} - 1] \quad (6)$$

选择对网络中度大于  $k_i$  的节点进行弱化免疫, 则网络的总体感染密度为

$$\begin{aligned}
 i'(t) &= \sum_{k \geq k_i} P(k) i'_k(t) + \sum_{k < k_i} P(k) i_k(t) \\
 &= i_0 + i_0 \frac{\lambda \langle k \rangle}{\langle k^{2+\beta} \rangle} (e^{t/\tau} - 1) \\
 &\quad \left( \sum_{k \geq k_i} P(k) (k/q)^{1+\beta} + \sum_{k < k_i} P(k) k^{1+\beta} \right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

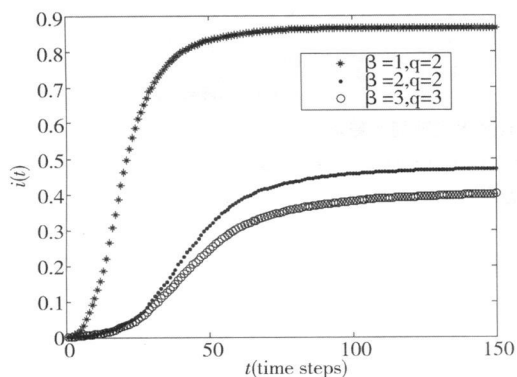
从式 (7) 可以看出, 在网络节点度确定 ( $\beta$  值一般也能确定) 的情况下, 弱化免疫后感染节点密度只与  $k_i$  和  $q$  值有关. 特别的, 当  $k_i = \min\{k\}$  且  $q$  充分大时, 谣言传播无法实现, 此时,  $i(t) = i_0$ . 仅当  $q$  趋向于无穷大时, 此时的弱化免疫相当

于传统的目标免疫; 而当  $k_i \geq \max\{k\}$  或  $q = 1$  时, 无免疫效果,  $i'(t) = i_0$ .

在加权 BA 网络中  $P(k) = 2m^2 k^3$ , 其中  $m$  为每个新点加入时和原有网络建立的边的条数. 将  $P(k) = 2m^2 k^3$  代入式 (7) 并且假设度  $k$  是连续的, 可以得出

$$\begin{aligned}
 i'(t) &= i_0 + i_0 \frac{\lambda \langle k \rangle}{\langle k^{2+\beta} \rangle} (e^{t\tau} - 1) \\
 &\quad \left( \sum_{k \geq k_i} 2m^2 k^3 (k/q)^{1+\beta} + \sum_{k < k_i} 2m^2 k^3 k^{1+\beta} \right) \\
 &= i_0 + i_0 \frac{\lambda \langle k \rangle}{\langle k^{2+\beta} \rangle} (e^{t\tau} - 1) \frac{2m^2}{\beta - 1} \\
 &\quad \left( \frac{k^{\beta-1}}{q} \Big|_{k_i}^{\max\{k\}} + k^{\beta-1} \Big|_{\min\{k\}}^{k_i} \right) \quad (8)
 \end{aligned}$$

为了能够获得理想的免疫效果而且还使得网络的整体效率达到可能的最大值, 需要对式 (4) 和式 (8) 进行求解, 由于未知数个数和方程的个数相同, 因此, 总能找到最优的  $k_i$  和  $q$  的解, 使得



免疫效果达到预期. 另外从式 (7) 可以看出, 感染节点密度和特定网络的度分布  $P(k)$  也有关系, 因此特定的网络拓扑也能够影响信息传播和控制行为的进行.

图 2 中的左图显示了不同的  $k_i$  和弱化值  $q$  下, 免疫节点密度  $i(t)$  随时间  $t$  的变化情况. 可以看出  $\beta$  和  $q$  的值越大, 弱化免疫效果越好. 图 2 中的右图展现了不同的  $\beta$  和弱化程度  $q$  下, 传播速率  $V_{inf}(t)$  和时间  $t$  的对应关系. 其中传播速率被定义为  $V_{inf}(t) = \frac{di(t)}{dt} \approx \frac{I(t) - I(t-1)}{N}$ . 从图 (2) 中的左图还可以看出, 减少  $\beta$  和  $q$  值都可以降低不良信息的传播速度. 其实从式 (7) 也可以看出,  $q$  越大, 免疫力度越大, 免疫效果自然越好. 而  $\beta$  越大,  $i(t)$  的值也越小. 因此在  $\beta$  比较小的网络中, 需要较大的免疫力度来实现对网络不良信息传播的有效控制.

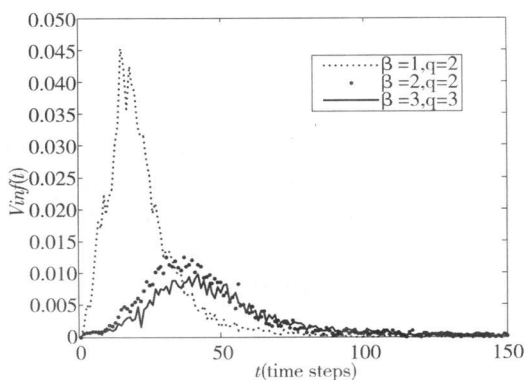


图 2 不同  $\beta$  值和  $q$  值下的感染密度随时间的变化

Fig 2 Variations of infection density with time in different  $\beta$  and  $q$

注: 左图表示不同  $\beta$  值和弱化程度  $q$  下, 稳态感染密度  $i(t)$  随时间  $t$  的变化情况. 右图表示不同  $\beta$  值和弱化程度  $q$  下, 传播速率  $V_{inf}(t)$  随时间  $t$  的变化情况. 以上结果皆为 100 次独立结果的平均.

为了对比弱化和非弱化下目标免疫效果, 给出当  $\beta = 1$  时, 不同的弱化程度  $q$  和传统目标免疫下稳态感染密度  $i(t)$  (见图 3 中的左图) 和网络效率  $\epsilon$  的对应关系 (图 3 中的右图) 与免疫节点所占比例的对应关系. 从图 3 中的左图可以看出, 当免疫比例接近 0.25 时, 传统目标免疫可以完全控制谣言传播. 而当  $q$  比较大 (等于 10) 时, 弱免疫和传统的目标免疫效果非常接近. 当  $q$  从 5

降低到 10 时,  $i(t)$  变化明显减缓, 差距不大, 免疫效果已经比较理想. 而从图 3 中的右图可以看出,  $q = 10$  时的弱化后网络效率比目标免疫高出很多, 当  $q$  从 5 降低到 10 时, 网络效率变化差距不大. 当免疫比例为 0.25 时,  $q = 10$  时的网络效率是目标免疫的 7 至 8 倍, 而  $q = 5$  时的网络效率是目标免疫的接近 20 倍. 这说明目标免疫可以在达到理想的免疫效果的同时保持相当高的网络效率.

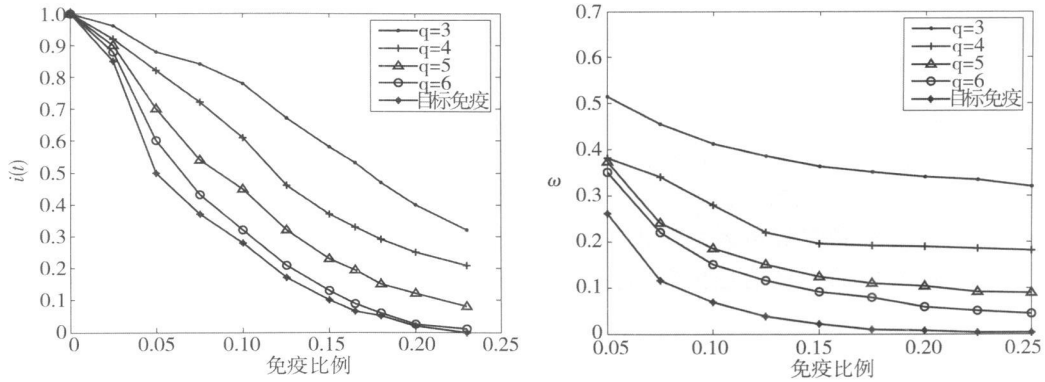


图 3 感染密度与节点的比例关系

Fig 3 Relationships of infection density and ratio of immunization nodes

注: 左图表示不同弱化程度  $q$  和目标免疫下, 稳态感染密度  $i(t)$  和免疫节点比例的对对应关系. 右图表示不同弱化程度  $q$  和目标免疫下, 网络效率  $\varepsilon$  和免疫节点比例的对对应关系. 此时  $\beta = 1$  以上结果皆 100 次独立结果的平均.

### 3 弱化免疫赋权网络同步性能分析

同步性能研究是网络动力学研究<sup>[22-25]</sup>的一个重要方面, 研究者们已经对许多不同的网络模型的同步性质进行了探索, 其中小世界网络模型和无标度网络模型的统计特性和动力学性能得到了广泛研究.

假设图  $G$  是实特征值的加权网络, 并且令系数  $\beta = 1$  网络由  $N$  个线性耦合相等的动力学系统构成, 则网络的动力学方程为  $\dot{x}_i = F(x_i) - \delta \sum_{j=1}^N M_{ij} H(x_j)$ , 其中  $x = F(x)$  表示单个节点的动力学方程,  $H(x)$  是一个线性矢量函数,  $\delta$  表示耦合强度,  $M_c$  是一个零行和耦合矩阵. 矩阵  $M_c$  的取值如下: 如果点  $i$  和点  $j$  ( $i \neq j$ ) 之间的边权被弱化  $q$  倍, 则偏对角元素  $M_{ij} = 1/q$  否则  $M_{ij} = 1$  对角线元素  $M_{ii}$  等于同行其他元素和的负数. 由此可以得出耦合矩阵  $M_c$  是一个对称的 Laplace 矩阵. 对  $M_c$  的所有特征根从小到大进行排序, 可以得到  $\lambda_N \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 = 0$  同步状态  $\{x_i = s \forall i | \dot{s} = f(s)\}$  稳定性的可以通过对角化线性稳定方程进行研究, 得出  $N$  个方程形如

$$\dot{\xi}_i = [DF(s) - \delta \lambda_i DH(s)] \xi_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{9}$$

其中这  $N$  个方程只有参数  $\lambda_i$  不同. 在式 (9) 中将  $\delta \lambda_i$  用  $v_i$  代替, 可以得到主稳定方程 (MSF)<sup>[25]</sup>:

$$\dot{\xi}_i = [DF(s) - v_i DH(s)] \xi_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{10}$$

在大型的动态振荡系统中, 主稳定方程在有限区间  $v_1 < v_i = \delta \lambda_i < v_2$  ( $i \geq 3$ ) 内是负值, 而且当满足该条件时网络处于同步状态. 取同步状态  $\delta \lambda_2 > v_1$  和  $\delta \lambda_N < v_2$ , 此时,  $R = \lambda_N / \lambda_2 < v_2 / v_1$ , 其中  $v_1$  和  $v_2$  由  $F(s), H(s)$  和  $s$  决定.

根据上面的理论探讨弱化免疫对网络同步性能的影响. 图 4 给出弱化程度  $q$  对值  $R$  的影响. 从图 4 可以发现当弱化程度  $q$  较小时, 特征值比率  $R$  较小, 网络具有较强的同步能力, 随着  $q$  的增大,  $R$  值逐渐增大. 因此, 增强弱化免疫程度在有效的防止谣言传播的同时也使得网络的同步能力逐渐恶化.

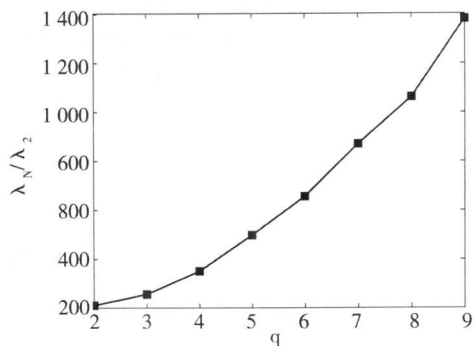


图 4 特征比率  $R$  和弱化程度  $q$  的关系

Fig 4 The relationship of eigenvalue ratio  $R$  and  $q$

注: 在规模为 1000 的网络中, 特征值比率  $R$  和弱化程度  $q$  的对对应关系. 以上结果皆为 50 次独立结果的平均.

## 4 结束语

信息传播是政府部门管理中的一个重要组成部分,良好的信息传播在管理中可以发挥巨大的作用,为决策者提供信息支持,减少或者切断不良信息传播、保障信息的正确有效传播是管理者期望的结果.本文对网络中的不良信息传播的控制

也就是网络免疫的研究是从传统免疫导致网络整体效率低下的缺点入手,定义了加权网络上弱化免疫,通过弱化免疫来探讨如何对病毒传播或者不良信息进行遏制,同时降低对网络的整体效率造成的影响.理论分析和模拟结果显示,弱化免疫策略能够有效地阻止病毒传播而且能够保持较高的网络效率,说明了弱化免疫策略对现实网络的病毒防治以及不良信息的控制方面有较好的理论意义.

## 参考文献:

- [1]汪秉宏,周涛,等.当前复杂系统研究的几个方向[J].复杂系统与复杂性科学,2008(5):21-28  
Wang Bing-hong, Zhou Tao, et al. Several direction in complex system research[J]. Complex Systems and Complexity Science, 2008(5): 21-28 (in Chinese)
- [2]Wang X F, Chen G R. Complex networks: SmallWorld, scale-free and beyond[J]. IEEE Circuits and Systems Magazine, 3(2003): 6
- [3]李鹏翔,张萌物,席酉民,等.组织网络中的无标度行为:极端情形的结果[J].管理科学学报,2009,12(4):42-50  
Li Peng-xiang, Zhang Meng-wu, Xi You-min, et al. Scale-free behavior in organization networks: Consequences in extreme situations[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(4): 42-50 (in Chinese)
- [4]鲜于波,梅琳.间接网络效应下的产品扩散——基于复杂网络和计算机经济学的研究[J].管理科学学报,2009,12(1):70-81  
Xian Yu-bo, Mei Lin. Diffusion of network product with indirect network effect: Research based upon complex network and computational economics[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(1): 70-81 (in Chinese)
- [5]谭劲松,何铮.集群自组织的复杂网络仿真研究[J].管理科学学报,2009,12(4):1-14  
Tan Jin-song, He Zheng. Self-organization of industrial cluster: A computer simulation from complex network perspective[J]. Journal of Management Sciences in China, 2009, 12(4): 1-14 (in Chinese)
- [6]刘作仪.复杂网络理论以及相关管理复杂性研究的资助进展[J].中国科学基金,2008(1):13-17  
Liu Zuoyi. Research progress on complexity network and its application in the area of management science[J]. Science Foundations in China, 2008(1): 13-17 (in Chinese)
- [7]Satorras R P, Vespignani A. Immunization of complex networks[J]. Phys. Rev. E, 65(2001): 036134
- [8]许丹,李翔,汪小帆.复杂网络病毒传播的局域控制研究[J].物理学报,56(3)(2007):1313-1317  
Xu Dan, Li Xiang, Wang Xiao-fan. An investigation on local area control of virus spreading in complex networks[J]. Chin. Phys. Soc, 56(3), 2007: 1313-1317 (in Chinese)
- [9]Albert R, Jeong H, Barabasi A. L. Error and attack tolerance of complex networks[J]. Nature, 406(2000): 378
- [10]Cucitti P, Latora V, Marchiori M. Efficiency of scale-free networks: error and attack tolerance[J]. Physica A, 320(2003): 622
- [11]Holme P, Kim B J. Vertex overload breakdown in evolving networks[J]. Phys. Rev. E, 65(2002): 066109
- [12]Motter A E, Lai Y. Cascade-based attacks on complex networks[J]. Phys. Rev. E, 66(2002): 065102
- [13]Moreno Y, Pastor-Satorras R, et al. Critical load and congestion instabilities in scale-free networks[J]. Europhys. Lett, 62(2003): 292
- [14]Cucitti P, Latora V, Marchiori M. Model for cascading failures in complex networks[J]. Phys. Rev. E, 69(2004): 045104
- [15]Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A. Weighted evolving networks: Coupling topology and weight dynamics[J]. Phys. Rev. Lett, 92(22)(2004): 228701.

- [ 16] 汪秉宏, 周涛, 何大韧. 统计物理学与复杂系统研究最新发展趋势分心 [ J]. 中国基础科学, 2005( 3): 37– 43  
Wang Binghong, Zhou Tao, He Darren. Development trend analysis of the statistical physics and complex system [ J]. Chinese Basic Science, 2005(3): 37– 43
- [ 17] Wang W X, Wang B H, Hu B, et al. General dynamics of topology and traffic on weighted technological networks [ J]. Phys Rev Lett, 94(18) (2005): 188702
- [ 18] Macdonald P J, Ahaas E, Barabasi A L. Minimum spanning trees of weighted scale-free networks [ J]. Europhys Lett, 72(2005): 308
- [ 19] Barrat A, Barthélemy M, et al. The architecture of complex weighted networks [ J]. Proc Natl Acad Sci USA, 101 (2004): 3747.
- [ 20] Latora V, Marchiori M. Efficient behavior of small world networks [ J]. Phys Rev Lett, 87(2001): 198701.
- [ 21] Murray J D. Mathematical Biology [ M]. Springer Verlag Berlin, 1993.
- [ 22] Strogatz S H. The Emerging Science of Spontaneous Order [ M]. New York: Hyperion, 2003.
- [ 23] Wu C W, Chua L Q. Application of graph theory to the synchronization in an array of coupled nonlinear oscillators [ J]. IEEE Trans Circuits and Systems I, 42(1995): 494– 497.
- [ 24] Belykh I V, Lange E, Hasler M. Synchronization of bursting neurons: What matters in the network topology [ J]. Phys Rev Lett, 94(2005): 188101
- [ 25] Wang X F, Chen G. Synchronization in small world dynamical networks [ J]. Int J Bifurcation and Chaos, 12(1) (2002): 187– 192

## Some researches on weakened immunization for weighted network

MA Ying-hong<sup>1</sup>, LI Hui-jia<sup>1</sup>, ZHANG Xiao-dong<sup>2</sup>

1. School of Management and Economics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China

2. Department of Mathematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China

**Abstract** With the application of social networks analysis in the field of social economics and management, information spreading in network has been widely studied by many researchers and much attention has been given to the control of rumors circulating. In order to avoid fatal attack by the epidemic, in this paper, we define a weakened immunization in weighted network by reducing the link weight and meanwhile holding the connectivity of network with a certain efficient. Second, a density of infect nodes is obtained based on weighted susceptible-infected (SI) epidemic model, the density law of epidemic-infected is studied too. Lastly, immunization for target strategy in weighted networks is studied and numerical simulations show that the weakened immunization in weighted network fits well with theoretical analysis in our model.

**Key words** weighted network; epidemic spreading; weakened immunization; SI model